第 50 卷 第 9 期 2001 年 9 月
1000-3290/2001/50(09)/1651-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.9,September,2001

具有 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态

陈 刚

(绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

(2001 年 3 月 21 日收到;2001 年 4 月 23 日收到修改稿)

给出了具有 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解.

关键词:Pöschl-Teller 势,Klein-Gordon 方程,Dirac 方程,束缚态
PACC:0365

1 引 言

在强耦合条件下,在势场中运动的粒子的相对论效应变得非常重要[1],而在考虑相对论效应时,处于势场中运动的粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程来描述. Dominguez-Adame[2] 和 Talukdar 等人[3] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解和散射态解;胡嗣柱等人[4] 给出了在 Hulthén 标量势与矢量势相等的条件下 Dirac 方程的 s 波束缚态解;侯春风等人[5,6] 分别给出了在 Morse 和 Woods-Saxon 标量势与矢量势相等的条件下 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解. 本文将考虑粒子在 Pöschl-Teller 势[6] 中的相对论效应,在 Pöschl-Teller 标量势与矢量势相等的条件下,分别给出了 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解. 关于双曲函数 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解,目前正在进行之中,结果将另文发表.

2 具有 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解

文献[2]指出,具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 s 波 Klein-Gordon 方程为($\hbar=\mu=1$)

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}+[E-V(r)]^2-[M+S(r)]^2\right\}u(r)=0,$$
$$\left[R(r)=\frac{u(r)}{r}\right]. \tag{1}$$

对于 Pöschl-Teller 势[7],在标量势与矢量势相等的条件下,s 波的 Klein-Gordon 方程为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(E+M)\left[\frac{A}{\sin^2(ar)}+\frac{B}{\cos^2(ar)}\right]+(E^2-M^2)\right\}u(r)=0. \tag{2}$$

令

$$y=\sin^2(ar), \tag{3}$$

$$\alpha^2=\frac{E^2-M^2}{a^2}, \tag{4}$$

$$\beta(\beta-1)=\frac{2(E+M)A}{a^2}, \tag{5}$$

$$\gamma(\gamma-1)=\frac{2(E+M)B}{a^2}, \tag{6}$$

则方程(2)变为

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u(y)+\left(\frac{1}{2}-y\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u(y)+\frac{1}{4}\left[\alpha^2-\frac{\beta(\beta-1)}{y}-\frac{\gamma(\gamma-1)}{1-y}\right]u(y)=0. \tag{7}$$

考虑方程(7)的三个奇点($y=0,1,\infty$),可设方程(7)的解为[8]

$$u(y)\sim y^{\frac{\beta}{2}}(1-y)^{\frac{\gamma}{2}}f(y). \tag{8}$$

把(8)式代入方程(7)可得

$$y(1-y)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}f(y)+\left[\left(\beta+\frac{1}{2}\right)-y(\beta+\gamma+1)\right]\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(y)+\frac{1}{4}[\alpha^2-(\beta+\gamma)^2]f(y)=0. \tag{9}$$

方程(9)为超几何方程. 其解为[9]

$$f(y)\sim F(i,j,k,y), \tag{10}$$

其中

$$i=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma), \tag{11}$$

$$j=\frac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma), \tag{12}$$

$$k=\beta+\frac{1}{2}. \tag{13}$$

为了保证方程(9)满足边界条件,必须使得

$$i=-n,\ (n=1,2,3,\cdots) \tag{14}$$

或

$$j=-n,\ (n=1,2,3,\cdots). \tag{15}$$

考虑到波函数对于交换参数 i 和 j 是不变的,所以这两个条件给出的结果是相同的,因此本文取(15)式. 由(4)式、(5)式、(6)式、(11)式和(15)式可得

$$-2\sqrt{E^2-M^2}+\left[\sqrt{a^2+8A(E+M)}+\sqrt{a^2+8B(E+M)}\right]+a=-4an. \tag{16}$$

(16)式为 Pöschl-Teller 型 s 波束缚态满足的能谱方程,由它决定能级 E_n. 相应的波函数为(未归一化)

$$u_n(y)=y^{\frac{\beta}{2}}(1-y)^{\frac{\gamma}{2}}F(i,j,k,y), \tag{17}$$

即

$$u_n(r)=\sin^{\beta}(ar)\cos^{\gamma}(ar)F(i,j,k,\sin^2(ar)). \tag{18}$$

3 具有 Pöschl-Teller 型标量势与矢量势的 Dirac 方程的束缚态解

文献[4]指出,具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的 Dirac 方程为($\hbar=\mu=1$)

$$\{C\cdot\boldsymbol{P}+D[M+S(r)]\}\psi=[E-V(r)]\psi. \tag{19}$$

在相对论情况下,中心力场中粒子的守恒量完全集可以取为($H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z$),($H,\boldsymbol{K},\boldsymbol{J}^2,\boldsymbol{J}_z$)的共同本征函数为[10]

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j}\end{pmatrix},\text{(当 }K=j+\frac{1}{2}\text{ 时)}, \tag{20}$$

$$\psi=\frac{1}{r}\begin{pmatrix}f_{n,k}(r)\phi^B_{jm_j}\\ \mathrm{i}g_{n,k}(r)\phi^A_{jm_j}\end{pmatrix},\text{(当 }K=-\left(j+\frac{1}{2}\right)\text{ 时)}, \tag{21}$$

其中

$$\phi^A_{jm_j}=\begin{pmatrix}\sqrt{\dfrac{j+m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\dfrac{j-m_j}{2j}}Y_{j-\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix},$$

$$\phi^B_{jm_j}=\begin{pmatrix}-\sqrt{\dfrac{j-m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j-\frac{1}{2}}\\ \sqrt{\dfrac{j+m_j+1}{2j+2}}Y_{j+\frac{1}{2},m_j+\frac{1}{2}}\end{pmatrix}. \tag{22}$$

把(20)式或(21)式代入(19)式,可分离出 Dirac 方程的径向部分为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=[M+E+S(r)-V(r)]g, \tag{23}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=[M-E+S(r)+V(r)]f. \tag{24}$$

对于 Pöschl-Teller 势[7],在标量势与矢量势相等的条件下,方程(23),(24)变为

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}-\frac{K}{r}f=(M+E)g, \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+\frac{K}{r}g=\left\{(M-E)+2\left[\frac{A}{\sin^2(ar)}+\frac{B}{\cos^2(ar)}\right]\right\}f. \tag{26}$$

把(25)式代入(26)式可得

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(M+E)\left[\frac{A}{\sin^2(ar)}+\frac{B}{\cos^2(ar)}\right]+(E^2-M^2)-\frac{K(K-1)}{r}\right\}f=0, \tag{27}$$

对于 s 波,即 $K=1$. 方程(27)变为

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}-2(M+E)\left[\frac{A}{\sin^2(ar)}+\frac{B}{\cos^2(ar)}\right]+(E^2-M^2)\right\}f=0. \tag{28}$$

方程(28)与方程(2)完全类似,于是立即可得束缚态的能谱方程 $E_{n,1}$ 所满足的方程是

$$-2\sqrt{E^2_{n,1}-M^2}+\left[\sqrt{a^2+8A(E_{n,1}+M)}+\sqrt{a^2+8B(E_{n,1}+M)}\right]+a=-4an, \tag{29}$$

与 $E_{n,1}$ 相对应的 f 分量的径向波函数为(未归一化)

$$f_{n,1}(r)=\sin^{\beta}(ar)\cos^{\gamma}(ar)F(i,j,k,\sin^2(ar)). \tag{30}$$

把(30)式代入(25)式可得

$$g_{n,1}(r)=\frac{1}{(M+E_{n,1})}\cdot\left\{\alpha\beta\sin^{\beta-1}(ar)\cos^{\gamma+1}(ar)F(i,j,k,\sin^2(ar))-a\gamma\sin^{\beta+1}(ar)\cos^{\gamma-1}(ar)F(i,j,k,\sin^2(ar))\right.$$

$$+2a\frac{i\cdot j}{k}\sin^{\beta+1}(ar)\cos^{\gamma+1}(ar)F(i+1,j+1,$$
$$k+1,\sin^2(ar))-\frac{1}{r}\sin^{\beta}(ar)\cos^{\gamma}(ar)$$
$$\cdot F(i,j,k,\sin^2(ar))\Big\}, \tag{31}$$

把 $f_{n,1}(r)$ 和 $g_{n,1}(r)$ 代入(20)式，可给出 Dirac 方程的 s 波旋量波函数.

4　结　　论

综上所述，具有相等的标量与矢量 Pöschl-Teller 型势函数的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解可以严格地求出，即在与通常非相对论量子力学的双原子分子问题中处理 Pöschl-Teller 势相同的近似下可以得到方程的解. 这时的 s 波 Dirac 方程的 f 分量满足的方程与 Klein-Gordon 方程非常相似，其解可用同样的方法求得，从而可求出 s 波 Dirac 方程的 g 分量，由此可得出 Dirac 方程的 s 波束缚态旋量波函数.

[1] I. C. Wang, C. Y. Wong, *Phys. Rev.*, **D38**(1988), 348.

[2] F. Dominguez-Adame, *Phys. Lett.*, **A136**(1989), 175.

[3] B. Talukdar, A. Yunus, M. R. Amin, *Phys. Lett.*, **A141**(1989), 326.

[4] Si-zhu Hu, Ru-keng Su, *Acta Physica Sinica*, **40**(1991), 1201(in Chinese)[胡嗣柱、苏汝铿，物理学报，40(1991)，1201].

[5] Chun-feng Hou, Yan Li, Zhong-xiang Zhou, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 1999(in Chinese)[侯春风、李焱、周忠祥，物理学报，48(1999)，1999].

[6] Chun-feng Hou, Zhong-xiang Zhou, *Chinese Physics*, **8**(1999), 561.

[7] G. Pöschl, E. Teller, *Zs. Phys.*, **83**(1933), 143.

[8] S. Flügge, Practical Quantum Mechanics, Vol. I(Springer-Verlag, Berlin, 1974).

[9] Zhu-xi Wang, Dun-ren Guo, Introdution To Special Function(Peking University Press, Beijing, 2000)(in Chinese)[王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论(北京大学出版社，北京，2000)].

[10] Jin-yan Zeng, Quantum Mechanics, Vol II, 2nd(Science Press, Beijing, 1997)(in Chinese)[曾谨言，量子力学，卷 II，第二版(科学出版社，北京，1997)].

BOUND STATES OF KLEIN-GORDON EQUATION AND DIRAC EQUATION FOR SCALAR AND VECTOR PÖSCHL-TELLER-TYPE POTENTIALS

CHEN GANG

(*Department of Physics*, *Shaoxing College of Arts and Sciences*, *Shaoxing*　312000, *China*)

(Received 21 March 2001; revised manuscript received 23 April 2001)

ABSTRACT

The s-wave bound states of Klein-Gordon equation and Dirac equation with scalar and vector Pöschl-Teller-type potentials are obtained.

Keywords: Pöschl-Teller potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound states

PACC: 0365