第 50 卷 第 9 期 2001 年 9 月
1000-3290/2001/50(09)/1654-07
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.50, No.9, September, 2001

量子动边界广义含时谐振子之精确的指数-正弦型演化态

李伯臧[1)] 李 玲[1)2)]

[1)] (中国科学院物理研究所和凝聚态物理中心,北京 100080)

[2)] (山西大学物理系和理论物理研究所,太原 030006)

(2001 年 4 月 9 日收到;2001 年 4 月 30 日收到修改稿)

研究了被局限于区间$[0,L(t)]$中运动的动边界广义含时谐振子量子系统,其 Hamiltonian 为坐标与动量的非齐次含时二次型. 求出了具有'指数-正弦型'演化态的充要条件以及相应的正交归一完备的精确演化态系列. 此结果不但几乎包含了已有结果作为特例,还涵盖了相当广泛的范围. 此外,澄清了个别作者关于对时间的微商的一个误解,指出对时-空坐标的微商均具有寻常的含义.

关键词:动边界量子系统,广义含时谐振子,演化态,精确解

PACC:0365,0290

1 引 言

以 x 和 t 分别表示空间坐标和时间,考虑一维动边界量子系统:单个无自旋粒子在两个不可穿透的壁之间做量子运动:左壁固定于 $x=0$ 处,右壁位置则按 $x=L(t)>0$ 变化.

为解释宇宙线粒子之所以能具有甚高能量,Fermi[1] 于 1949 年提出了一个经典力学的动边界模型,文献上称之为 Fermi 加速器. 受此启发,Doescher 和 Rice[2] 于 1969 年首先研究了一维动边界无自旋的自由粒子量子系统,引起人们的极大兴趣,后续工作源源不断.

量子力学的重要任务之一是精确地求解含时 Schrödinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi,\quad x\in[0,L(t)],\tag{1}$$

其中 $\hat{H}$为系统的 Hamiltonian. 严格的演化态 ψ 一般是难于求得的,何况现在还要受到动边界边条件

$$\psi(0,t)=\psi(L(t),t)=0\tag{2}$$

的限制. 但为了弄清当边界做迅速变化时量子态的演化,严格求解方程(1)和(2)是必要的. 例如,对于区间$[0,L(t)]$的突然收缩,突变近似[3] 不再适用[4]. 当然,精确解的意义不仅限于此.

Doescher 和 Rice[2] 求得了自由粒子,其 Hamiltonian 为

$$\hat{H}=\hat{H}_1\equiv\frac{\hat{p}^2}{2M}=-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{\partial^2}{\partial x^2},\tag{3}$$

当动壁做匀速运动即

$$\dot{L}=\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{const.}\tag{4}$$

时的演化态:

$$\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L}}\exp\left[\frac{\mathrm{i}M}{2\hbar}\frac{\dot{L}}{L}x^2-\frac{\mathrm{i}\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{L^2(s)}\right]\cdot\sin\frac{n\pi x}{L},\quad n=1,2,\cdots,\tag{5}$$

此处 $M=\mathrm{const.}$ 为粒子质量,$\hat{p}=-\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x}$为动量算符. 这些演化态在任何时刻 t 均构成正交归一完备系:

$$\langle\psi_n(t)|\psi_{n'}(t)\rangle\equiv\int_0^L\psi_n^*(x,t)\psi_n(x,t)\mathrm{d}x=\delta_{nn'};\tag{6}$$

$$\sum_n|\psi_n(t)\rangle\langle\psi_n(t)|=1,\ i.e.,$$
$$\sum_n\psi_n^*(x,t)\psi_n(x',t)=\delta(x-x'),\tag{7}$$

式中$|\psi_n(t)\rangle$是 Schrödinger 绘景波函数 $\psi_n(x,t)$的 Dirac 符号,$\delta(\cdot)$为 δ-函数. 上述精确解也被 Munier 等[5] 重复得出,并在量子 Fermi 加速器和量子混沌[6,7] 的研究中得到应用. Makowski 等[8,9] 也求出了

$$L^3\ddot{L}\equiv L^3(t)\frac{\mathrm{d}^2L(t)}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{const.}\tag{8}$$

时的精确解.(4)式是上式的特例.

Makowski 等[8,9]还证明,无论 $L(t)(>0)$做何种变化,当

$$\hat{H} = \hat{H}_2 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}x^2 ; \tag{9}$$

$$\Omega^2 = \Omega^2(t) = -\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)} \tag{10}$$

时,(5)式的 ψ_n 仍是精确的演化态. 注意(3)式是(9)式当 $\Omega=0$ 时的特例.

若不计粒子运动范围的有限性与可变性,(9)式((3)式是其特例)所描述的粒子可被视为变频谐振子[10,11]. 本文对此进行推广,考虑动边界广义含时谐振子,其 Hamiltonian 为

$$\begin{aligned}\hat{H} &= -\frac{A_1(t)}{\hbar^2}\hat{p}^2 + A_2(t)x^2 - \frac{B(t)}{\hbar}(x\hat{p} + \hat{p}x) \\ &\quad - \frac{C_1(t)}{\hbar}\hat{p} + C_2(t)x \\ &= A_1\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathrm{i}(2Bx + C_1)\frac{\partial}{\partial x} \\ &\quad + A_2x^2 + C_2x + \mathrm{i}B,\end{aligned} \tag{11}$$

其中 $A_j = A_j(t)$,$B = B(t)$和 $C_j = C_j(t)$均是 t 的实函数($j=1,2$);组合形式 $x\hat{p}+\hat{p}x$ 的出现是为了保证 $\hat{H}$ 在任何时刻 t 都具有厄米性. 应当指出,以前所讨论的(一维)广义谐振子[12,13]的运动范围是无限的($x\in(-\infty,\infty)$),而现在是有限的和可变的($x\in[0,L(t)]$).

动边界广义含时谐振子的精确演化态,一般也是很难求出的. 因此,我们把目标降低,限于求类似于(5)式的演化态:

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L}}\exp\left[\mathrm{i}(U_nx^2 + V_nx + W_n)\right]\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{12}$$

并称之为"指数-正弦型"演化态,它们显然满足边条件(2)式. 这里 $U_n = U_n(t)$,$V_n = V_n(t)$和 $W_n = W_n(t)$仅是 t 的函数(为保证 ψ_n 被归一化,它们必须是实函数),而 n 为正整数. 换言之,本文的目的,是求出以(12)式的 ψ_n 为演化态时,(11)式的 Hamiltonian 应满足的充要条件,并同时确定 t 的函数 U_n,V_n 和 W_n.

本文给出关于对时-空坐标的微商的正确理解;给出结论及一些特例;以及结论的证明和讨论.

顺便指出,另一类动边界问题,即粒子被限制在半无限动边界区间$[L(t),\infty)$中运动的问题[14,15],也是很有趣和很有意义的,不过本文暂不拟涉及.

2　关于对空-时坐标的微商问题

本文所讨论的 Schrödinger 绘景的波函数 $\psi(x,t)$是空-时坐标的复值函数,按量子力学的要求,在任何固定时刻 t,它在区间$[0,L(t)]$上应是平方可积的,此外,当然还应满足边条件(2)式. 如果假定 $A_j(t)$,$B(t)$和 $C_j(t)$是 t 的光滑函数(本文恒做这种假定),则还可对 $\psi(x,t)$赋予下述性质:在 $x-t$ 平面上的区域

$$D = \{(x,t):0\leqslant x\leqslant L(t),\ t\in(-\infty,\infty)\} \tag{13}$$

的内部(开核 $\mathring{D}$),$\psi(x,t)$对 x 和 t 分别是二次和一次连续可微的. 我们将给定时刻 t 的这样的波函数集合记为 $G(t)$,按(6)式中的第一个等号那样引入内积后,$G(t)$成为一个 Hilbert 空间. 波函数$\psi(x,t)$的定义域即是 D.

Pereshogin 和 Pronin[16]指出,由于 $G(t)$和 $G(t+\Delta t)$是不同的,所以不能按寻常定义,即不能按

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\psi(x,t+\Delta t)-\psi(x,t)}{\Delta t} \tag{14}$$

来理解对 t 的微商,而应当用

$$\nabla_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{L}}{2L}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}x\right) \tag{15}$$

来代替(1)式左端的$\frac{\partial}{\partial t}$.

但是,第一,即使承认(14)式不再适用,对于以∇_t来代替$\frac{\partial}{\partial t}$这一点,文献[16]虽然声称可据量子力学几何理论来导出,却并未给出充分的论证;第二,在(15)式右端仍含有$\frac{\partial}{\partial t}$,是否还应代之以$\nabla_t$呢?若否,则文献[16]的建议在逻辑上就不自洽;若是,则这种替代手续将无穷无尽,实际上无法操作. 因此,自文献[16]发表以来,除个别作者[17]外,该建议甚少被人采纳. 对此,本文在第 5 节中还要做讨论.

事实上,因为只涉及 $\Delta t\to 0$ 的情形,所以在 D 的内部$\mathring{D}$,(14)式是确切的,而在 D 的边界 ∂D 上(包括 $x=L(t)$情形),我们可按惯常做法,即按

$$\left[\frac{\partial^{m+n}\psi(x,t)}{\partial x^m\partial t^n}\right]_{(x,t)=(X,T)} = \lim_{\substack{(x,t)\in\mathring{D}\\ x\to X,t\to T}}\frac{\partial^{m+n}\psi(x,t)}{\partial x^m\partial t^n},\quad (X,T)\in\partial D \tag{16}$$

来理解$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial t^n}$. 上式右端极限号下的微商,因只涉及$(x,t)\in\mathring{D}$,故可类似于(14)式那样来寻常地定

义,而 $m=0,1,2$;$n=0,1$. 总之,我们可按寻常规则来相对于 x 和 t 做微商运算,这也是迄今绝大多数作者所采用的做法,本文亦采用它.

3 结论和特例

为使行文简洁,先陈述本文的结论及一些特例,结论的证明则在下节做.

本文的结论如下:

1) 若

$$A_1(t)\neq 0, \tag{17a}$$

则当且仅当

$$A_1(t)\dot{C}_1(t)-\dot{A}_1(t)C_1(t) = \frac{2}{\hbar}A_1(t)[A_1(t)C_2(t)+B(t)C_1(t)] \tag{17b}$$

和

$$A_1(t)\dot{B}(t)-\dot{A}_1(t)\Big[B(t)+\frac{\hbar}{2}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}\Big] = \frac{2}{\hbar}A_1(t)\Big[A_1(t)A_2(t)+B^2(t)-\frac{\hbar^2}{4}\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)}\Big] \tag{17c}$$

被同时满足时,以(11)式描述的动边界广义含时谐振子具有下列正交归一完备的演化态系列 $\{\psi_n(x,t):n=1,2\cdots\}$:

$$\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t\Big[\frac{C_1^2(s)}{4A_1(s)}-\frac{n^2\pi^2A_1(s)}{L^2(s)}\Big]\mathrm{d}s\Big\}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{2A_1(t)}\cdot\Big[\Big(B(t)+\frac{\hbar\dot{L}(t)}{2L(t)}\Big)x^2+C_1(t)x\Big]\Big\}\cdot\sin\frac{n\pi x}{L(t)}. \tag{18}$$

2) 若

$$A_1(t)=0, \tag{19a}$$

则当且仅当

$$B(t)=-\frac{\hbar}{2}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \tag{19b}$$

和

$$C_1(t)=0 \tag{19c}$$

被同时满足时,有正交归一完备的演化态系列 $\{\psi_n(x,t):n=1,2,\cdots\}$:

$$\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\Big\{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\Big[\frac{x^2}{L^2(t)}\int_0^tL^2(s)A_2(s)\mathrm{d}s+\frac{x}{L(t)}\int_0^tL(s)C_2(s)\mathrm{d}s\Big]\Big\}\sin\frac{n\pi x}{L(t)}. \tag{20}$$

下面给出几个特例.

1. 恒质量情形,即

$$A_1(t)=-\frac{\hbar^2}{2M},\ M=\mathrm{const.}\neq 0\ \text{or}\ \pm\infty \tag{21}$$

的情形,但并不限定 $M>0$.

特例1 当 $A_2=0$,$B=0$,$C_1=0$,$C_2=0$,从而 $\hat{H}=\hat{H}_1$(见(3)式)时,条件(17b)和(17c)化为(4)式,而(18)式化为(5)式. 以上结果同于 Doescher 和 Rice[2] 的结果.

特例2 当 $B=0$,$C_1=0$ 和 $C_2=0$ 时,由条件(17b)和(17c)得

$$A_2(t)=-\frac{M}{2}\frac{\ddot{L}(t)}{L(t)}, \tag{22}$$

从而 $\hat{H}=\hat{H}_2$(见(9)式),此时(18)式亦化为(5)式,正如 Makowski 等[8,9] 所得到的那样.

特例3 当 $A_2=0$,$C_1=0$ 和 $C_2=0$ 时,由(17b)和(17c)式得到 Riccati 方程

$$\dot{B}(t)-\frac{2}{\hbar}B^2(t)+\frac{\hbar\ddot{L}(t)}{2L(t)}=0, \tag{23}$$

它有特解

$$B(t)=-\frac{\hbar\dot{L}(t)}{2L(t)}. \tag{24}$$

与此相应,有

$$\hat{H}=\hat{H}_3\equiv\frac{\hat{p}^2}{2M}+\frac{\dot{L}(t)}{2L(t)}(x\hat{p}+\hat{p}x), \tag{25}$$

而(18)式化为

$$\psi_n(x,t)=\sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{L^2(s)}\Big]\cdot\sin\frac{n\pi x}{L(t)}. \tag{26}$$

顺便指出,$\hat{H}_3$ 是 $\hat{H}_2$ 的含时幺正变换. 事实上,令

$$\hat{R}=\exp\Big[-\frac{\mathrm{i}M}{2\hbar}\frac{\dot{L}(t)}{L(t)}x^2\Big], \tag{27}$$

则有

$$\hat{H}_3=\hat{R}\hat{H}_2\hat{R}^+-\mathrm{i}\hbar\hat{R}\frac{\partial\hat{R}^+}{\partial t}, \tag{28}$$

从而(26)式中的 $\psi_n(x,t)$ 是 $\hat{R}$ 作用于(5)式的结果.

方程(23)式之通解为

$$B(t)=b(t)\equiv-\frac{\hbar\dot{L}(t)}{2L(t)}+\frac{L^2(0)}{L^2(t)}\cdot\Big[b_0-\frac{2L^2(0)}{\hbar}\int_0^t\frac{\mathrm{d}s}{L^2(s)}\Big]^{-1}, \tag{29}$$

式中 b_0 为任意实常数. 因此与

$$\hat{H} = \hat{H}'_3 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2M} + \frac{b(t)}{\hbar}(x\hat{p} + \hat{p}x) \tag{30}$$

相对应,(18)式化为

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\left[-\frac{i\hbar n^2\pi^2}{2M}\int_0^t \frac{ds}{L^2(s)}\right] \cdot \exp\left\{\frac{iM}{\hbar^2}\left[b(t) + \frac{\hbar\dot{L}(t)}{2L(t)}\right]x^2\right\}\sin\frac{n\pi x}{L(t)}. \tag{31}$$

令 $|b_0| \to \infty$,则(29),(30)和(31)式就分别化为(24),(25)和(26)式.

2. 变质量情形,即

$$A_1(t) = -\frac{\hbar^2}{2M(t)},\ 0 < |M(t)| < \infty, \tag{32}$$

而 $M(t)$ 可随 t 变化的情形.

特例 4　当 $A_2 = 0, B = 0, C_1 = 0, C_2 = 0$ 时,条件(17b)和(17c)化为

$$M(t) = M(0)\frac{\dot{L}(0)}{\dot{L}(t)}, \tag{33}$$

因此对应于

$$\hat{H} = \hat{H}_4 \equiv \frac{\dot{L}(t)}{2M(0)\dot{L}(0)}\hat{p}^2, \tag{34}$$

(18)式化为

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\left[-\frac{i\hbar n^2\pi^2}{2M(0)\dot{L}(0)}\frac{L(t) - L(0)}{L(0)L(t)}\right] \cdot \exp\left[\frac{iM(0)\dot{L}(0)}{2\hbar L(t)}x^2\right]\sin\frac{n\pi x}{L(t)}, \tag{35}$$

此处 $\dot{L}^2(t) = |\dot{L}(t)|^2$.

特例 5　当 $A_2 = 0, C_1 = 0$ 和 $C_2 = 0$ 时,条件(17b)和(17c)化为

$$\dot{M}\left(B + \frac{\hbar\dot{L}}{2L}\right) + M\left(\dot{B} - \frac{2B^2}{\hbar} + \frac{\hbar\ddot{L}}{2L}\right) = 0, \tag{36}$$

积分之,有

$$M(t) = M(0)\exp\left[-\int_0^t \{[\dot{B}(s) - 2B^2(s)/\hbar + \hbar\ddot{L}(s)/2L(s)]/[B(s) + \hbar\dot{L}(s)/2L(s)]\}ds\right]. \tag{37}$$

因此,Hamiltonian 为

$$\hat{H} = \hat{H}_5 \equiv \frac{\hat{p}^2}{2M(t)} - \frac{B(t)}{\hbar}(x\hat{p} + \hat{p}x) \tag{38}$$

的系统,有演化态

$$\psi_n(x,t) = \sqrt{\frac{2}{L(t)}}\exp\left[-\frac{i\hbar n^2\pi^2}{2}\int_0^t \frac{ds}{M(s)L^2(s)}\right] \cdot \exp\left\{\frac{iM(t)}{\hbar^2}\left[B(t) + \frac{\hbar\dot{L}(t)}{2L(t)}\right]x^2\right\} \cdot \sin\frac{n\pi x}{L(t)}, \tag{39}$$

其中 $M(t)$ 和 $B(t)$ 满足关系(37)式.

3. 无穷大质量,即

$$A_1(t) = 0 \tag{40}$$

的情形. 对 A_1 若采用(21)或(32)式的表述,则(40)式的确相当于 $|M| = \infty$ 的情形.

这时,条件(19b)和(19c)已经非常具体,不再举出特例.

应当指出,除特例 1 和 2 外,据我们所知,其他特例尚未见报道. 此外,我们还可举出许多新的特例来. 这说明,前述结果 1)与 2)是有相当的普遍意义的.

4　结论的证明

将(11)和(12)式代入(1)式,经过运算后,可直接得到上节的充要条件(17)和(19)式,并得到 U_n, V_n 和 W_n,从而(18)和(20)式.

本节采用稍微不同的做法,即先把问题变换成固定边界问题,求解后再变换回来. 这样做,相对于将(11)和(12)代入(1)式的直接证法,不会增加太多的工作量,却便于加深对第 2 节中的论述的理解(详见第 5 节). 为此引入新的空间坐标[18]

$$\xi = \frac{x}{L(t)}, \tag{41}$$

由此可见 ξ 是无量纲变量,并在固定区间 $[0,1]$ 中取值. 此外,为使内积不变,做如下的波函数变换:

$$\phi(\xi,t) = \sqrt{L}\psi(x,t) = \sqrt{L}\psi(L\xi,t), \tag{42}$$

的确,若 $\phi_j(\xi,t) = \sqrt{L}\psi_j(x,t), j = 1,2$,便有

$$\langle\phi_1(t)|\phi_2(t)\rangle_\xi = \langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_x, \tag{43}$$

此处

$$\langle\phi_1(t)|\phi_2(t)\rangle_\xi = \int_0^1 \phi_1^*(\xi,t)\phi_2(\xi,t)d\xi,$$
$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_x = \int_0^L \psi_1^*(x,t)\psi_2(x,t)dx. \tag{44}$$

因此,当由 (x,t) 表象变换到 (ξ,t) 表象时,须做如下变换:

$$x \to L\xi,\quad \frac{\partial}{\partial x} \to \frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial\xi}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{L}}{L}\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dot{L}}{2L}\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi}\xi\right). \tag{46}$$

(46)式与文献[18]中的相应变换式略有差异，其原因在于本文是以 $\phi(\xi,t) = \sqrt{L(t)}\,\psi(L\xi,t)$（而不是以$\psi(L\xi,t)$）来代替 $\psi(x,t)$.

这样，方程(1)与(2)就分别变成

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\partial \phi(\xi,t)}{\partial t} = \hat{h}\phi(\xi,t), \quad \xi \in [0,1], \tag{47}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t) = 0. \tag{48}$$

此处 $\hat{h}$ 是(11)式 Hamiltonian 的(ξ,t)表象：

$$\hat{h} = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \mathrm{i}(2\beta\xi + \gamma_1)\frac{\partial}{\partial \xi} + \alpha_2 \xi^2 + \gamma_2 \xi + \mathrm{i}\beta, \tag{49}$$

而 α_j，β 和 γ_j $(j=1,2)$ 均为 t 的实函数：

$$\alpha_1 = \frac{A_1}{L^2}, \quad \alpha_2 = L^2 A_2, \quad \gamma_1 = \frac{C_1}{L},$$

$$\gamma_2 = LC_2, \quad \beta = B + \frac{\hbar \dot{L}}{2L}. \tag{50}$$

相应地，(12)式的(ξ,t)表象为

$$\phi_n(\xi,t) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u_n\xi^2 + v_n\xi + w_n)}\sin(n\pi\xi), \tag{51}$$

其中

$$u_n = L^2 U_n, \quad v_n = LV_n, \quad w_n = W_n \tag{52}$$

也都是 t 的实函数.

将(49)和(51)式代入方程(47)（注意方程(48)被自动满足），得到

$$\begin{aligned} 0 = {} & [\hbar\dot{w}_n - n^2\pi^2\alpha_1 - v_n(v_n\alpha_1 + \gamma_1) + \mathrm{i}(2u_n\alpha_1 \\ & + \beta)]\sin(n\pi\xi) + \mathrm{i}n\pi(2v_n\alpha_1 + \gamma_1)\cos(n\pi\xi) \\ & + \mathrm{i}2n\pi(2u_n\alpha_1 + \beta)\xi\cos(n\pi\xi) + (\hbar\dot{u}_n - 4u_n^2\alpha_1 \\ & - 4u_n\beta + \alpha_2)\xi^2\sin(n\pi\xi) + (\hbar\dot{v}_n - 4u_nv_n\alpha_1 \\ & - 2u_n\gamma_1 - 2v_n\beta + \gamma_2)\xi\sin(n\pi\xi). \end{aligned} \tag{53}$$

因为 $\{\sin(n\pi\xi), \xi\sin(n\pi\xi), \xi^2\sin(n\pi\xi), \cos(n\pi\xi), \xi\cos(n\pi\xi)\}$ 是一个线性无关的函数组，于是知方程(53)有解（从而方程(47)和(48)具有形如(51)式的“指数-正弦型”的解）的充要条件为(53)式中各项系数均等于 0，即

$$\begin{gathered} 2u_n\alpha_1 + \beta = 0, \\ 2v_n\alpha_1 + \gamma_1 = 0, \\ \hbar\dot{u}_n - 4u_n^2\alpha_1 - 4u_n\beta + \alpha_2 = 0, \\ \hbar\dot{v}_n - 4u_nv_n\alpha_1 - 2u_n\gamma_1 - 2v_n\beta + \gamma_2 = 0, \\ \hbar\dot{w}_n - n^2\pi^2\alpha_1 - v_n(v_n\alpha_1 + \gamma_1) + \mathrm{i}(2u_n\alpha_1 + \beta) = 0. \end{gathered} \tag{54}$$

上述结果可以分两种情况来具体化：

i. 当

$$\alpha_1 \neq 0 \tag{55a}$$

时，有

$$u_n = -\frac{\beta}{2\alpha_1}, \quad v_n = -\frac{\gamma_1}{2\alpha_1},$$

$$w_n = \frac{1}{\hbar}\int_0^t \left[n^2\pi^2\alpha_1(s) - \frac{\gamma_1^2(s)}{4\alpha_1(s)}\right]\mathrm{d}s, \tag{56}$$

以及

$$\alpha_1\dot{\gamma}_1 - \dot{\alpha}_1\gamma_1 = \frac{2}{\hbar}\alpha_1(\alpha_1\gamma_2 + \beta\gamma_1), \tag{55b}$$

$$\alpha_1\dot{\beta} - \dot{\alpha}_1\beta = \frac{2}{\hbar}\alpha_1(\alpha_1\alpha_2 + \beta^2). \tag{55c}$$

ii. 当

$$\alpha_1 = 0 \tag{57a}$$

时，有

$$u_n = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t \alpha_2(s)\mathrm{d}s, \quad v_n = -\frac{1}{\hbar}\int_0^t \gamma_2(s)\mathrm{d}s,$$

$$w_n = 0, \tag{58}$$

以及

$$\beta = 0, \tag{57b}$$

$$\gamma_1 = 0. \tag{57c}$$

注意在 i 和 ii 中，u_n 和 v_n（从而(12)式中的 U_n 和 V_n）均与脚标 n 无关. 另外，(58)式中的 $w_n = 0$ 也可写为 $w_n = \text{const.}$，但不失一般性可置此常数为 0.

据(41)和(50)—(52)式将上述结果变回(x,t)表象，则(55a—c)式分别化成(17a—c)式，(56)式化成(18)式，(57a—c)式分别化成(19a—c)式，而(58)化成(20)式.

上节的结论 1)与 2)证完.

5 总结和讨论

本文研究了局限于动壁区间$[0,L(t)]$中的一维广义含时谐振子系统，其 Hamiltonian 由(11)式描述. 我们求出了具有(12)式形式的“指数-正弦型”演化态的充要条件，即(17a)—(17c)式和(19a)—(19c)式，以及相应的精确演化态的正交归一完备集合，即(18)和(20)式. 此完备性表示演化态已被求尽，因为其他演化态可用此集合中的元来做常系数展开.

在得出上述结论之先，我们还给出了关于对时-空坐标的微商的正确理解，指出它们具有寻常的含义，文献[16]的观点是错误的. 其实文献[16]关于

$\frac{\partial}{\partial t}$的代换(见(15)式)与文献[18]变换到固定边界时的代换((46)式)相似,但后者的空间坐标是约化变量 ξ,且等式右端第二项前的符号为负.

为更好地看清此点,我们采用含时正则变换[6,19]来代替上节的$(x,t)\to(\xi,t)$变换[18].为此定义幺正算符

$$\hat{S}=\exp\left[\mathrm{i}\frac{\ln L}{2\hbar}(x\hat{p}+\hat{p}x)\right]$$

$$=\sqrt{L(t)}\exp\left[(\ln L)x\frac{\partial}{\partial x}\right].\tag{59}$$

易见有

$$\hat{S}x\hat{S}^{+}=Lx,\ \hat{S}\hat{p}\hat{S}^{+}=\frac{1}{L}\hat{p}\left(i.e.,\hat{S}\frac{\partial}{\partial x}\hat{S}^{+}=\frac{1}{L}\frac{\partial}{\partial x}\right),\tag{60}$$

$$\hat{S}\frac{\partial}{\partial t}\hat{S}^{+}=\frac{\partial}{\partial t}-\mathrm{i}\frac{\dot{L}}{2\hbar L}(x\hat{p}+\hat{p}x)$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\dot{L}}{2L}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+x\frac{\partial}{\partial x}\right),\tag{61}$$

$$\hat{S}\psi(x,t)=\sqrt{L}\psi(Lx,t).\tag{62}$$

由(60)和(62)式可见,正则变换后的 x(等式右端的)在区间[0,1]中取值,与上节的 ξ 有相同意义.(61)式表明:$\frac{\partial}{\partial t}$被正则变换后,除等式右端第二项前的符号不同外,与文献[16]的∇_t几乎相同.文献[16]中的错误是否出于其作者对文献[18]的误解呢?

顺便指出,若将(62)式中的 $\hat{S}\psi(x,t)$ 写成 $\phi(x,t)$:

$$\phi(x,t)=\hat{S}\psi(x,t)=\sqrt{L(t)}\psi(L(t)x,t),\tag{63}$$

并以 $\hat{S}$作用于含时 Schrödinger 方程(1)之两端,则有

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}=\hat{h}\phi(x,t),\tag{64}$$

相应的边条件为

$$\phi(0,t)=\phi(1,t)=0.\tag{65}$$

此处

$$\hat{h}=\hat{S}\hat{H}\hat{S}^{+}-\mathrm{i}\hbar\hat{S}\frac{\partial\hat{S}^{+}}{\partial t}.\tag{66}$$

以(11)式的广义含时谐振子的 Hamiltonian 代入上式,得

$$\hat{h}=\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\mathrm{i}(2\beta x+\gamma_1)\frac{\partial}{\partial x}+\alpha_2x^2+\gamma_2x+\mathrm{i}\beta.\tag{67}$$

前面已经说过,这里的 x 与上节的ξ 有同样的意义,故(63),(64),(65)和(67)式分别与(42),(47),(48)和(49)式相同.

虽然我们所求得的精确演化态尚非一维动边界广义含时谐振子的普遍解,但从所举特例可以看到,我们的结果仍有一定的普遍性,它不但几乎包含了文献[2,5,9,10]等所给出的结果,还涵盖了许多新的情况.

我们所研究的动壁系统仅是一维的,而且只有一个壁可以变动.其他动壁系统,如粒子在半无限区间$[L(t),\infty]$中运动的一维系统[14,15],双动壁一维系统($x\in[L_1(t),L_2(t)]$),以及三维动壁系统(例如文献[20]所涉及的),也是值得研究的.尤其后者,当更具实际意义.

梁九卿和阎凤利二教授与作者们进行过有益的讨论,谨志谢忱于此.

[1] E. Fermi, *Phys. Rev.*, **75**(1949), 1169.

[2] S. W. Doescher, M. H. Rice, *Am. J. Phys.*, **37** (1969), 1246.

[3] A. Messiah, *Quantum Mechanics*, Vol. Ⅱ (Trans. J. Potter), (North-Holland Pub., Amsterdam, 1961), p.739.

[4] D. N. Pinder, *Am. J. Phys.*, **58**(1990), 54.

[5] A. Munier, J. R. Burgan, M. Feix and E. Fijalkow, *J. Math. Phys.*, **22**(1981), 1219.

[6] P. Seba, *Phys. Rev.*, **A41**(1990), 2306.

[7] C. Scheininger, M. Kleber, *Physica D*, **50**(1991), 391.

[8] A. J. Makowski, S. T. Dembinski, *Phys. Lett.*, **A154** (1991), 217.

[9] A. J. Makowski, P. Peplowski, *Phys. Lett.*, **A163** (1992), 143.

[10] H. R. Lewis, Jr., *Phys. Rev.*, **172** (1968), 1313.

[11] H. R. Lewis, Jr., W. B. Riesenfeld, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 1458.

[12] C. C. Gerry, *Phys. Rev.*, **A39** (1989), 3204.

[13] L. F. Dang, *Acta Phys. Sin.*, **47** (1998), 1071 (in Chinese) [党兰芬,物理学报,**47**(1998),1071].

[14] A. J. Makowski, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **25** (1992), 3419.

[15] A. S. Fokas, B. Pelloni, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 4785.

[16] P. Pereshogin, P. Pronin, *Phys. Lett.*, **A156** (1991), 12.

[17] D. Y. Liu, *Acta Phys. Sin.*, **47** (1998), 1233 (in Chinese) [刘登云,物理学报,**47**(1998),1233].

[18] D. M. Greenberger, *Physica B*, **151** (1988), 374.
[19] A. Mostafazadeh, *J. Math. Phys.*, **32**(1999), 8325.
[20] W. Schlitt, C. Stutz, *Am. J. Phys.*, **38** (1970), 70.
[21] J. D. Lejarreta, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32** (1999), 4749.
[22] J. M. Cerero, J. D. Lejarreta, *Europhys. Lett.*, **45**(1999), 6.
[23] L. Li, B. Z. Li, J. Q. Liang, *Acta Phys. Sin.*, to appear (in Chinese) [李 玲、李伯臧、梁九卿,物理学报,将发表].

RIGOROUS EVOLVING STATES OF EXP-SIN TYPE FOR THE GENERALIZED TIME-DEPENDENT QUANTUM OSCILLATOR WITH A MOVING BOUNDARY

LI BO-ZANG[1)] LI LING[1)2)]
[1)] (*Institute of Physics and Center for Condensed Matter Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing* 100080, *China*)
[2)] (*Department of Physics and Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan* 030006, *China*)
(Received 9 April 2001; revised manuscript received 30 April 2001)

ABSTRACT

In this paper the generalized time-dependent quantum oscillator with a moving boundary is studied. Its Hamiltonian is of the non-homogeneous quadratic form of space-coordinate and momentum with time-dependent coefficients. We obtain an orthonormalized and complete set of rigorous evolving states of Exp-Sin type, as well as the necessary and sufficient condition for the existence of states of this type. Our results are of considerable generality, including as particular cases almost all the results given in literature. In addition, a misunderstanding of a few authors on the differential with respect to time is clarified and we point out that the differentiation with respect to either time or space-coordinate can be performed in the ordinary sense.

Keywords: quantum system with moving boundary, generalized time-dependent oscillator, evolving states, rigorous solutions
PACC: 0365, 0290