

超导材料的混沌现象^{*}

盛平兴

(上海大学理学院数学系, 上海 200436)

(2001 年 1 月 11 日收到)

讨论了一维稳态和发展型 Ginzburg-Landau (缩写为 G-L) 超导方程组, 从数学上论证了常稳态解的不稳定性及无穷维动力系统在进行波解意义下的极限集之存在性. 指出 G-L 超导方程组描述的超导材料具有作者意义下的无穷维动力系统的混沌现象, 即超导材料在传导中可能出现奇特现象.

关键词: 超导材料, G-L 超导方程组, 无穷维动力系统, 混沌现象

PACC: 7490, 0290

1 引言

应用数学工作者的任务不仅仅是讨论数学模型中解的存在性或唯一性, 也不局限于讨论解的性态或给出数值解, 而更加重要的任务是从数学角度去探究数学模型背景中的科学性质, 例如物理性质、材料性质、化学性质、电子工程中的性态等等. 这种数学的定性性质可证实实验结果, 也可指导怎样做实验来发现这种性质. 尤其重要的事实是, 数学的定性结果未必能被实验证实, 例如天体力学中, 各种实验是极为困难的或者是代价昂贵的. 定性分析、定量分析及科技操作相互协调方能翱翔宏宇宙、微宇宙、科技的宇宙.

本文就是从数学的角度去定性分析超导材料研制过程中可能出现的问题, 希望能为实验起一点指导作用. 高温超导的研究近二十余载, 目前仍停留在实验阶段. 超导材料的产业化是各国所期盼的. 那么究竟为什么超导材料的产业化过程如此缓慢? 科学家们正在主攻几个研究领域^[1], 如高温超导电性的物理研究, 高温超导材料的材料科学研究, 高温超导应用技术的基础理论和原理性研究等等^[1-3]. 作者在讨论动力系统奇点稳定性时, 将一维 G-L 超导方程组作为特例, 发现常稳态解的不稳定性. 本文同时考虑发展型一维 G-L 超导方程组, 在进行波解意义下, 无穷维动力系统存在不稳定的稳态解及其极限集, 即存在作者意义下的混沌现象, 从而断定超

导材料在传导过程中可能出现奇特现象.

2 常稳态解的不稳定性

按照 G-L 理论^[4], 在外加切向磁场 h 的情况下, 宽度为 $2d$ 的超导薄膜的序参数 $\psi(x)$ ($\psi \geq 0$) 和诱导磁势 $A(x)$ 应是 G-L 泛函 $F(\psi, A)$ 的最小元, 其中

$$F(\psi, A) = \int_{-d}^d \{ \psi^2 (\psi^2 - 2) + 2\psi^2 A^2 + \frac{2}{k^2} (\psi')^2 + \lambda (A' - h)^2 \} dx,$$

$k > 0$ 是 G-L 参数. 泛函 $F(\psi, A)$ 在空间 $H^1[-d, d] \times H^1[-d, d]$ 的任何最小元 $\{\psi, A\}$ 属于 $C^\infty[-d, d] \times C^\infty[-d, d]$, 并且是下列边值问题的解^[5-9]:

$$\begin{aligned} \psi'' &= k^2 \psi (\psi^2 + A^2 - 1), \\ A'' &= \psi^2 A, \\ \psi'(\pm d) &= 0, \\ A'(\pm d) &= h, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x \in [-d, d]$, $h \geq 0$. (1) 式是一维稳态 G-L 超导方程组, 其相应的一维发展型 G-L 超导方程组的初边值问题为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - k^2 \psi (\psi^2 + A^2 - 1), \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - \psi^2 A, \end{aligned}$$

^{*} 上海市教育委员会发展基金(批准号 2000A10)资助的课题.

$$\begin{aligned} \psi'(\pm d, t) &= 0, A'(\pm d, t) = h, t \in (0, \infty), \\ \psi(x, 0) &= \psi_0(x), A(x, 0) = A_0(x), x \in [-d, d]. \end{aligned} \quad (2)$$

若考虑稳态方程组且暂时忽略边界条件, 那么方程组可化成四维动力系统:

$$\begin{aligned} \psi' &= \phi, \\ \phi' &= k^2 \psi(\psi^2 + A^2 - 1), \\ A' &= B, \\ B' &= \psi^2 A. \end{aligned}$$

系统的奇点为 $(\psi_0, \phi_0, A_0, B_0) = (0, 0, A_0, 0)$, 其中 $A_0 \in R^1$, 显然为非孤立奇点 $(\pm 1, 0, 0, 0)$ 是两个孤立奇点. 由于假定 $\psi(x) \geq 0$ $(-1, 0, 0, 0)$ 没有意义. 现将系统在 $(1, 0, 0, 0)$ 点线性化并展成泰勒形式:

$$\begin{aligned} \psi' &= \phi, \\ \phi' &= 3k^2(\psi - 1) + 3k^2(\psi - 1)^2 + k^2 A^2 \\ &\quad + k^2(\psi - 1)^3 + k^2(\psi - 1)A^2, \\ A' &= B, \\ B' &= A + 2(\psi - 1)A + (\psi - 1)^2 A. \end{aligned}$$

令 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为方向余弦, $\psi = 1 + \alpha_1 s$, $\phi = \alpha_2 s$, $A = \alpha_3 s$, $B = \alpha_4 s$ 为经过点 $(1, 0, 0, 0)$ 方向为 α 的射线. 设 $V = (\psi', \phi', A', B')$ 为上述系统对应的向量场, 在射线上, 我们有 $(V, \alpha) = s[\alpha_1 \alpha_2 + 3k^2 \alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_3 \alpha_4] + \alpha(s^2)$, $|\alpha| = 1$,

$$\begin{aligned} |V| &= (s^2(9k^4 \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2) + \alpha(s^3))^2 \\ &\lim_{(\psi, \phi, A, B) \rightarrow (1, 0, 0, 0)} (\text{沿射线}) \cos < V, \alpha > \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(V, \alpha)}{|V||\alpha|} = \frac{(1 + 3k^2)\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_3 \alpha_4}{\sqrt{9k^4 \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}}. \end{aligned}$$

显然, 当 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (0, 0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ 时, 极限值为 1, 故向量场沿射线 $(0, 0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ 方向离开奇点 $(1, 0, 0, 0)$, 即 $(1, 0, 0, 0)$ 是系统的不稳定奇点. 系统在 $(1, 0, 0, 0)$ 附近存在第二类极限集^[10], 即在奇点 $(1, 0, 0, 0)$ 附近有点域混沌区^[11, 12].

3 无穷维动力系统的极限集之存在性

考虑发展型 G-L 超导方程组(2), 忽略边界条件而只考虑初始条件. 若初始条件 $\psi(x, 0) = \psi_0(x)$, $A(x, 0) = A_0(x)$ 满足 $|\psi_0(x) - 1| < \delta$, $|A_0(x) - 0| < \delta$ 则 $\psi(x, t)$, $A(x, t)$ 当 t 充分大时将发生什么情况? 这是无穷维动力系统所研究的问题.

目前尚无一般方法直接讨论方程(2)在 $t \rightarrow \infty$ 时的性态. 但考虑行波解可将无穷维动力系统化成有限维动力系统. 对有限维动力系统, 我们有一般的方法来讨论极限集和混沌现象的存在性. 这里采用了作者在 1991 年给出的有限维动力系统的混沌现象之定义^[11, 13] 及在 1996 年给出的无穷维动力系统的混沌现象之定义^[14].

在方程(2)中, 利用关系式

$$\frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{dx}, \quad \frac{d\psi}{dt} = -c \frac{d\psi}{d\xi},$$

并令 $\xi = x - ct$, $\phi = d\psi/d\xi$, $B = dA/d\xi$, 我们得到如下四维动力系统:

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= \phi, \\ \frac{d\phi}{d\xi} &= -c\phi + 3k^2(\psi - 1) + 3k^2(\psi - 1)^2 \\ &\quad + k^2 A^2 + k^2(\psi - 1)^3 + k^2(\psi - 1)A^2, \\ \frac{dA}{d\xi} &= B, \\ \frac{dB}{d\xi} &= -cB + A + 2(\psi - 1)A + (\psi - 1)^2 A. \end{aligned}$$

系统的孤立奇点 $(\pm 1, 0, 0, 0)$ 及非孤立奇点 $(0, 0, a, 0)$ $(a \in R^1)$. 令 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为方向余弦, $\psi = 1 + \alpha_1 s$, $\phi = \alpha_2 s$, $A = \alpha_3 s$, $B = \alpha_4 s$ 为经过点 $(1, 0, 0, 0)$ 方向为 α 的射线. 记 $V = (\psi', \phi', A', B')$ 为上述系统对应的向量场. 在射线上, 我们有

$$\begin{aligned} (V, \alpha) &= s(\alpha_1 \alpha_2 - c\alpha_2^2 - 3k^2 \alpha_1 \alpha_2 \\ &\quad + \alpha_3 \alpha_4 - c\alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4) + \alpha(s^2), \\ |V| &= s(\alpha_2^2 + \alpha_4^2 + c^2 \alpha_2^2 + 9k^4 \alpha_1^2 + c^2 \alpha_4^2 + \alpha_3^2 \\ &\quad - 2c\alpha_3 \alpha_4 - 3ck^2 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha(s))^{1/2}, \\ &\lim_{(\psi, \phi, A, B) \rightarrow (1, 0, 0, 0)} (\text{沿射线}) \cos < V, \alpha > = \end{aligned}$$

$$\frac{(1 - 3k^2)\alpha_1 \alpha_2 + 2\alpha_3 \alpha_4 - c(\alpha_2^2 + \alpha_4^2)}{(9k^4 \alpha_1^2 + (1 + c^2)\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 - 3ck^2 \alpha_1 \alpha_2 - 2c\alpha_3 \alpha_4)^{1/2}}.$$
不妨设波速 $c = 1$, 则令 $\alpha = (0, 0, 0, 1)$, 极限值为 -1 . 若令 $\alpha = (0, 0, \alpha_3, \alpha_4)$, 则极限值为 $\frac{2\alpha_3 \alpha_4 - \alpha_4^2}{\sqrt{1 - 2\alpha_3 \alpha_4}}$.

显然存在 α_3, α_4 使得极限值为 $+1$. 从而可知奇点 $(1, 0, 0, 0)$ 不稳定. 发展型 G-L 超导方程组在行波解意义下同样在 $(1, 0, 0, 0)$ 附近有点域混沌区, 这与稳态意义下的点域混沌区相符. 有限维动力系统存在第二类极限集且存在点域奇怪吸引区, 系统是混沌的. 由此推出, G-L 方程描述的超导材料的性能不很稳定, 可能出现奇特现象. 从理论上论证了 G-L 方程描述的超导材料的传导的不稳定性. 这一

理论结果与目前的实验相符的. 看来有必要改变材料的结构,使数学方程克服上述混沌现象,或者用控制混沌现象的办法来改变超导结构. 希望此理论结

果能为实验起一点指导意义,使超导材料尽快投入产业化.

[1] H.M.Wen *et al.* , *Commun. High Technology* , **10**(117)(2000) , 105 (in Chinese) [温华明等,高技术通讯, **10**(117)(2000) , 105].

[2] C.W.Sha *et al.* , *Commun. High Technology* , **10**(114)(2000) , 91 (in Chinese) [沙次文等,高技术通讯, **10**(114)(2000) , 91].

[3] Y.P.Liu , *Physics* , **29**(2000) , 444 (in Chinese) [刘宜平,物理, **29**(2000) , 444].

[4] V.L. Ginzburg , P. D. Landau , *Zh. Eksper. Thoer. Fiz.* , **20** (1990) , 1064.

[5] S.P. Hastings , W.C. Troy , *SIAM J. Math. Anal.* , **30**(1999) , 1.

[6] A. Aftalion , W.C. Troy , *J. Phys.* , **D132**(1999) , 214.

[7] A. Aftalion , S. J. Chapman , *SIAM J. Appl. Math.* , **60**(4) (2000) , 1157.

[8] W.H. Yu , *Ann. Mathemat.* , **21**(2000) , 1 (in Chinese) [余王辉,数学年刊, **21**(2000) , 1].

[9] B.L. Guo , *Nonlinear Evolutionary Equations* (Shanghai Education Press of Science and Technology , Shanghai , 1995)(in Chinese) [郭柏林,非线性演化方程(上海科技教育出版社,上海, 1995)].

[10] P.X.Sheng , *J. Shangqiu Teachers College* , **16**(6)(2000) , 96 (in Chinese) [盛平兴,商丘师范学院学报, **16**(6)(2000) , 96].

[11] P. X. Sheng , *Proceedings of Modern Mathematics and Mechanics* (VII)(Shanghai University Press , Shanghai , 1997) , p. 408 (in Chinese) [盛平兴,现代数学与力学 MMMVII 文集(上海大学出版社,上海, 1997)第 408 页].

[12] P. X. Sheng , *Proceedings of Modern Mathematics and Mechanics* (VIII)(Zhongshan University Press , Guangzhou , 2000) , p. 115 (in Chinese) [盛平兴,现代数学与力学 MMM – VIII 文集(中山大学出版社,广州, 2000) , 第 115 页].

[13] P.X.Sheng , *Commun. Appl. Comput. Mathemat.* , **8**(1994) , 34 (in Chinese) [盛平兴,应用数学与计算数学学报, **8**(1994) , 34].

[14] P. X. Sheng , *J. Shanghai University* , **1**(1997) , 91.

CHAOTIC PHENOMENA OF SUPERCONDUCTIVITY^{*}

SHENG PING-XING

(*Department of Mathematics , College of Natural Science ,Shanghai University , Shanghai 200436 , China*)

(Received 11 January 2001)

ABSTRACT

One-dimensional steady state and evolutionary Ginzburg-Landau equations for superconductivity is disussed. Instability of constant steady state solutions and the existence of limit sets of infinite-dimensional dynamic system are proved. Using the author's definition of chaos for finite-and infinite-dimensional dynamic systems , we conclude that superconductors governed by G-L equations possess chaotic phenomena. Therefore strange phenomena may occur in conducting. The theoretical results indicate that it is advisable to improve the design of experiments or try to find new structures of superconductors in future research to suppress the chaotic behavior.

Keywords : superconductors , G-L equations , infinite-dimensional dynamic system , chaotic phenomena

PACC : 7490 , 0290

^{*} Project supported by the Shanghai Developing Grant of Education Commission of China (Grant No.2000A10).