第 51 卷 第 1 期 2002 年 1 月
1000-3290/2002/51(01)/0001-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.1,January,2002

变质量完整系统 Gibbs-Appell 方程的形式不变性*

李仁杰 乔永芬 孟 军

(东北农业大学工程学院,哈尔滨 150030)

(2001 年 5 月 12 日收到;2001 年 7 月 17 日收到修改稿)

建立变质量完整系统的 Gibbs-Appell 方程,给出该方程在无限小群变换下形式不变性的定义和判据,并在确定的条件下由不变性引导出守恒量.举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,变质量完整系统,Gibbs-Appell 方程,不变性,守恒量
PACC:0320,0200

1 引 言

1899 年,由 Gibbs 首先建立了确定力学系统运动的新方法[1],这个方法在 1899 年又被法国著名数学家 Appell 独立地作了发展,后人称为 Gibbs-Appell 方法,简称 G-A 方程[2].现已发展成为 Appell 方程体系[3],它在分析力学中占有非常重要的位置.但迄今对 G-A 方程的解法研究成果甚少[4].本文探讨在无限小群变换下,变质量完整系统 G-A 方程的形式不变性.首先,我们建立 G-A 方程,给出它在无限小群变换下形式不变性的定义和判据;其次,将 G-A 方程转换成 Lagrange 方程;最后,将 G-A 方程的形式不变性与 Noether 对称性相比较以便引导出 G-A 方程的守恒量,并举例说明结果的应用.

2 变质量完整系统的 G-A 方程

假设变质量完整系统的位形由 n 个广义坐标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 确定.运动加速度能量为

$$S = S[m(q,t),q,\dot{q},\ddot{q},t], \tag{1}$$

广义力

$$Q_s = Q_s(q,\dot{q},t), \tag{2}$$

广义反推力

$$\Psi_s = \sum_{i=1}^{N} \bar{R}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s},(\bar{R}_i = \dot{m}_i \bar{u}_i). \tag{3}$$

变质量完整系统的 Appell 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s + \Psi_s,(s = 1,2,\cdots,n). \tag{4}$$

引入 G-A 函数为

$$A = S - \sum_{s=1}^{n} Q_s \ddot{q}_s, \tag{5}$$

于是,方程(4)可写为

$$\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} = \Psi_s,(s = 1,2,\cdots,n). \tag{6}$$

(6)式就是 G-A 方程.

3 G-A 方程的形式不变性

引入无限小群变换

$$t^* = t + \varepsilon \xi_0(q,t),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon \xi_s(q,t), \tag{7}$$

其中 ε 是无限小参数,ξ_0,ξ_s 是无限小群变换的生成元.于是,有

$$\frac{dq_s^*}{dt^*} = \frac{dq_s + \varepsilon d\xi_s}{dt + \varepsilon d\xi_0} = \dot{q}_s + \varepsilon(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + o(\varepsilon^2), \tag{8a}$$

$$\frac{d^2 q_s^*}{dt^{*2}} = \ddot{q}_s + \varepsilon[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)' - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0] + o(\varepsilon^2). \tag{8b}$$

定义 在无限小群变换(7)下,若 G-A 方程(6)的形式保持不变,则此不变性称为该方程的形式不变性.

根据定义,G-A 方程的形式不变性可表为

* 黑龙江省自然科学基金(批准号 9507)资助的课题.

$$\frac{\partial A^*}{\partial \ddot{q}_s} - \Psi_s^* = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} - \Psi_s + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2),$$
$$(s = 1,2,\cdots,n). \tag{9}$$

其中

$$A^* = A\left(m^*, q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}, \frac{\mathrm{d}^2 q^*}{\mathrm{d}t^{*2}}, t^*\right),$$
$$\Psi_s^* = \Psi_s\left(q^*, \frac{\mathrm{d}q^*}{\mathrm{d}t^*}, t^*\right). \tag{10}$$

于是有下面的判据.

判据 对于已知的函数 A 和广义反推力 ψ_s，如果无限小群变换(7)的生成元 ξ_0, ξ_s 满足下述条件：

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_K}\left\{\frac{\text{д}A}{\text{д}t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\right.$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{n}\Psi_s[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)' - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\right\} = 0, \tag{11a}$$

$$\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_j - \dot{q}_j\dot{\xi}_0) = 0. \tag{11b}$$

其中 д 表示把质量当作常数时的偏导数记号，则 G-A 方程是形式不变量.

证明 我们有

$$\frac{\partial A^*}{\partial \ddot{q}_s} - \Psi_s^* = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} - \Psi_s + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}\left\{\frac{\text{д}A}{\text{д}t}\xi_0\right.$$
$$+ \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}\dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)$$
$$\left. + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s}[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)' - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\right\}$$
$$- \varepsilon\left[\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_j}\xi_j + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial \dot{q}_j}\right.$$
$$\left. \cdot(\dot{\xi}_j - \dot{q}_j\dot{\xi}_0)\right] + o(\varepsilon^2)$$
$$= \varepsilon\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}\left\{\frac{\text{д}A}{\text{д}t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\text{д}A}{\text{д}\dot{q}_s}\right.$$
$$\cdot(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \sum_{s=1}^{n}\Psi_s[(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)'$$
$$\left. - \ddot{q}_s\dot{\xi}_0]\right\} - \varepsilon\left[\frac{\partial \Psi_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial q_j}\xi_j\right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial \Psi_s}{\partial \dot{q}_j}(\dot{\xi}_j - \dot{q}_j\dot{\xi}_0)\right] + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2),$$
$$(k = 1,2,\cdots,n). \tag{12}$$

4 G-A 方程的 Lagrange 显式

为了 G-A 方程的形式不变性与 Noether 对称性相比较，必须把 G-A 方程转换为 Lagrange 方程.

对已知的函数 A 和 Ψ_s，有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}L}{\text{д}\dot{q}_s} - \frac{\text{д}L}{\text{д}q_s}$$
$$= \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}_s} - \Psi_s$$
$$= \sum_{k=1}^{n}A_{sk}(q,\dot{q},t)\ddot{q}_k + B_s(q,\dot{q},t) = 0, \tag{13}$$

其中 $L = L(q,\dot{q},t)$ 是 Lagrange 函数. 系统(13)自伴随的必充条件是系数 A_{sk}, B_s 满足下面的全部条件[5]：

$$A_{sk} = A_{ks}, \frac{\partial A_{sk}}{\partial \dot{q}_r} = \frac{\partial A_{rk}}{\partial \dot{q}_s},$$
$$\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s} = 2\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial}{\partial q_r}\right)A_{sk},$$
$$\frac{\partial B_s}{\partial q_k} - \frac{\partial B_k}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial}{\partial q_r}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}\right),$$
$$(s,k,r = 1,2,\cdots,n). \tag{14}$$

在这些条件下，可由 Lagrange 方程表示 G-A 方程. Lagrange 函数 L 的最一般的结构形式是

$$L(t,q,\dot{q}) = K(t,q,\dot{q}) + \sum_{k=1}^{n}D_k(t,q)\dot{q}_k + C(t,q). \tag{15}$$

其中 $n+2$ 个函数 K, D_k, C 是偏微分方程一般地超定系统的线性解.

$$\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k} = A_{ks}(t,q,\dot{q}), \tag{16}$$

$$\frac{\partial D_s}{\partial q_k} - \frac{\partial D_k}{\partial q_s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}\right) + \frac{\partial^2 K}{\partial q_s\partial \dot{q}_k}$$
$$- \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_s\partial q_k} \equiv Z_{sk}(t,q), \tag{17}$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_s} = \frac{\partial D_s}{\partial t} - B_s - \frac{\partial K}{\partial q_s} + \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_s\partial t}$$
$$+ \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 K}{\partial q_s\partial \dot{q}_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial B_s}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial B_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\right]\dot{q}_k$$
$$\equiv W_s(t,q). \tag{18}$$

这样，(16)，(17)和(18)式给出构造 Lagrange 函数的方法，并由这些方程得到[5]

$$K(t,q,\dot q) = \sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\dot q_s\int_0^1 \mathrm{d}\tau'$$

$$\cdot\left\{\left[\int_0^1 \mathrm{d}\tau A_{sk}(t,q,\tau\dot q)\right]\dot q_k\right\}(t,q,\tau'\dot q), \quad (19)$$

$$D_s = \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau\tau Z_{sk}(t,\tau q)\right\}q_k, \quad (20)$$

$$C = \sum_{k=1}^{n}\left\{\int_0^1 \mathrm{d}\tau W_k(t,\tau q)\right\}q_k, \quad (21)$$

对于已知的 S, Q_s 和 Ψ_s,有

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\text{д}T}{\text{д}\dot q_s} - \frac{\text{д}T}{\text{д}q_s} = \frac{\partial S}{\partial \ddot q_s}$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n}a_{sk}(t,q,\dot q)\ddot q_k + b_s(t,q,\dot q) = 0, \quad (22)$$

其中 T 是系统的动能.由上式可求出函数 T.

5　G-A 方程的形式不变性和 Noether 对称性

由 Lagrange 函数 L、广义力 Q_s 和广义反推力 P_s 所描述的系统,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s + P_s, (s = 1,2,\cdots,n), \quad (23)$$

其中

$$P_s = \sum_{i=1}^{N}\left\{(\bar R_i + \dot m_i\dot{\bar r}_i)\cdot\frac{\partial \bar r_i}{\partial q_s} - \frac{1}{2}\dot{\bar r}_i\cdot\dot{\bar r}_i\cdot\frac{\partial m_i}{\partial q_s}\right\}, \quad (24)$$

于是,Noether 定理指出,如果变换(7)中的生成元 ξ_0, ξ_s 和规范函数 $G^* = G^*(t,q)$ 满足 Noether 恒等式

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot\xi_s$$

$$+\left(L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}\dot q_s\right)\dot\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}(Q_s + P_s)$$

$$\cdot(\xi_s - \dot q_s\xi_0) = -\dot G^*. \quad (25)$$

那么,变质量系统具有下面的守恒量[6]

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s}(\xi_s - \dot q_s\xi_0) + G^*$$

$$= \mathrm{const}. \quad (26)$$

于是,有

定理　对于无限小生成元 ξ_0, ξ_s,在变质量完整系统的 G-A 方程形式不变性的情况下,如果存在规范函数 $G^* = G^*(t,q)$ 满足恒等式(25),那么,由形式不变性引导出守恒量(26)式.

6　举　例

一变质量质点,其质量为 $m(t) = t$. G-A 函数为

$$A = \frac{1}{2}m(t)\ddot q^2 + \ddot q\dot q, \quad (27)$$

微粒分离的绝对速度为零,即

$$\bar u = -\dot{\bar r} = -\dot q\bar k,$$

试研究系统的形式不变性和守恒量.

首先,我们研究 G-A 方程的形式不变性.

广义反推力

$$\Psi = \bar R\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial q} = \dot m\,\bar u\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial q} = -\dot m\,\dot q = -\dot q, \quad (28)$$

由式(11a)和(11b),得

$$\frac{\partial}{\partial \ddot q}\{\ddot q(\dot\xi - \dot q\,\dot\xi_0) - \dot q\,[(\dot\xi - \dot q\,\dot\xi_0)' - \ddot q\dot\xi_0]\} = 0,$$

$$\dot\xi - \dot q\,\dot\xi_0 = 0. \quad (29)$$

即

$$\dot\xi + \dot q\,\dot\xi_0 = 0, \dot\xi - \dot q\,\dot\xi_0 = 0. \quad (30)$$

方程组(30)有解

$$\xi_0 = 0, \xi = 1, \quad (31a)$$

$$\xi_0 = 1, \xi = 0. \quad (31b)$$

其次,将 G-A 方程转换成 Lagrange 方程.由(27)式,有

$$S = \frac{1}{2}m\ddot q^2, Q = -\dot q, \quad (32)$$

由(23)式,得

$$T = L = \frac{1}{2}m\dot q^2, \quad (33)$$

最后,我们通过生成元(31a)和(31b)检验 G-A 方程的形式不变性是不是满足 Noether 对称性.

由(24)式,得

$$P = (\bar R + \dot m\,\dot{\bar r})\cdot\frac{\partial \bar r}{\partial q} = 0, \quad (34)$$

将(33)代入(25)式,并注意(32)和(34)式,有

$$\frac{1}{2}\dot m\,\dot q^2\xi_0 + m\dot q\,\dot\xi - \frac{1}{2}m\dot q^2\dot\xi_0 - \dot q\,(\xi - \dot q\,\xi_0) = -\dot G^*. \quad (35)$$

再将(31a)代入(35)式,得

$$-\dot G^* = -\dot q, \text{即 } G^* = q. \quad (36)$$

由(31b)不可能找到规范函数 G^*.因此,生成元(31a)对应 Noether 对称性.于是,由(26)式求得系统的守恒量为

$$I = m\dot{q} + q = \text{const}. \tag{37}$$

另外,系统的运动方程可写为

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial A}{\partial \ddot{q}} - \Psi = m\ddot{q} + 2\dot{q} = 0. \tag{38}$$

但方程(38)不满足自伴随条件(14).

令 $k = \frac{2}{m}$,则(38)式可写为

$$\ddot{q} + k\dot{q} = 0. \tag{39}$$

现将(39)式改写成等价形式:

$$\mathrm{e}^{kt}\ddot{q} + k\mathrm{e}^{kt}\dot{q} = 0. \tag{40}$$

它满足自伴随条件(14).于是,函数 A 和反推力 Ψ 成为

$$A = \mathrm{e}^{kt}\left(\frac{1}{2}m\ddot{q}^2 + \ddot{q}\dot{q}\right),\Psi = \mathrm{e}^{kt}(-\dot{q}). \tag{41}$$

由(11a)和(11b),得

$$k\mathrm{e}^{kt}(m\ddot{q} + \dot{q})\xi_0 + \mathrm{e}^{kt}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) + 2\mathrm{e}^{kt}\dot{q}\dot{\xi}_0 = 0, \tag{42a}$$

$$\mathrm{e}^{kt}(\dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0) = 0. \tag{42b}$$

现将(37)式对时间 t 求导数,其中质量看作常数时,有

$$\frac{\mathrm{D}I}{\mathrm{D}t} = \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t}(m\dot{q} + q) = 0, \tag{43}$$

将(43)式代入(42a)式,于是,有

$$\dot{\xi} + \dot{q}\dot{\xi}_0 = 0, \dot{\xi} - \dot{q}\dot{\xi}_0 = 0. \tag{44}$$

这与(30)式相同.其次,通过(15)—(21)式求得

$$L = \frac{1}{2}m\mathrm{e}^{kt}\dot{q}^2, \tag{45}$$

将(45)代入(25)式得

$$\frac{1}{2}mk\mathrm{e}^{kt}\dot{q}^2\xi_0 + m\mathrm{e}^{kt}\dot{q}\dot{\xi} - \frac{1}{2}m\mathrm{e}^{kt}\dot{q}^2\dot{\xi}_0 = -\dot{G}^*, \tag{46}$$

再将(31a)式代入上式,有

$$G^* = 0, \tag{47}$$

因此,方程(38)的形式不变性是 Noether 对称性,对应的守恒量为

$$I = m\mathrm{e}^{kt}\dot{q} = \text{const}.$$

即

$$I = t\mathrm{e}^{kt}\dot{q} = \text{const}. \tag{48}$$

[1] Gibbs J W 1879 *Amer. J. Math.* **2** 49

[2] Appell P 1899 *C. R. Acad. Sc. Paris* **129** 317

[3] Mei F X 1985 *Foundations of mechanics of nonholonomic systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) p214 (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整力学基础(北京 北京工业学院出版社) p214]

[4] Mei F X 2001 *J. Chin. Phys.* **10** 177

[5] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics* I (New York: Springer-Verlay) p141

[6] Mei F X 1999 *Applications of Lei Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) p157 (in Chinese)

Form invariance of Gibbs-Appell equations for variable mass holonomic systems*

Li Ren-Jie　Qiao Yong-Fen　Meng Jun

(*Engineering College of Northeast Agricultural University*, *Harbin* 150030, *China*)

(Received 12 May 2001; revised manuscript received 17 July 2001)

ABSTRACT

In this paper, the Gibbs-Appell (G-A) equations for variable mass holonomic systems were established, then the definition and criterion of the form invariance of G-A equations under the infinitesimal transformations of groups were given. Next, a conserved quantity can be deduced by using this form invariance under certain conditions, and an example was given.

Keywords: analytical mechanics, variable mass holonomic system, Gibbs-Appell equation, invariance, conserved quantity

PACC: 0320, 0200

* Project supported by the Heilongjiang Natural Science Foundation, China (Grant NO. 9507).