物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.50,No.9,September,2001

二维均匀耦合映象格子中的时空周期图案

王志斌
(华北工学院理学系,太原 030051)
胡 岗
(北京师范大学物理系,北京 100875)

(2000 年 12 月 13 日收到;2001 年 5 月 5 日收到修改稿)

目的——构造二维均匀耦合映象格子中的时空周期图案.方法——通过一维耦合映象格子模型的相空间中已知低空间周期轨道,直接构造二维均匀耦合映象格子模型中一系列空间周期轨道,而不必求解其模型方程,并对构造轨道的稳定性进行分析.结果——$L^2 \times L^2$ 雅可比矩阵可化简为几个 2×2 矩阵组成的对角矩阵.结论——所构造轨道的稳定性不可能比原来轨道的稳定性高.

关键词:耦合映象格子,时空周期图案,雅可比矩阵
PACC:0545

1 引 言

耦合映象格子模型近年来引起了人们极大的兴趣,并进行了广泛的研究[1—9].耦合映象格子模型虽是一个理想化模型,但对其研究可以加深对多自由度系统的理解.利用李雅普诺夫指数讨论时空周期图案的稳定性时,当 L 比较大时,讨论 $L\times L$ 雅可比矩阵将比较困难.本文所讨论的是在一维均匀耦合条件下,一系列特别的时空周期轨道.根据一维耦合映象格子中已知空间周期轨道,预言一系列在二维均匀耦合映象中的特殊空间轨道,并解析分析所预言空间周期轨道的稳定性.

2 时空周期轨道

在二维均匀耦合映象格子中,本文将提出怎样从一维耦合映象格子中已知的空间低周期轨道,直接推导出一系列高空间周期轨道,以及讨论导出高空间周期轨道与低空间周期轨道的关系,利用下面的均匀耦合映象格子模型[3]

$$x_{n+1}(i_u,i_v)=f[x_n(i_u,i_v)]+\frac{\varepsilon}{4s^2+4s}\sum_{k=-s}^{s}\sum_{l=-s}^{s}\{g[x_n(i_u+k,i_v+l)]-g[x_n(i_u,i_v)]\},(k,l\text{ 不同时为零}),\quad(1)$$

式中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是映象函数,如单峰映象函数($f(x)=ax(1-x)$,$0\leqslant a\leqslant 4$)、圆映象函数等;$x_n(i_u,i_v)$是在 u 方向第 i_u 个和在 v 方向第 i_v 个格点第 n 次迭代时的状态;ε 表示耦合强度,s 表示耦合长度.周期边界条件 $x_n(i_u,i_v)=x_n(i_u+L_u,i_v+L_v)$,$L_u$ 和 L_v 是系统在 u 方向和 v 方向的尺寸.$x_0(i_u,i_v)$取一定范围的随机值,当 $n\to\infty$ 时,$x_n(i_u,i_v)$的时空行为称为空间周期轨道.

为从模型(1)导出空间高周期轨道(用 $S_M(N_u,N_v,s,I_u,I_v)$表示耦合映象格子(CML)的时空周期轨道,其中 M 是时间周期,s 是耦合长度,N_u 是 u 方向的空间周期,N_v 是 v 方向的空间周期,I_u 是 u 方向的空间周期重复次数,I_v 是 v 方向的空间周期重复次数),首先考虑被广泛研究过的一维耦合单峰映象格子模型[3—5]

$$x_{n+1}(i)=f[x_n(i)]+\frac{\varepsilon}{2}\{g[x_n(i-1)]+g[x_n(i+1)]-2g[x_n(i)]\}.\quad(2)$$

通过解析分析和数值计算,从模型(2)可得到很多不同类型的周期轨道.这里主要关心的是周期二轨道 $S_M(2,s,R)$(2 表示空间周期,s 表示耦合长度,R 表示空间周期重复次数).假设在模型方程(2)中,存在一个 $S_M(2,1,R)$轨道($y_mz_my_mz_m\cdots y_mz_m$),$m=1,2,...M$,这里定义 $y_m=y_m(\varepsilon)$和 $z_m=z_m(\varepsilon)$作为 ε

的函数，把 y_m，z_m 代入方程(2)得

$$z_{m+1} = f[z_m] + \varepsilon[g(y_m) - g(z_m)]. \tag{3}$$

不必求解方程(1)，利用 $S_M(2,1,R)$ 可以推出 $S_M(2,2,1,I_u,I_v)$ 轨道，如图 1. 代入模型方程(1)可得到

$$z'_{m+1} = f(z'_m) + \frac{\varepsilon'}{2}[g(y'_m) - g(z'_m)]. \tag{4}$$

比较方程(3)和(4)，即可得到：如 $\frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon$ 则有 $y'_m = y_m$ 和 $z'_m = z_m$. 因此，可以推断如果在模型(2)中 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 存在 $S_M(2,1,R)$，在(1)式中 $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ 一定存在 $S_M(2,2,1,I_u,I_v)$（这里要求系统的尺寸必须符合轨道存在的条件. 这个要求贯穿本文所有讨论中）. 同样道理可以构造一系列这样的轨道，表示为 $S_M(2N,2N,s,I_u,I_v)$，如图 2. 用满足 $S_M(2,1,R)$ 轨道的状态 y_m，z_m 代入(1)式可以得到

$$z'_{m+1} = f(z'_m) + \beta\varepsilon[g(y'_m) - g(z'_m)], \tag{5}$$

其中 $\beta = \frac{1}{2}$ 是耦合强度的标准因子，状态变量 $y'_m = y'_m(\beta\varepsilon)$ 和 $z'_m = z'_m(\beta\varepsilon)$. 方程(5)说明在模型方程 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 处存在 $S_M(2,1,R)$ 轨道，那么在模型方程(1)中 $\varepsilon = \varepsilon_0/\beta$ 处存在 $S_M(2N,2N,s,I_u,I_v)$ 轨道.

$$\begin{array}{ccccccc}
y'_m & z'_m & y'_m & z'_m & \cdots & y'_m & z'_m \\
z'_m & y'_m & z'_m & y'_m & \cdots & z'_m & y'_m \\
y'_m & z'_m & y'_m & z'_m & \cdots & y'_m & z'_m \\
z'_m & y'_m & z'_m & y'_m & \cdots & z'_m & y'_m \\
 & & & & & & \\
y'_m & z'_m & y'_m & z'_m & \cdots & y'_m & z'_m \\
z'_m & y'_m & z'_m & y'_m & \cdots & z'_m & y'_m
\end{array}$$

图 1

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{N} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{N} \end{array} \\
N\left\{\begin{array}{ccccccccc}
y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & \cdots \\
y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & \cdots \\
 & & & & & & & & \cdots \\
y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & \cdots
\end{array}\right. \\
N\left\{\begin{array}{ccccccccc}
z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & \cdots \\
z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & \cdots \\
 & & & & & & & & \cdots \\
z'_m & z'_m & \cdots & z'_m & y'_m & y'_m & \cdots & y'_m & \cdots
\end{array}\right.
\end{array}$$

图 2

3　稳定性分析

利用李雅普诺夫指数讨论时空周期图案的稳定性时，必须讨论 $L^2 \times L^2$ 雅可比矩阵的特征根. 当 L 比较大时，讨论 $L^2 \times L^2$ 雅可比矩阵将比较困难.(1)式中所预言的一系列 $S_M(2N,2N,s,I_u,I_v)$ 轨道是从一维耦合映象格子的时空周期轨道 $S_M(2,1,R)$ 构造的. 那么所构造的轨道的稳定性分析能否与 $S_M(2,1,R)$ 轨道的稳定性分析联系起来呢？例如，仅分析 NR 个 2×2 矩阵，一般情况下是不能这样做的. 但可以使用 Amritkar[6] 等的方法仅分析矩阵 $2N\times2N$ 的矩阵. 在一些特殊的情况下也可以把矩阵简化，例如对 $S_M(2N,2N,L/2,I,I)$，$S_M(2N,2N,L/2-1,I,I)$，$S_M(2N,2N,L,I,I)$，$S_M(2N,2N,L-1,I,I)$，$S_M(2N,2N,s,I,I)$ 等轨道的稳定性分析，可以把稳定性分析雅可比矩阵简化成 2×2 块对角矩阵. 下面就对以上轨道分别分析.

为了表示方便做以下定义：

$$\begin{aligned}
F_1^m &= \frac{\mathrm{d}f[x_n(i_u,i_v)]}{\mathrm{d}x_n(i_u,i_v)}\Big|_{x_n(i_u,i_v)=y_m}, \\
F_2^m &= \frac{\mathrm{d}f[x_n(i_u,i_v)]}{\mathrm{d}x_n(i_u,i_v)}\Big|_{x_n(i_u,i_v)=z_m}, \\
G_1^m &= \frac{\mathrm{d}g[x_n(i_u,i_v)]}{\mathrm{d}x_n(i_u,i_v)}\Big|_{x_n(i_u,i_v)=y_m}, \\
G_2^m &= \frac{\mathrm{d}g[x_n(i_u,i_v)]}{\mathrm{d}x_n(i_u,i_v)}\Big|_{x_n(i_u,i_v)=z_m}.
\end{aligned} \tag{6}$$

稳定性分析雅可比矩阵可表示为

$$J = J_1 J_2 \cdots J_{M-1} J_M. \tag{7}$$

对雅可比矩阵做变换：

$$J' = PJ_1P^{-1}PJ_2P^{-1}\cdots P^{-1}PJ_MP^{-1} = J'_1\ J'_2\ J'_3\ \cdots J'_M, \tag{8}$$

选择适当的变换矩阵 P，使 J' 成为块循环矩阵嵌套，最小的循环矩阵块是 2×2 矩阵. 利用幺正变换 J'_m 可以化为块对角矩阵. 因此雅可比矩阵 J_m 可以转化为块对角矩阵 J'_m. 对 $S_M(2N,2N,L/2-1,I,I)$ 轨道 J''_m 可写成

$$J'' = J''_1\ J''_2 \cdots J''_{M-1} J''_M$$

$$= \begin{bmatrix}
\prod_{m=1}^{M} D_m^{000} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \prod_{m=1}^{M} D_m^{r_1 r_2 r_3} & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & \prod_{m=1}^{M} D_m^{1(NI-1)(NI-1)}
\end{bmatrix}. \tag{9}$$

对(9)式分析,可以得到

$$D_m^{000} = A_m + [2(NI)^2 + 2NI - 1]B_m + C_m,$$

$$D_m^{000} = \begin{cases} A_m - B_m + (2NI+1)C_m, \\ A_m - B_m - (2NI+1)C_m, \end{cases}$$

$$D_m^{00r_3} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{r_3}(NI+1)C_m + NIE_m, \\ A_m + (NI-1)B_m + C_m, \end{cases} \tag{10}$$

$$D_m^{0r_20} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{r_2}(NIB_m + C_m), \\ A_m + (NI-1)B_m + C_m, \end{cases}$$

$$D_m^{0r_1r_2} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{r_2+r_3}C_m, \\ A_m - B_m + C_m, \end{cases}$$

$$D_m^{10r_3} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{r_3}(NI+1)C_m - NIE_m, \\ A_m - B_m + NIE_m - (NI+1)C_m, \end{cases}$$

$$D_m^{1r_20} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{r_2}(NIB_m + C_m), \\ A_m - (NI+1)B_m - C_m, \end{cases}$$

$$D_m^{1r_2r_3} = \begin{cases} A_m - B_m + (-1)^{(r_2+r_3)}C_m, \\ A_m - B_m - C_m, \end{cases}$$

其中

$$A_m = \begin{bmatrix} F_1^m - \varepsilon G_1^m & \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_2^m \\ \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_1^m & F_2^m - \varepsilon G_2^m \end{bmatrix},$$

$$B_m = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_1^m & \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_2^m \\ \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_1^m & \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_2^m \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_1^m & \\ & \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_2^m \end{bmatrix},$$

$$E_m = \begin{bmatrix} & \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_2^m \\ \dfrac{\varepsilon}{4s^2+4s}G_1^m & \end{bmatrix}.$$

在(10)式中,大括号中上面的式子对应 I 为偶数,下面的式子 I 为奇数.可以看出 I 为奇数时,仅有七个 2×2 矩阵.I 为偶数时,有八个 2×2 矩阵,其中有六个式子是相同的.

$$D_m^{000} = \prod_{m=1}^{m}\begin{bmatrix} F_1^m - \beta\varepsilon G_1^m & \beta\varepsilon G_2^m \\ \beta\varepsilon G_1^m & F_2^m - \beta\varepsilon G_2^m \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其特征根为 $\lambda_1^0(\beta\varepsilon)$ 和 $\lambda_2^0(\beta\varepsilon)$,且与 $S_M(2,1,1)$ 的特征根相同,这说明这一系列轨道的稳定性范围不可能超过 $S_M(2,1,1)$ 的稳定性范围.

同样的方法,可以得到 $S_M(2N,2N,L/2,I,I)$, $S_M(2N,2N,L/2-1,I,I)$, $S_M(2N,2N,L,I,I)$, $S_M(2N,2N,L-1,I,I)$, $S_M(2N,2N,s,1,1)$ 轨道的 2×2 矩阵.

本文通过耦合映象格子模型的相空间中已知低空间周期轨道,直接构造耦合映象格子模型中一系列空间周期轨道,而不必求解其模型方程.构造轨道的稳定性分析仅需要解析分析几个 2×2 矩阵.从以上的分析可以得到一个结论:所构造轨道的稳定性范围不可能比原来的轨道的稳定性范围大,也就是说从一个不稳定的轨道所构造的轨道一定是不稳定的,而从一个稳定轨道所构造的轨道也可能不稳定,因为增大了相空间,改变了耦合强度和耦合常数,以及空间的结构.另外本文所讨论的模型是耦合映象格子系统,但同时在非线性耦合振子系统中有相同的变换,因而这里的研究能够推广到很多物理系统中.

[1] W. L. Ma *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999), 794(in Chinese)[马文麒等,物理学报,**48**(1999),794].

[2] D. H. He, J. X. Xu, Y. H. Chen, *Acta Physica Sinica*, **48**(1999),1617(in Chinese)[何岱海、徐健学、陈永红,物理学报,**48**(1999),1617].

[3] F. G. Xie, G, Hu, Z. L. Qu, *Phys. Rev.*, **E 52**(1995), 1265.

[4] G. Hu, F. G. Xie, Z. L. Qu, *Phys. Rev.*, **E 54**(1996), 1305.

[5] F. G. XIE, G. Hu, *Phys. Rev.*, **E 54**(1996), 1.

[6] R. E. Amritkar *et al.*, *Phys. Rev.*, **A 44**(1991), 3407.

[7] P.L.Shi *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 24(in Chinese)[史朋亮等,物理学报,**49**(2000),24].

[8] Z.G.Zheng *et al.*, *Acta Physica Sinica*, **49**(2000), 2320(in Chinese)[郑志刚等,物理学报,**49**(2000),2320].

[9] X.Zhang, *Acta Physica Sinica*, **50**(2001), 624(in Chinese)[张旭,物理学报,**50**(2001),624].

SPATIOTEMPORAL PERIODIC PATTERNS OF A TWO-DIMENSIONAL SYMMETRICALLY COUPLED MAP LATTICES

WANG ZHI-BIN
(*Department of Science*, *North China Institute of Technology*, *Taiyuan* 030051, *China*)
HU GANG
(*Department of Physics*, *Beijing Normal University*, *Beijing* 100875, *China*)
(Received 13 December 2000; revised manuscript received 5 May 2001)

ABSTRACT

Aim: The spatiotemporal periodic pattern of a two-dimensional symmetrically coupled map lattice is constructed. **Method**: Without solving the modeling equations, a series of spatiotemporal periodic orbits in coupled map lattices are deduced by known orbits of one-dimensional coupled map lattices with lower spatial period. The stability of the deduced orbits is analyzed. **Results**: The $L^2 \times L^2$ Jacobian matrices can be simplified as diagonal matrices of a few 2×2 matrices. **Conclusion**: The stability of constructed orbits can never be better than that of the original ones.

Keywords: coupled map lattice, spatiotemporal periodic pattern, Jacobian matrices
PACC: 0545