

# GaAs/AlGaAs 异质结动力学行为研究\*

李国辉<sup>1)</sup> 周世平<sup>2)</sup> 徐得名<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> 上海大学通信与信息工程学院, 上海 200072)

<sup>2)</sup> 上海大学理学院, 上海 201800)

(2000 年 7 月 28 日收到, 2000 年 12 月 17 日收到修改稿)

建立在空间电荷转移框架下, 考虑 GaAs/AlGaAs 异质结物理模型, 推导相应动力学方程, 比较详细地分析了系统随激励电场变化出现的复杂分支情况. 分析表明, 直流场下稳态解和周期振荡解并存, 理论上对滞后现象进行解释. 对 GaAs/AlGaAs 异质结在微波场中动力学行为进行数值模拟, 得到在输入场强度变化的一定范围内, 具有锁频、准周期和混沌特性.

关键词: 负微分电导率, 异质结, 分支, 混沌

PACC: 7220H, 7340L, 0545, 0547

## 1 引 言

当外加电场超过特征阈值时, *n* 型 GaAs 器件和许多混合半导体器件都呈现出自持电流振荡, 这种由负微分电导导致的高频电流振荡从理论和实验中都得到了论证. 然而, 与此密切相关的半导体电子器件中载流子非线性输运过程还蕴涵着更加丰富的物理现象, 例如这种内部振荡的机理和外部周期信号相互作用所导致的锁频、准周期、和混沌等<sup>[1-3]</sup>引起了人们的极大兴趣, 尤其是混沌过程的产生使得器件难以稳态工作; 另一方面, 混沌过程良好的随机性可用于保密通信, 为此对这种器件的动力学行为进行全面和深入的了解显得十分重要.

半导体器件中的混沌现象最初由 Aoki 等<sup>[4]</sup>发现, 此后, 对 Gunn 氏二极管中的混沌现象进行了大量的研究<sup>[5-7]</sup>. 单异质结 GaAs/AlGaAs 或双异质结 AlGaAs-GaAs-AlGaAs 也得到了重视<sup>[8-11]</sup>, 这种层状的半导体器件对于基础研究以及在微电子领域都非常重要. 然而, 考虑到对该器件在远离平衡态下的分析, 迄今为止尚未有广为接受的物理模型, 为此, 本文首先在文献<sup>[10-12]</sup>的基础上建立单异质结 GaAs/AlGaAs 的物理模型, 并从理论上推导它的动力学方程; 其次分析了直流偏置下静态工作特性, 动力学分支; 最后数值模拟交变场下该异质结器件所表现出的周期、准周期和混沌情况, 为全面了解这类器

件的动力学行为以及对半导体异质结器件混沌的控制和应用提供了理论依据.

## 2 物理模型及其动力学方程

### 2.1 GaAs/AlGaAs 异质结物理模型

图 1 为掺杂的 GaAs/AlGaAs 能带图, GaAs 和 AlGaAs 宽度分别为  $L_1, L_2$ , GaAs 未掺杂, AlGaAs 为重掺杂, 并设掺杂浓度为  $N_D$ , 在热平衡下, 电子大部分在 GaAs 层, 两层之间的能量差为  $\Delta E_c$ , 并且 GaAs 中的迁移率  $\mu_1$  远大于 AlGaAs 中的迁移率  $\mu_2$ , 当在两层之间加上足够高的平行于分界面的电场时, 电子越过势垒, 激发到 AlGaAs, 这种电子从高迁移率到低迁移率的跃迁, 导致类似于 Gunn 氏二极管的负微分电导, 这是它振荡的基本原理. 随着 AlGaAs 层电子浓度的增加, 引起界面势垒  $\phi_b$  的降低, 背向热激发电流加大, 使得 GaAs 中载流子浓度增加, 促使  $\phi_b$  反而提高, 此过程不断往复, 构成动态循环过程, 这种电荷的空间转移左右器件的动力学行为.

### 2.2 动力学方程

下面推导半导体异质结的非线性电子输运方程, 设 GaAs 和 AlGaAs 中的平均电子密度分别为  $n_1, n_2$ , 且有

\* 国家自然科学基金(批准号 69871016)资助的课题.

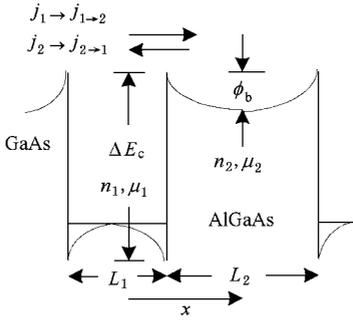


图1 GaAs/AlGaAs 结构能带图

$$n_1 = \frac{1}{L_1} \int_{-L_1}^0 n(x, t) dx \quad \text{和} \quad n_2 = \frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} n(x, t) dx.$$

由电流连续性方程  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial n}{\partial t}$  得到

$$\frac{d}{dt} n_1 = \frac{J_{1 \rightarrow 2} - J_{2 \rightarrow 1}}{eL_1}, \quad (1)$$

式中  $J_{1 \rightarrow 2}$  ( $J_{2 \rightarrow 1}$ ) 为从 GaAs  $\rightarrow$  AlGaAs 层 (AlGaAs  $\rightarrow$  GaAs) 的热激发电流密度.

$$J_{1 \rightarrow 2} = -e \int v_x dn = -e \int_{v_{0x}}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_x (n_1/N_c) \cdot \exp(-m_1^* \bar{v}^2/2k_B T_1) \mathcal{A} (m_1^*/h)^3 dv_x dv_y dv_z = -en_1 (E_1/3\pi m_1^*)^2 \exp(-3\Delta E_c/2E_1),$$

$$J_{2 \rightarrow 1} = -en_2 (E_2/3\pi m_2^*)^2 \exp(-3\phi_b/2E_2).$$

上式中各物理量如下: 电子速度为  $\bar{v} = (v_x, v_y, v_z)$ ,

热电子激发所需最小速度  $v_{0x}$  满足  $\frac{1}{2} m_1^* v_{0x}^2 = \Delta E_c$ ,

GaAs 与 AlGaAs 之间的能量差为  $\Delta E_c$ , GaAs (或 AlGaAs) 中电子有效质量为  $m_i^*$  ( $i = 1, 2$ ), 电子态密度为  $N_c$ , 玻耳兹曼常量为  $k_B$ , 普朗克常量为  $h$ , 电子电量为  $e$ , 平均载流子能量为  $E_i = (3/2)k_B T_i$  ( $i = 1, 2$ ), 且  $E_1 \approx (3/2)k_B T_1 + \tau_E e \mu_1 E_{\parallel}^2$ ,  $E_2 = (3/2)k_B T_1$ , 能量弛豫时间为  $\tau_E$ , 晶格温度为  $T_l$ , GaAs (或 AlGaAs) 载流子温度  $T_i$  ( $i = 1, 2$ ).

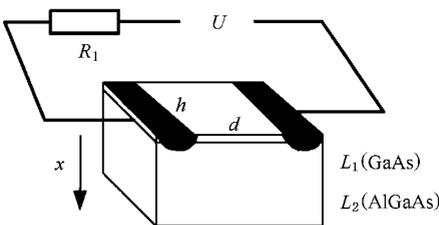


图2 GaAs/AlGaAs 的电路图

GaAs/AlGaAs 的电路结构如图 2 所示, 依照环路定律:  $U_0 - R_l I = E_{\parallel} d$ , 而电流为  $I = I_1 + I_2$ , 传导电流为

$$I_1 = C \frac{dU}{dt} = Cd \frac{dE_{\parallel}}{dt} = \frac{\epsilon S}{d} d \frac{dE_{\parallel}}{dt} = \epsilon h (L_1 + L_2) \dot{E}_{\parallel},$$

漂移电流为

$$I_2 = h (en_1 L_1 \mu_1 + en_2 L_2 \mu_2) E_{\parallel},$$

所以得到

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{E}_{\parallel} &= -\frac{d}{h(L_1 + L_2)R_l} (E_{\parallel} - E_0) \\ &\quad - \frac{en_1 \mu_1 L_1 + en_2 \mu_2 L_2}{L_1 + L_2} E_{\parallel} \\ &= -\sigma_l (E_{\parallel} - E_0) - \frac{en_1 \mu_1 L_1 + en_2 \mu_2 L_2}{L_1 + L_2} E_{\parallel}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中  $\sigma_l = \frac{d}{h(L_1 + L_2)R_l}$ ,  $\epsilon$  为介电常量,  $U_0 = E_0 d$  为外加电压.

垂直方向空间电荷由 Poisson 方程:

$$\frac{d}{dx} \epsilon E_{\perp} = e [N_D - n(x)] \quad (3)$$

和电流密度方程:

$$\epsilon \dot{E}_{\perp} = -e \left[ n \mu_2 E_{\perp} + D_2 \frac{d}{dx} n \right] + e L_1 \dot{n}_1 \quad (4)$$

及边界条件:

$$\phi(0) = -\phi_b, \phi(L_2) = 0,$$

$$\phi'(0) = -eE_{\perp}(0), \phi'(L_2) = 0 \quad (5)$$

得到, 其中  $\phi = -e \int_0^{L_2} E_{\perp}(x, t) dx$ ,  $D_2$  为散射常量.

由 (3) (5) 式并利用载流子守恒条件:

$$n_1 L_1 + n_2 L_2 = N_D L_2, \quad (6)$$

得到

$$\epsilon E_{\perp 0} = -e (N_D - n_2) L_2 = -en_1 L_1. \quad (7)$$

将 (4) 式在  $[0, L_2]$  上积分, 利用 (3) 式及定义

$$\phi_b = -e \int_0^{L_2} E_{\perp} dx,$$

得到

$$\dot{\phi}_b = \frac{e}{\epsilon} \left[ -\mu_2 N_D \phi_b + \mu_2 \frac{e^2}{2\epsilon} L_1 n_1^2 - e L_1 L_2 \dot{n}_1 \right]. \quad (8)$$

自治非线性方程 (1) (2) (8) 构成了半导体 GaAs/AlGaAs 异质结动力学系统. 为分析方便起见, 将所有的物理量均无量纲化, 设  $X = n_1/N_D$ ,  $Y = \mu_1 E_{\parallel} / V_{ds}$ ,  $Z = \phi_b/k_B T_l$ ,  $T = t/\tau_E$ , 将 (1) (2) (8) 式化简为

$$\frac{dX}{dT} = A_1 \left( 1 - \frac{L_1}{L_2} \right) \exp(-Z) - \sqrt{A_3 + A_4 Y^2} \cdot \exp\left(\frac{1}{A_2 + A_5 Y^2}\right) X, \quad (9)$$

$$\frac{dY}{dT} = B_1 + B_2 XY + B_3, \quad (10)$$

$$\frac{dZ}{dT} = C_1 Z + C_2 X^2 + C_3 \frac{dX}{dT}, \quad (11)$$

其中  $A_1 = \sqrt{\frac{k_B T_l \tau_E^2}{2\pi m_2^* L_1^2}}$ ,  $A_2 = -\frac{k_B T_l}{\Delta E_c}$ ,  $A_3 = \sqrt{\frac{k_B T_l \tau_E^2}{2\pi m_1^* L_1^2}}$ ,  $A_4 = \frac{\tau_E^3 e V_{ds}^2}{3\pi m_1^* \mu_1 L_1^2}$ ,  $A_5 = -\frac{2\tau_E e V_{ds}^2}{3\Delta E_c \mu_1}$ ,  $B_1 = -\frac{\tau_E}{\epsilon} \left( \sigma_l + \frac{e\mu_2 N_D L_2}{L_1 + L_2} \right)$ ,  $B_2 = -\frac{\tau_E e N_D L_1 (\mu_1 - \mu_2)}{\epsilon (L_1 + L_2)}$ ,  $B_3 = \frac{\tau_E \mu_1 \sigma_l E_0}{\epsilon V_{ds}}$ ,  $C_1 = -\frac{\tau_E e N_D \mu_2}{\epsilon}$ ,  $C_2 = \frac{\tau_E \mu_2 e^3 L_1^2 N_D^2}{2\epsilon^2 k_B T_l}$ ,  $C_3 = -\frac{e^2 L_1 L_2 N_D}{k_B T_l \epsilon}$ , 各参数如表 1 所示.

表 1 计算中各个物理参量

$N_D/cm^{-3}$	$10^{17}$	$L_1/nm$	10
$\mu_1 (cm^2/Vs)$	8000	$L_2/nm$	20
$\mu_2 (cm^2/Vs)$	50	$T_l/K$	300
$\Delta E_c/meV$	250	$m_1^*$	$0.067 m_0$
$h/nm$	1	$m_2^*$	$(0.067 + 0.083x) m_0$
$\tau_E/s$	$5.0 \times 10^{-12}$	$d/\mu m$	50
$\epsilon$	$12\epsilon_0$	$m_0/kg$	$0.91 \times 10^{-30} kg$
$\epsilon_0/Fm^{-1}$	$8.854 \times 10^{-12}$	$R_l/\Omega$	1144
$k_B/JK$	$1.380 \times 10^{23}$	$V_{ds}/ms^{-1}$	$5.0 \times 10^7$

### 3 动力学分析

先讨论动力学方程(9)–(11)的静态分支,为此考虑奇点(即平衡点)所满足的方程

$$A_1 \left( 1 - \frac{L_1}{L_2} \right) \exp(-Z) - \sqrt{A_3 + A_4 Y^2} \cdot \exp\left(\frac{1}{A_2 + A_5 Y^2}\right) X = 0, \quad (12)$$

$$B_1 + B_2 XY + B_3 = 0, \quad (13)$$

$$C_1 Z + C_2 X^2 = 0. \quad (14)$$

奇点随外加电场而变化,所有的奇点均以带\*的上标表示.在奇点处的电流密度如图 3 所示.随着外加电压的增大,负载线平行移动,与电流密度交点依次为 1 个( $U_0 < U_1$ ), 2 个( $U_0 = U_1$ ),  $E_{||}^* = E_{sn2}^*$ ), 3 个

( $U_1 < U_0 < U_2$ ), 2 个( $U_0 = U_2$ ,  $E_{||}^* = E_{sn1}^*$ ), 1 个( $U_0 > U_2$ ).在  $U_1 < U_0 < U_2$  段表现出负微分电导特性.图 4 为电流与外加电压的关系图,它与图 3 有相似的结构.奇点处的稳定性由该点的 Jacobian 矩阵的特征值  $\lambda$  决定.图 5 为各奇点的特征值与奇点处平行电场的关系图,深色线表示特征值的实部,淡色线条为特征值的虚部.由于第一个特征值的实部远小于 0,图 5 中没有划出.从图 5 看出奇点的分支情况:随着  $E_{||}$  的增加,稳定的节点(所有的  $\lambda < 0$ )变成稳定的焦点(一对具有负实部的共轭特征值),在  $E_{H1}^*$  (具有纯虚数的特征值)处通过 Hopf 分支到不稳定的焦点(一对具有正实部的共轭特征值),然后由不

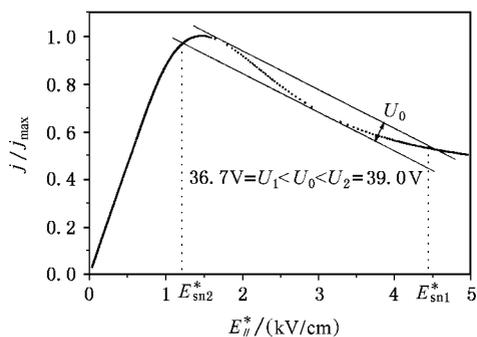


图 3 归一化静态电流密度与电场图

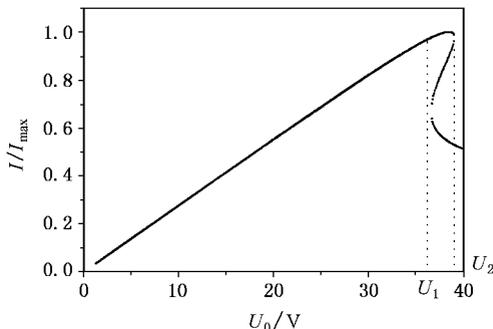


图 4 归一化静态电流与电压图

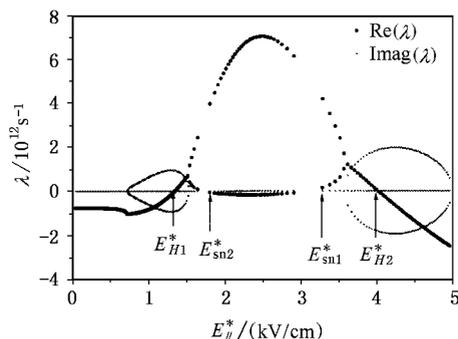


图 5 奇点处特征值与电场关系图

稳定的鞍-焦点到鞍点(两个正和一个负的特征值)在  $E_{sn2}^*$  处到达鞍点(两个负和一个正的特征值).....

图 6 粗线表示稳定的焦点  $sf$  或稳定的极限环  $slc$  细实线代表不稳定的焦点  $uf$  ,点代表鞍点  $sa$  ,其分支的情形如下 :设器件工作状态处于点  $E_{c1}(2)$  附近 随电场增加 通过  $E_{c1}(2)$  的分支 同时形成稳定的极限环 ( $slc$ ) 和不稳定的极限环 ( $ulc$ ) ,不稳定的极限环向下与鞍点 ( $sa$ ) 相交于  $E_{h01}(3)$  ,产生鞍点(3)-鞍点(4)的同宿轨道(参见图 5 (3) 从左面趋于  $E_{sn2}^*$  , (4) 从右侧趋于  $E_{sn2}^*$  ). 进一步增加外加电场  $E_0$  ,在 (4) 又得到不稳定的极限环 ,该极限环在  $E_{H1}(5)$  处通过 Hopf 分支消失 ;当  $E_0$  到达  $E_{H2}(6)$  时 ,从焦点 ( $sf$ ) 产生不稳定的极限环 ,该极限环与鞍点相交于  $E_{h03}(7)$  ,同时在  $E_{h04}(8)$  形成另一同宿轨道(参见图 5 (7) 从左面趋于  $E_{sn1}^*$  (8) 从右侧趋于  $E_{sn1}^*$  ),从 (8) 分支出的不稳定极限环与稳定的极限环相交于  $E_{c2}(9)$  ,最后达到稳定的焦点 ( $sf$ ).

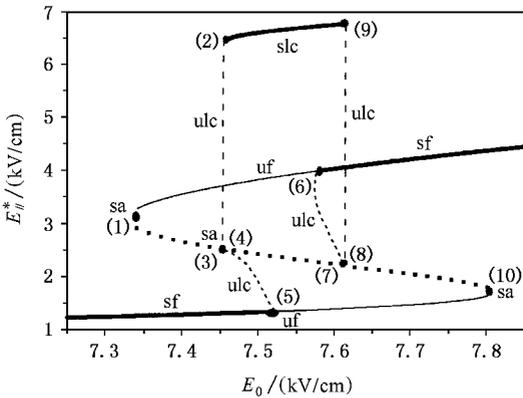


图 6 静态电场随外加电场的分支图 stable focus ( $sf$ ) unstable focus ( $uf$ ) saddle-point ( $sa$ ) stable limited cycle ( $slc$ ) unstable limited cycle ( $ulc$ )

我们可以对上述情况进行物理解释 :如图 7 所示 随外加电场的增加 原先稳定的焦点从  $E_{H1}$  处开始形成电流和电压振荡(相应于动力学中稳定的极限环) ,此时载流子在 GaAs 层和 AlGaAs 层中来回周期性漂移 ,当外加电场等于  $E_{c2}$  时 ,振荡停止 ,变成稳定焦点 相反的过程 逐渐缓慢地减小电场 稳定态在  $E_{H2}$  开始形成振荡 ,然后于  $E_{c1}$  停止 ,  $E_{c1} < E_{H1}$  ,表现为动力学的滞后现象 .

可见对电场  $E_{h02} < E_0 < E_{H1}$  或  $E_{H2} < E_0 < E_{h03}$  时 两种吸引子 ,即稳定的极限环 ( $slc$ ) 和稳定的焦点 ( $sf$ ) 同时存在 ,对于不同的初始值最终分别吸引到

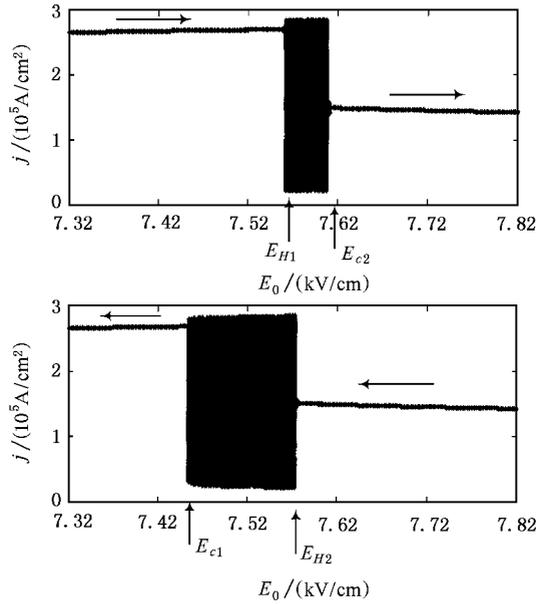


图 7 电场缓慢增加与缓慢减小时电流滞后曲线

不同的吸引子上 ,图 7 中方向均为顺时针方向 ,对位于鞍点 ( $sa$ ) 附近的初始值沿两个顺时针方向到达稳定的极限环 .图 8 即为  $E_0 = 7.499$  kV/cm 时两个吸引子同时并存的情况 ,初始值在细线之内的点最后都到达  $sf$  ,而初始值在细线之外的所有点最终吸引到  $slc$  上 ,对于  $E_{H2} < E_0 < E_{h03}$  可得到类似的结果 .

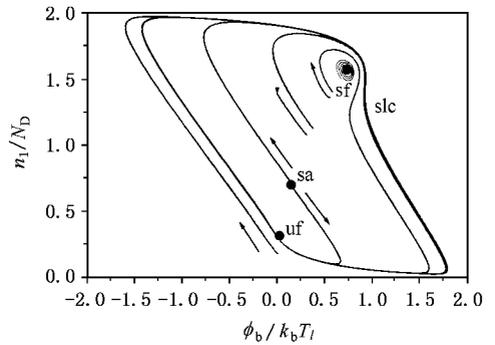


图 8 同时并存的两个吸引子相图

图 9 分别为  $E_0 = 7.45$  kV/cm 和  $E_0 = 7.47$  kV/cm 时的相图和时间序列 ,当  $E_0 = 7.45$  kV/cm ,经过瞬态振荡之后趋于不动点 ,而  $E_0 = 7.47$  kV/cm 得到周期  $f_0 = 103$  GHz 的自持振荡解 .

### 4 锁频、准周期和混沌现象

半导体内部产生的振荡在外部周期信号驱动下可以导致非常复杂的动力学行为 ,诸如 :周期、准周

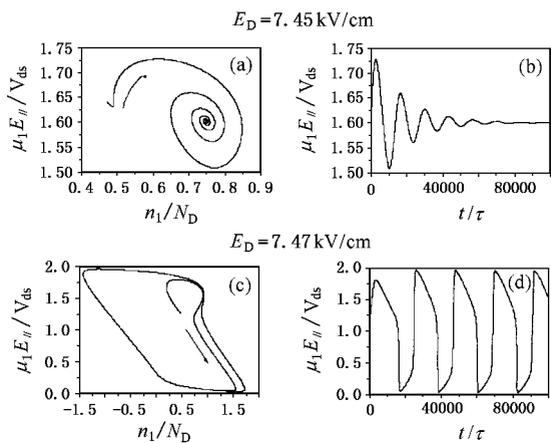


图 9  $E_0 = 7.45 \text{ kV/cm}$  及  $E_0 = 7.47 \text{ kV/cm}$  的相图和时间序列图

期以及混沌现象.对 GaAs/AlGaAs 异质结动力学方程(9)–(11)加上外部的周期驱动,同样可以发现相似的现象,下面我们选择直流工作点位于负微分导电区域,设  $U = U_0(1 + A \sin(2\pi(9.5f_0)t))$ ,即驱动频率为本征振荡频率的 9.5 倍,幅值为直流信号的  $A$  倍.图 10 为不同幅值时求得的最大李雅普诺夫指数(简称为 LE),可见选择合适的驱动幅度,能得到混沌态.图 11,图 12 为不同幅值时对电流所作的庞开莱截面<sup>[9]</sup>,它具有倍周期分岔通向混沌的特性,而且有自相似性.图 13 为  $A = 0.53235$  时周期 3 的情况,其中相图(a)(b)为庞开莱截面结果(c)为庞开莱截面的回归图<sup>[8,9]</sup>,在图 13 上只有 3 个点.图 14 为  $A = 0.175$  时周期 7 的情况,其中(a)为庞开莱截面结果(b)为庞开莱截面的回归图,相图(c)(d)是电子密度时间序列.图 15 分别是  $A = 0.1187$  所得的庞开莱截面及庞开莱截面的回归图,近似于封闭

的曲线,属于准周期情形.图 16 还划出了  $A = 0.1165$  时为混沌的情况.可见,随着信号幅值的变化,出现了非常丰富的锁频、准周期和混沌现象,对照图 11 还可以找到其他类似的锁频、准周期和混沌窗口,限于篇幅,在此不再赘述.

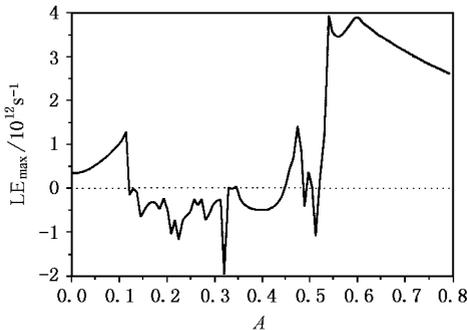


图 10 最大李雅普诺夫指数  $LE_{\max}$  随外电压幅值  $A$  的变化图

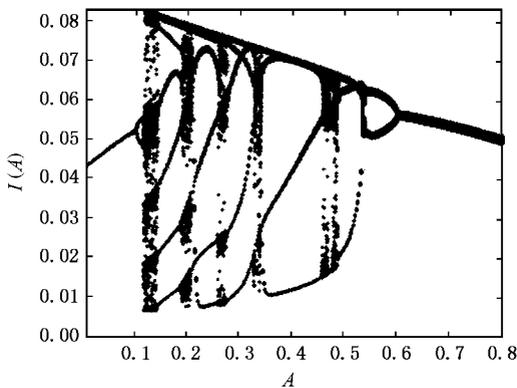


图 11 Poincaré 截面  $I(A)$  与幅值  $A$  关系

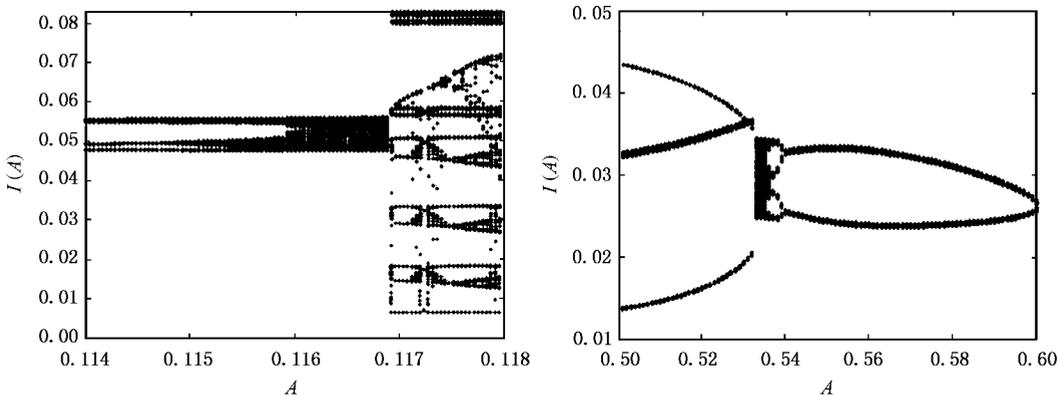


图 12 Poincaré 截面  $I(A)$  与幅值  $A$  关系

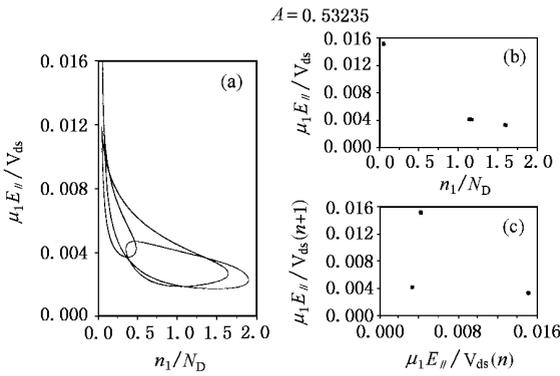


图 13 周期 3  $A = 0.53235$  (a)为相图 (b)为 Poincaré 截面图; (c)为 Poincaré 回归图

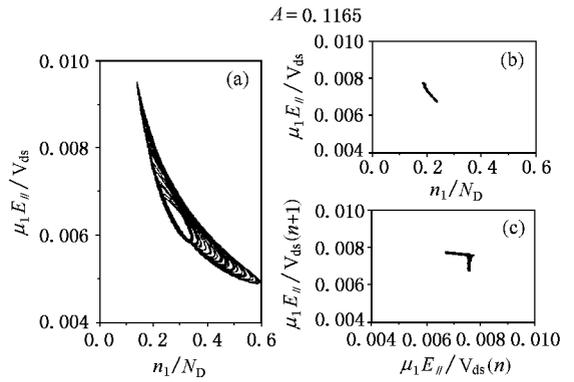


图 16 混沌 (a)为相图 (b)为 Poincaré 截面图 (c)为 Poincaré 回归图

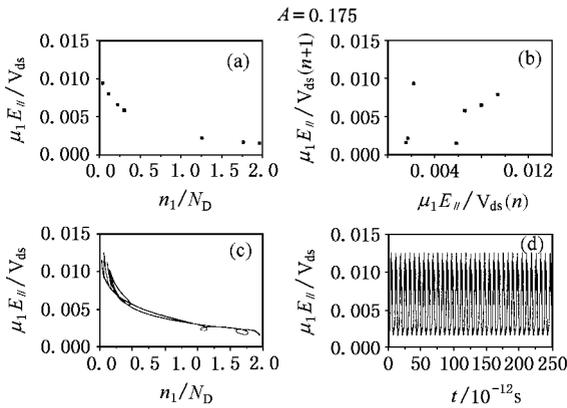


图 14 周期 7  $A = 0.175$  (a)为 Poincaré 截面图 (b)为 Poincaré 回归图 (c)为相图 (d)为时间序列图

### 5 结 论

本文从 GaAs/AsGaAl 异质结的模型出发,通过建立相应的动力学方程,详细地分析了它的动力学性质.数值计算表明:在交流场的作用下,对 GaAs/AlGaAs 异质结中的电子密度随信号幅度的变化,相继出现倍周期分岔、锁频、准周期及混沌的情况进行了分析,结果表明它们灵敏地依赖于微波信号的大小,为半导体异质结器件混沌的控制和应用提供了理论依据.由于方程(1)(2)和(8)描述了 GaAs/Al-GaAs 异质结的物理特性,可以预测上述数值模拟的结果有望在实验中得到验证.对于该器件详细的混沌情形,如吸引域、混沌的控制及同步等,我们将在以后将进一步研究.

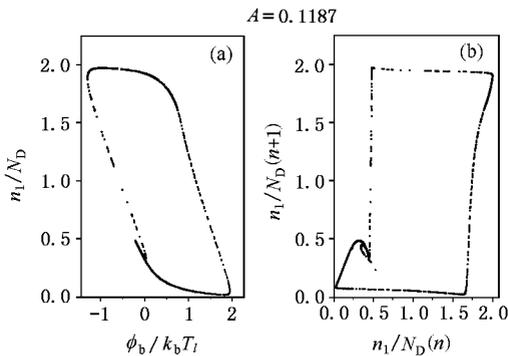


图 15 准周期 (a)为 Poincaré 截面图 (b)为 Poincaré 回归图

[1] J. A. Glazier, A. Libchaber, *IEEE Trans. Circuits Syst.*, **55** (1988), 790.  
 [2] G. A. Held, C. Jeffries, *Phys. Rev. Lett.*, **56**(1986), 1183.  
 [3] G. Heinz, R. Richter, A. Kittel, G. Flatgen, J. Peinke, J. Pari-

si, *Phys. Rev.*, **B48**(1993), 12603.  
 [4] K. Aoki, T. Kobayashi, K. Yamamoto, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **51** (1982), 2373.  
 [5] E. Mosekilde, J. S. Thomson, C. Knudsen, M. Hindsholm,

- Phys. Rev.* , **B41**( 1990 ), 2298. 7663.
- [ 6 ] Z. F. Jiang, B. K. Ma , *Appl. Phys.* , **A52**( 1991 ), 10. [ 10 ] E. Scholl , K. Aoki , *Appl. Phys. Lett.* , **58**( 1991 ), 1277.
- [ 7 ] E. Mosekilde , J. S. Thomson , C. Knudsen , M. Hindsholm , [ 11 ] K. Aoki , K. Yamamoto , N. Kobayashi , E. Scholl , *Sol. State Physica* , **D66**( 1993 ), 143. *Electron.* , **32**( 1989 ), 1149.
- [ 8 ] F. J. Niedernostheide , C. Brillert , B. Kukuk , H. G. Purwins , [ 12 ] Y. L. Lü , S. P. Zhou , D. M. Xu , *Acta Phys. Sin.* , **49**( 2000 ), 1394 ( in Chinese ) [ 吕永良、周世平、徐得名 , *物理学报* , **49** ( 2000 ), 1394 ].
- [ 9 ] F. J. Niedernostheide , M. Kleinkes , *Phys. Rev.* , **B59**( 1999 ),

## RESEARCH ON THE DYNAMICAL BEHAVIORS OF GaAs/AlGaAs HETEROSTRUCTURES \*

LI GUO-HUI<sup>1)</sup> ZHOU SHI-PING<sup>2)</sup> XU DE-MING<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> College of Communication and Information Engineering , Shanghai University , Shanghai 200072 , China )

<sup>2)</sup> College of Science , Shanghai University , Shanghai 201800 , China )

( Received 28 July 2000 ; revised manuscript received 17 December 2000 )

### ABSTRACT

We develop the physical model based on the real space charge transfer mechanism and derive the dynamic equations of GaAs/AlGaAs heterostructures. Complex bifurcations are studied in detail for the forced and unforced cases. It is shown that both periodic attractors and fixed points attractors can coexist under a right dc bias. The hysteresis phenomena are also investigated in theory. For the forced GaAs/AlGaAs , numerical simulation shows that the occurrence of frequency-locking , quasiperiodicity , and chaos depends on the frequency and amplitude of the externally applied microwave field , as expected.

**Keywords** : negative differential conductivity , heterostructure , bifurcation , chaos

**PACC** : 7220H , 7340L , 0545 , 0547