

# 量子能谱中的长程关联\*

宋建军<sup>2)</sup> 李希国<sup>1)2)</sup>

<sup>1)</sup> 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论研究中心, 兰州 730000)

<sup>2)</sup> 中国科学院近代物理研究所, 兰州 730000)

(2001 年 3 月 25 日收到, 2001 年 4 月 28 日收到修改稿)

从可积系统求迹公式出发, 运用 Einstein-Brillouin-Keller (EBK) 量子化条件, 导出了二维无关联振子系统周期轨道作用量量子化条件, 由此发现了量子能级与周期轨道之间的对应关系. 这种对应关系表明, 如果两条能级对应的周期轨道的拓扑相同, 这两条能级对回归函数的贡献相干. 回归谱中的一个峰是量子能谱中一组与具有相同拓扑的周期轨道相对应的能级之间相干的结果. 这一组能级间存在着长程关联.

关键词: 长程关联, 量子经典对应, 半经典量子化, 求迹公式

PACC: 0365S

## 1 引 言

近年来人们广泛应用量子能谱 Fourier 变换后得到的回归谱研究量子经典对应. 回归谱在周期轨道对应的作用量处呈现峰, 一方面, 在半经典的周期轨道理论框架下<sup>[1,2]</sup>, 每一个峰的出现都可以用周期轨道来解释; 另一方面, 量子理论指出, 每一个峰都是无数量子能级相干的结果, 无数能级相干成峰显示量子能谱中存在着长程关联. 量子 and 半经典理论的不同解释显示了量子能级间存在的长程关联与周期轨道的拓扑性质紧密相关<sup>[3]</sup>. 最近, Main 等人发展的“谐波反演技术”克服了传统 Fourier 变换的不确定性, 在提供了轨道分叉、“鬼轨道”等信息的同时, 为分析能级长程关联提供了高分辨度的回归谱<sup>[4,5]</sup>. 这种新方法被用来研究一些混沌和混杂系统, 尤其是外场中的氢原子系统<sup>[6,7]</sup>. 半经典理论与实验结果较好的符合显示了周期轨道理论的有效性, 但是, 具有长程关联的能级及与之相对应的周期轨道之间存在着什么样的内在关联, 仍然不清楚. 这是一个值得探讨的问题.

我们从可积系统的 Berry-Tabor 公式出发, 考虑周期轨道的周期性条件, 给出了二维无关联振子系统周期轨道作用量量子化条件, 讨论了量子能级与周期轨道之间的对应关系, 并用这种对应关系和数值方法分析了二维谐振子系统量子能级间的长程

关联.

## 2 回归函数与回归谱

1986 年, Wintgen<sup>[3]</sup>对量子态密度进行 Fourier 变换得到了回归函数, 相应的谱称为回归谱. 用公式表示为

$$R(S, E) = \int_0^\infty dt t^{-1/2} e^{-iSt} \rho(t, E), \quad (1)$$

其中  $R(S, E)$  是量子回归函数,  $\rho(t, E) = \sum_0^\infty \delta(E - E_n(t))$  是量子态密度,  $S$  是作用量,  $t = 1/\hbar$ . 加进一个  $t^{-1/2}$  因子是为了使回归函数形式更紧凑. 如果将量子态密度换成半经典态密度, 所得到的回归函数就是半经典回归函数. Main 应用“谐波反演技术”, 对磁场中的氢原子系统进行了研究, 得到了高分辨度回归谱<sup>[8]</sup>. 图 1 是 Main 给出的回归谱图.

图 1 中的峰大致出现在周期轨道所对应的作用量处. 因为系统在周期轨道上的运动经过整数个周期后又回到其起始点, 所以图 1 被称作回归谱 (1) 式被称作回归函数.

为了讨论回归谱中的峰与周期轨道的关系, 本文选用二维无关联振子系统<sup>[9]</sup>. 二维无关联振子系统的 Hamiltonian 为

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + a \frac{q_1^\nu}{b} + abq_2^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

\* 国家教委留学回国人员基金、近代物理研究所所长基金、科学院“百人计划”和国家重点基础研究发展规划(批准号: G2000774)资助的课题.

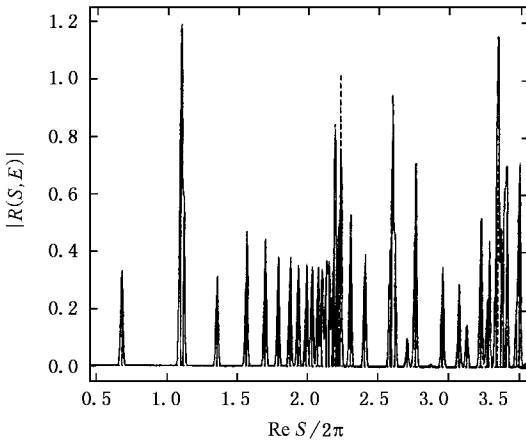


图1 磁场中氢原子态密度的回归谱(光滑线由传统 Fourier 变换给出, 竖实线由谐波反演技术给出, 点线(几乎被竖实线所覆盖)由半经典周期轨道理论给出)

其中,  $p_1$  和  $p_2$ ,  $q_1$  和  $q_2$  分别是每一维上的动量和坐标,  $a, b$  是两个常数, 它们的选取与系统的对称性有关. 运用系统具有的标度不变性<sup>[10]</sup>, 对态密度进行 Fourier 变换, 得到系统的量子回归函数,

$$R(S, E) = -\frac{\nu+2}{2\nu} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\nu+2)4\nu} E^{-(5\nu+2)4\nu} \cdot e^{-iS\left(\frac{E_n}{E}\right)^{(\nu+2)2\nu}}. \quad (3)$$

(3) 式表明每一条量子能级对回归函数都有贡献. 其强度是  $\frac{\nu+2}{2\nu} E_n^{(\nu+2)4\nu} E^{-(5\nu+2)4\nu}$ , 相位项是  $e^{-iS\left(\frac{E_n}{E}\right)^{(\nu+2)2\nu}}$ . 回归谱中每一个峰的出现都是许多能级贡献相干的结果. 能谱中的长程关联, 可能与每一条能级对回归函数贡献项的相位项紧密相关. 另一方面, 回归谱中的峰出现在周期轨道对应的作用量处, 这可能意味着能级间的长程关联与量子经典对应关系相联系.

### 3 量子经典对应

本节从可积系统的 Berry-Tabor 公式出发, 分析二维无关联振子系统中量子能级和经典周期轨道之间的对应关系.

20 世纪 70 年代, 在 Gutzwiller<sup>[11]</sup> 工作的基础上, Berry, Tabor 等人导出了可积系统的求迹公式<sup>[2]</sup>

$$\rho_M^{SC} = \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g_E''|^{1/2}} \cos\left(\frac{S_M}{\hbar} - \frac{\eta_M \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (4)$$

(4) 式给出了有理环面  $M(M_1, M_2)$  上的一条周期轨道对半经典态密度的贡献  $\rho_M^{SC}$ , 其中  $T_M, S_M, \eta_M$  分别

是这条周期轨道的周期, 作用量, Maslov 指数. 拓扑指数  $M(M_1, M_2)$  表示系统沿周期轨道运动一周, 系统在每一个不等价拓扑圆上分别运动了  $M_1, M_2$  周.  $g_E''$  是能量面上的曲率. 对于二维四次振子系统, 我们用数值方法验证了(4)式的有效性<sup>[10, 11]</sup>.

考虑到粒子在一条周期轨道上可以运动  $n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 个周期而不止一个周期, 这条周期轨道对态密度的总贡献为各个周期贡献的和, 因此

$$\begin{aligned} \rho_M^{SC}(E) &= \sum_n \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g_E''|^{1/2}} \cos\left(\frac{nS_M}{\hbar} - \frac{n\eta_M \pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g_E''|^{1/2}} \cdot \frac{\exp(iS_M/\hbar - i\eta_M \pi/2)}{1 - \exp(iS_M/\hbar - i\eta_M \pi/2)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \frac{T_M}{\pi \hbar^{3/2} M_2^{3/2} |g_E''|^{1/2}} \cdot \left[ \frac{\cos(S_M/\hbar - \eta_M \pi/2)}{\sin(S_M/\hbar - \eta_M \pi/2)} + i \right] \right\}, \quad (5) \end{aligned}$$

(5) 式表明  $\rho_M^{SC}(E)$  的奇点是

$$S_M = (m + \eta_M/4) \hbar, \quad (m \text{ 取整数}), \quad (6)$$

对应一个无穷大的半经典态密度, 即对应一个可能的量子态. 考虑周期轨道满足的周期性条件  $M_1 T_1 = M_2 T_2$  ( $T_1, T_2$  分别为  $\nu$  次振子在每一个不等价拓扑圆上运动的周期), 运用 EBK 量子化条件, 由(6)式得到一个作用量子化条件<sup>[12]</sup>,

$$\begin{aligned} S_M &= (m + \eta_M/4) \hbar \\ &= M_1(n_1 + 1/2) \hbar + M_2(n_2 + 1/2) \hbar. \quad (7) \end{aligned}$$

周期性条件  $M_1 T_1 = M_2 T_2$  给出

$$\left(\frac{E^1}{E^2}\right)^{\frac{2-\nu}{2\nu}} b^{\frac{2}{\nu}} = \frac{M_2}{M_1}, \quad (8)$$

$$\frac{n_1 + \frac{1}{2}}{n_2 + \frac{1}{2}} \approx \left(\frac{M_2}{M_1}\right)^{\frac{2+\nu}{2-\nu}} b^{\frac{4}{\nu-2}}, \quad (9)$$

其中  $E^1, E^2$  分别为每一维上的能量. 如果  $E^1, E^2$  取量子能级在每一维上的分量, 在(8)式中, 如果

$\left(\frac{E^1}{E^2}\right)^{\frac{2-\nu}{2\nu}} b^{\frac{2}{\nu}}$  取实数, 总可以找到一组  $(M_1, M_2)$  满足

(8) 式. 也就是说, 对于任意一条能级, 总可以找到一条周期轨道与它相对应. 对于任意一组  $(M_1, M_2)$ , 总可以找到多组  $E^1, E^2$  近似满足(9)式. 换言之, 对于任意一条周期轨道, 总可以找到多条能级与之相对应.

### 4 长程关联的理论解释

利用上节介绍的量子经典对应关系来解释二维无关联振子系统量子能谱中的长程关联。(3)式表明,每一条能级对回归函数有一个贡献,贡献项的相位是  $e^{-iS(\frac{E_n}{E})^{(\nu+2)2\nu}}$ .

对于二维无关联振子系统这样的齐次系统,系统的标度不变性<sup>[13]</sup>使得某一有理环面  $M$  上的周期轨道的作用量与系统能量具有简单的正比关系:

$$S_M(E) \propto E^{\frac{\nu+2}{2\nu}}. \tag{10}$$

假设能级  $E_N, E_K$  对应轨道拓扑都是  $M(M_1, M_2)$ , (3)式中的  $S$  取周期轨道的作用量  $S_M(E)$  时,应用(10)式和(7)式,得到  $E_N$  贡献的相位

$$\begin{aligned} -S_M(E) \left(\frac{E_N}{E}\right)^{(\nu+2)2\nu} &= -S_M(E_N) \\ &\approx -2\pi \left[ M_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + M_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar, \tag{11} \end{aligned}$$

$E_K$  贡献的相位是

$$\begin{aligned} -S_M(E) \left(\frac{E_K}{E}\right)^{(\nu+2)2\nu} &= -S_M(E_K) \\ &\approx -2\pi \left[ M_1 \left( k_1 + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + M_2 \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \hbar, \tag{12} \end{aligned}$$

两相位相差是  $2\pi [M_1(k_1 - n_1) + M_2(k_2 - n_2)]\hbar$ . 取  $\hbar = 1$ , 注意到  $M_1, M_2, k_1, k_2, n_1, n_2$  都是整数, 这两条能级对回归函数贡献的相位差大致是  $2j\pi (j \in \mathbb{Z})$ . 前面提到过, 对于某一拓扑  $M(M_1, M_2)$ , 总能找到数条能级与之关联, 这些能级对回归函数的贡献相干, 使得在回归谱上出现一个峰.

### 5 两个例子

以二维无关联四次振子为例, 来验证我们对能级间长程关联的理论解释. 图 2 给出了二维无关联四次振子的回归谱.

对于二维无关联四次振子,  $\nu = 4$  (2)(3)(8) 式分别变为

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + a \frac{q_1^4}{b} + abq_2^4, \tag{2a}$$

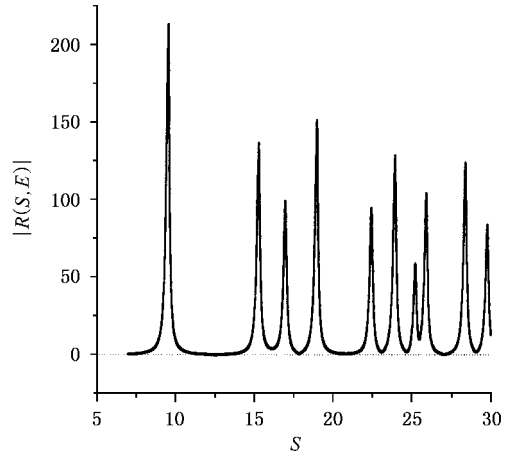


图 2 二维无关联四次振子回归谱

$$R(S, E) = -\frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{3/8} E^{-11/6} e^{-iS \left(\frac{E_n}{E}\right)^{3/4}}, \tag{3a}$$

$$\left(\frac{E^1}{E^2}\right)^{-\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}} = \frac{M_2}{M_1}. \tag{8a}$$

假设能级  $E_N, E_K$  是对应周期轨道拓扑相等的两条能级 (11) 式 (12) 式给出这两条能级对回归函数贡献的相位差为  $2\pi [M_1(k_1 - n_1) + M_2(k_2 - n_2)]\hbar$ , 也就是说, 如果一组能级对应的周期轨道具有相同拓扑, 这组能级对回归函数贡献相干. 而我们前面分析过, 二维  $\nu$  次振子系统中, 存在着与任意一条周期轨道相对应的一组能级, 这一组能级相干使得回归谱中出现峰. 即对应周期轨道拓扑相同的那些能级间存在着长程关联.

对于谐振子,  $\nu = 2$ . 众所周知, 谐振子是一个严格可解的系统. 图 3 给出了二维谐振子的回归谱.

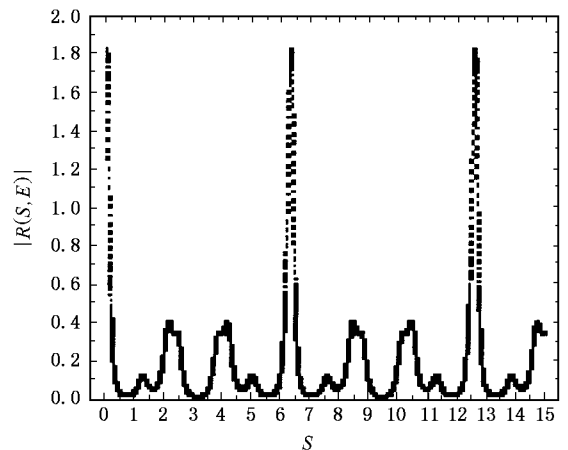


图 3 二维谐振子的回归谱

(2)(3)(8)式分别变为

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + a \frac{q_1^2}{b} + abq_2^2, \quad (2b)$$

$$R(S, E) = - \sum_{n=0}^{\infty} E_n^{1/2} E^{-3/2} e^{-iS(\frac{E_n}{E})}, \quad (3b)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{M_1}{M_2}. \quad (8b)$$

与  $\nu \neq 2$  的情形不同的是, 谐振子系统中, 除了中心轨道(只在某一维上有运动的轨道)外, 所有轨道对应的拓扑相同. 这一系统中任意两条能级  $E_N, E_K$  对回归函数贡献的相位差为  $2\pi [M_1(k_1 - n_1) + M_2(k_2 - n_2)]h$ , 也就是说, 如果一组能级对应的周期轨道具有相同拓扑, 这组能级对回归函数贡献相干. 回归谱中的每一个峰都是所有二维轨道对应的能级相干

的结果.

## 6 结 论

从可积系统的 Berry-Tabor 公式出发, 运用 EBK 量子化条件, 导出了二维无关联振子系统周期轨道量子化条件, 找到了这个系统的量子经典对应信息. 对于能级与周期轨道之间的对应, 虽然给出的只是一个近似公式, 但这并不影响用这一对应关系来分析二维无关联振子系统量子能谱中的长程关联所反应的量子经典相关信息. 分析表明, 存在着长程关联的能级对应的周期轨道具有相同的拓扑, 这一组能级对回归函数贡献相干, 使得回归谱中出现峰.

- [1] M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.*, **12**(1971), 343.  
 [2] M. V. Berry, M. Tabor, *Proc. R. Soc. Lond.*, **A349**(1976), 101; *J. Phys.*, **A10**(1977), 371.  
 [3] D. Wintgen, *Phys. Rev. Lett.*, **58**(1987), 1589.  
 [4] J. Main, V. A. Mandelshtam, H. S. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **79**(1997), 825.  
 [5] J. Main, G. Wunner, *Phys. Rev. Lett.*, **82**(1999), 3038.  
 [6] M. Courtney, N. Spellmeyer, H. Jiao, D. Kleppner, *Phys. Rev.*, **A51**(1995), 3604.  
 [7] M. R. Haggerty, N. Spellmeyer, D. Kleppner, J. B. Delos, *Phys. Rev. Lett.*, **81**(1998), 1592.  
 [8] J. Main, *Phys. Rep.*, **316**(1999), 233.

- [9] H. Friedrich, D. Wintgen, *Phys. Rep.*, **183**(1989) 37.  
 [10] Jian-jun Song, Xi-guo Li, Fang Liu, Shu-wei Li, *Nucl. Phys. Rev.*, **17**(2000), 262.  
 [11] Jian-jun Song, Xi-guo Li, Fang Liu, Shu-wei Li, *High Energy Physics and Nuclear Physics* (accepted in Chinese) [宋建军、李希国、刘芳、李树伟, 高能物理与核物理, 待发表].  
 [12] Jian-jun Song, Xi-guo Li, *High Energy Physics and Nuclear Physics* (accepted in Chinese) [宋建军、李希国, 高能物理与核物理, 待发表].  
 [13] O. Bohigas, S. Tomsovic, D. Ullmo, *Phys. Rep.*, **223**(1993), 43.

# LONG-RANGE CORRELATIONS IN QUANTUM SPECTRA \*

SONG JIAN-JUN<sup>1)</sup> LI XI-GUO<sup>1,2)</sup>

<sup>1)</sup>*Institute of Modern Physics, Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China*

<sup>2)</sup>*Research Center of Theoretical Nuclear Physics, National Laboratory of Heavy Ion Collision, Lanzhou 730000, China*

(Received 5 March 2001; revised manuscript received 28 April 2001)

## ABSTRACT

Starting From Berry-Tabor trace formula, Einstein-Brillouin-Keller (EBK) quantization condition is adopted to derive action quantization conditions of periodic orbits in two dimensional uncoupled oscillators. The correspondence relations between quantum levels and periodic orbits are found. They indicate that two levels' contributions to recurrence function coherently interfere with each other if the two levels correspond to periodic orbits with identical topology. The peaks in recurrence spectra results from coherent interference among levels whose corresponding periodic orbits have identical topology. There are long-range correlations among these levels.

**Keywords** : long-range correlation, quantum-classical correspondence, semiclassical quantization, trace formula

**PACC** : 0365S

---

\* Project supported by the Sciences Foundation of Chinese Education Commission, President Foundation of Institute of Modern Physics and "One Hundred Persons Project" of Chinese Academy of Sciences and by the Major State Basic Research Development Program (Grant No. G20000774).