第 51 卷 第 1 期 2002 年 1 月
1000-3290/2002/51(01)/0006-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.1,January,2002

TDGL 方程的微扰理论*

刘天贵 颜家壬† 潘留仙

(湖南师范大学物理系,长沙 410081)

(2001 年 1 月 7 日收到;2001 年 4 月 4 日收到修改稿)

在一阶近似下,获得了微扰对 TDGL(Time Dependent Ginzburg-Landau)方程的静态孤子解的影响,即求得了孤子参数随时间慢变量的变化情况和一阶修正的一般表达式,以及一个特例的具体表式.

关键词:静态孤子,孤子微扰论

PACC:0340,4720,4735,0545

1 引　　言

众所周知,标准的非线性演化方程的稳态孤子解和静态孤子解在物理学的许多领域(如浅水中的表面波,光纤中的光的传输,超导 Josephson 结,结构相变,液晶等)起着重要的作用,但人们在研究一些具体问题时所提出的方程与标准的非线性演化方程存在一些细微的差异,称之为微扰,而含微扰的孤子方程要严格求解一般是不可能的,孤子微扰理论就应运而生了.以稳态孤子解为出发点的孤子微扰理论(如基于逆散射变换(IST)的微扰理论,基于直接法的微扰理论等等)已日益得到重视[1—7],而以静态孤子解为出发点的孤子微扰理论则很少见.本文将孤子微扰理论直接法[5,7]由以稳态孤子解为出发点延拓到以静态孤子解为出发点,就 TDGL (Time Dependent Ginzburg-Landau)方程以静态孤子解为出发点进行其一般的孤子微扰理论的研究.TDGL 方程是一个重要的非线性演化方程,在许多物理领域中有着重要的作用,如在一维没有热噪声的系统中,通过快速压缩,系统从高温无序态到临界温度以下的某态,在此压缩过程中相位有序化的动力学特征的描述[8,9].在文献[9]中,作者就很具体的物理过程采用线性微扰分析的方法对 TDGL 方程的孤子微扰理论做了研究,而关于此方程的一般孤子微扰理论一直未被全面报道过.

2 理　　论

标准的 TDGL 方程为

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + s - s^3, \tag{1}$$

方程(1)有静态孤子解:

$$s = \tanh(x - x_0), \tag{2}$$

微扰的 TDGL 方程

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + s - s^3 + \alpha R[s], \tag{3}$$

其中 α($0<\alpha\ll 1$)表征微扰强弱的参量,$R[s]$通常为 $s, s_x, s_{xx}, \cdots$的函数.

引进多重尺度时间变量 $t_n = \alpha^n t, n = 1,2,\cdots$,则对 t 的微商需要用下列级数来表示:

$$\partial t \to \partial t + \alpha\partial t_1 + \cdots \tag{4}$$

同时将 s 和 $R[s]$作渐近展开:

$$s = s^{(0)} + \alpha s^{(1)} + \cdots \tag{5}$$

$$R[s] = R[s^{(0)}] + \alpha R^{(1)}[s^{(0)}, s^{(1)}] + \cdots \tag{6}$$

将(4)—(6)式代入方程(3),在一阶近似下,得

$$s_t^{(0)} = \frac{1}{2}s_{xx}^{(0)} + s^{(0)} - (s^{(0)})^3, \tag{7}$$

$$s_t^{(1)} = \frac{1}{2}s_{ss}^{(1)} + s^{(1)} - 3(s^{(0)})^2 s^{(1)} + R[s^{(0)}] - s_{t_1}^{(0)}. \tag{8}$$

零阶近似方程(7)有如同(2)式的静态孤子解:

$$s^{(0)} = \tanh z, z = x - x_0. \tag{9}$$

因为这里要研究的是微扰对方程(1)静态单孤子解

* 国家自然科学基金(批准号:19775013)资助的课题.

† 本文通信作者.E-mail:jryan@hunnu.edu.cn

的影响，且微扰是在初始时刻引进的，所以方程(3)满足的初条件变为

$$s^{(0)}(z,0) = \tanh z, s^{(1)}(z,0) = 0,$$

x_0 为孤子参数(描述孤子的位置)，由于微扰的影响，x_0 将依赖慢时间变量 t_1 的变化而变化，与 t 无关.

$$s_{t_1}^{(0)} = -x_{0t_1}\operatorname{sech}^2 z, \tag{10}$$

引进 z 作为新的空间坐标，$\partial x = \partial z$，$\partial t = \partial t$，则方程(8)变为

$$s_t^{(1)} = \frac{1}{2}\hat{L}s^{(1)} + F(z,t), \tag{11}$$

其中

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dz^2} + 6\operatorname{sech}^2 z - 4,$$

$$F(z,t) = R[s^{(0)}] - s_{t_1}^{(0)}. \tag{12}$$

对(11)式作拉氏变换，得

$$p\bar{s} = \frac{1}{2}\hat{L}\bar{s} + \bar{F}(z,p), \tag{13}$$

$\bar{s}(z,p)$ 和 $\bar{F}(z,p)$ 分别为 $s^{(1)}(z,t)$ 与 $F(z,t)$ 的像.

为了应用本征函数展开法求解方程(13)，我们必须求解本征值问题：$\hat{L}\varphi = \lambda\varphi$，由文献[5]的方法可求得 $\hat{L}$ 的正交完备的本征函数系 $\{\Phi\}$ 如下.

连续谱：

$$\varphi(z,k) = \frac{e^{ikz}}{\sqrt{2\pi(k^4 + 5k^2 + 4)}}(k^2 + 1 + 3ik\tanh z - 3\tanh^2 z),$$

$$\lambda = -(k^2 + 4), (-\infty < k < \infty).$$

分立谱：

$$\varphi_0(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sech}^2 z, \lambda_0 = 0,$$

$$\varphi_1(z) = \frac{\sqrt{6}}{2}\operatorname{sech} z\tanh z, \lambda_1 = -3. \tag{14}$$

将 $\bar{s}(z,p)$ 以 $\{\Phi\}$ 为基，展开

$$\bar{s}(z,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\bar{\omega}(z,k)\varphi(z,k) + \bar{\omega}_0(p)\varphi_0(z) + \bar{\omega}_1(p)\varphi_1(z), \tag{15}$$

将(15)式代入方程(13)，利用 $\{\Phi\}$ 的正交关系得

$$\bar{\omega}(z',k) = \left(p + \frac{k^2+4}{2}\right)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\bar{F}(z',p)\varphi^*(z',k),$$

$$\bar{\omega}_0(p) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\bar{F}(z',p)\varphi_0(z'),$$

$$\bar{\omega}_1(p) = (p + 2/3)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\bar{F}(z',p)\varphi_1(z'). \tag{16}$$

将(16)式代入(15)式得

$$\bar{s}(z,p) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\left(p + \frac{k^2+4}{2}\right)^{-1} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\bar{F}(z',p)\varphi^*(z',k)\varphi(z,k) + \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dz'}{p}\bar{F}(z',p)\varphi_0(z')\varphi_0(z) + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'(p + 3/2)^{-1}\bar{F}(z',p)\varphi_1(z')\varphi_1(z). \tag{17}$$

对(17)式作逆拉氏变换得

$$\begin{aligned} s^{(1)}(z,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H(\tau)H(t-\tau) \cdot e^{-(k^2+4)(t-\tau)/2}F(z',\tau)\varphi^*(z',k)\varphi(z,k) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H(\tau)H(t-\tau) \cdot F(z',\tau)\varphi_0(z')\varphi_0(z) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau H(\tau)H(t-\tau) \cdot e^{-3(t-\tau)/2}F(z',\tau)\varphi_1(z')\varphi_1(z) \\ &= H(t)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty} dk\int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_0^t d\tau e^{-(k^2+4)(t-\tau)/2} \cdot F(z',\tau)\varphi^*(z',k)\varphi(z,k) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_0^t d\tau F(z',\tau)\varphi_0(z')\varphi_0(z) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} dz'\int_0^t d\tau e^{-3(t-\tau)/2} \cdot F(z',\tau)\varphi_1(z')\varphi_1(z)\Big], \end{aligned} \tag{18}$$

式中 $H(\theta)$ 是一阶跃函数

$$H(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta > 0 \\ 0 & \theta < 0 \end{cases} \tag{19}$$

特例，如果在随孤子运动的坐标系中微扰是不含时微扰，即 $F(z,t) = F(z)$，那么(18)式可变为

$$s^{(1)}(z,t) = H(t)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{k^2+4}dk\int_{-\infty}^{+\infty} dz'F(z') \cdot (1 - e^{-(k^2+4)t/2})\varphi^*(z',k)\varphi(z,k)$$

$$+t\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'F(z')\varphi_0(z')\varphi_0(z)$$
$$+\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'F(z')(1-\mathrm{e}^{-3t/2})\varphi_1(z')\varphi_1(z)\Big].\quad(20)$$

显然(20)式右边第二项随着时间的增大而增大为久期项,消除(20)式中的久期项条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}zF(z)\varphi_0(z)=0.\quad(21)$$

由(21)式可得孤子参数随时间慢变量 t_1 的变化:

$$x_{0t_1}=-\frac{3}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}zR[s^{(0)}]\operatorname{sech}^2 z.\quad(22)$$

在条件(21)式下,一阶修正的一般表达式可得到

$$s^{(1)}(z,t)=H(t)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2}{k^2+4}\mathrm{d}k\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'F(z')$$
$$\cdot(1-\mathrm{e}^{-(k^2+4)t/2})\varphi^*(z',k)\varphi(z,k)$$
$$+\frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}z'F(z')(1-\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}t})\varphi_1(z')\varphi_1(z)\Big].\quad(23)$$

此时 $R[s]=-\delta(x)s$.

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+s-s^3-\alpha\delta(x)s,\quad(24)$$

$$R[s^{(0)}]=-\delta(x)s^{(0)}=-\delta(x)\tanh z.\quad(25)$$

由(22)和(23)式很容易获的孤子参数 x_0 随时间慢变量 t_1 的变化情况和一阶修正 $s^{(1)}(z,t)$ 的具体表达式

$$x_{0t_1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi_0(0)\tanh x_0,$$

$$s^{(1)}(z,t)=H(t)\Big[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2\mathrm{d}k}{k^2+4}(1-\mathrm{e}^{-(k^2+4)t/2})$$
$$\cdot\tanh x_0\varphi^*(0,k)\varphi(z,k)$$
$$+\frac{2}{3}(1-\mathrm{e}^{-3t/2})\tanh x_0\varphi_1(0)\varphi_1(z)\Big].\quad(26)$$

我们的计算过程中没有进行任何近似,文献[8]中的 x_{0t_1} 和我们的结论相同,而其中的 $s^{(1)}(z,t)$ 是进行了近似的结果.

3 举例

含有压缩杂质的非守恒 TDGL 系统中的微扰,

[1] Lamb G L 1980 *Element of Soliton Theory* (Wiley, New York) pp259–278

[2] Herman R L 1990 *J. Phys.* **A23** 2327

[3] Tang Y and Yan X H 2000 *Chin. Phys.* **9** 565

[4] Keener J P and Wclaughlin D W 1977 *Phys. Rev.* **A16** 777

[5] Yan J R and Tang Y 1996 *Phys. Rev.* **E54** 6818

[6] Yan J R, Tang Y and Zhou G H 1999 *Commun. Theor. Phys.* **32** 375

[7] Zhao Y M and Yan J R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1976 (in Chinese) [赵永明、颜家壬 1999 物理学报 **48** 1976]

[8] Kawasaki K and Ohta T 1982 *Physica* **116A** 573

[9] Iwai T 1995 *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** 2828

Theory of the perturbation equation of TDGL *

Liu Tian-Gui　Yan Jia-Ren　Pan-Liu-Xian
(*Department of Physics*, *Hunan Normal University*, *Changsha* 410081, *China*)

(Received 7 January 2001; revised manuscript received 4 April 2001)

ABSTRACT

In this paper, in a first-order approximation, we obtain the effects of perturbations on a stationary soliton for TDGLE (time dependent ginzburg-landau equation). Namely, we obtain the soliton parameter variation and the general expression of the first-order correction. At the same time, we give the exact expression of a special example.

Keywords: a stationary soliton, soliton perturbation theory
PACC: 0340, 4720, 4725, 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19775013).