第 51 卷 第 1 期 2002 年 1 月
1000-3290/2002/51(01)/0021-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.1, January, 2002

平面对称黑洞的统计熵*

赵 仁 张丽春

(雁北师范学院物理系，大同 037000)

(2001 年 4 月 4 日收到；2001 年 6 月 22 日收到修改稿)

避开求解各种粒子波动方程的困难，直接应用量子统计的方法，计算平面对称黑面背景下玻色场与费米场的配分函数，得到黑面熵的积分表达式．然后应用改进的 brick-wall 方法-膜模型，计算黑面视界所对应的统计熵．在所得结果中当所取的积分下限和上限都趋于视界上时，可得到黑面熵与相应黑面视界面积成正比的关系，不存在原 brick-wall 方法中的舍去项与对数发散项．整个计算过程，物理图像清楚，计算简单，为研究黑洞熵提供了一条简捷的新途径．

关键词：量子统计，膜模型，黑面熵

PACC：0420，9760L

1 引 言

黑洞熵是理论物理的重要课题之一，因为熵具有统计意义，因而对黑洞熵的理解涉及到黑洞微观本质的认识，对它的充分理解，需要一个好的量子引力理论，但目前这方面的工作并不令人满意．黑洞熵的统计起源问题并没有得到解决[1]．另一方面，大量文献对球坐标系下各种黑洞熵的讨论都给出与视界面积成正比的结论[2—5]．然而所有计算方法都使人困惑不解的是，为什么黑洞视界外的标量场或 Dirac 场的熵就是黑洞本身的熵？众所周知，黑洞熵是与视界面积成正比的，而且视界的存在是黑洞最基本的性质．已经证明，视界的存在普遍导致 Hawking 效应[6]．又黑洞熵的有无直接与视界的存在与否有关[7]．那么，由此启示我们：与视界面积成正比是黑洞熵的内禀性质，它的取值大小与视界外的辐射场无关，而只是视界作为三维空间里的一个二维膜所具有的性质，此二维膜上的量子状态数是否对应黑洞的熵．如果真如此，那么计算这个膜的熵就成为首要的问题．

本文，避开求解各种粒子波动方程的困难，直接应用量子统计的方法，计算具有平面对称的，黑面背景下玻色场与费米场的配分函数，得到黑面熵的积分表达式．然后应用改进的 brick-wall 方法－膜模型[8]，计算黑面视界所对应的统计熵．在所得结果中当所取的积分下限和上限都趋于视界上时，可得到黑面熵与相应黑面视界面积成正比的关系，不存在原 brick-wall 方法中的舍去项与对数发散项．为研究各种时空背景下，黑洞的熵提供了一条简捷的新途径．

2 平面对称时空

平面对称时空线元[9]

$$\mathrm{d}S^2 = -B(r)\mathrm{d}t^2 + B^{-1}(r)\mathrm{d}r^2 + C(r)(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2) \tag{1}$$

式中

$$B(r) = -\frac{4\pi M}{N\alpha^N}r^{1-N} + \frac{6\alpha^2}{N(2N-1)}r^N + \frac{2Q^2}{N\alpha^{2N}}r^{-N},$$

$$C(r) = (\alpha r)^N.$$

当 $1/2<N<2$ 时，黑洞的视界位置满足方程 $B(r)=0$，即

$$\frac{3\alpha^2}{(2N-1)}r^{2N} - \frac{2\pi M}{\alpha^N}r + \frac{Q^2}{\alpha^{2N}} = 0. \tag{2}$$

黑洞的辐射温度为

$$T_{\mathrm{H}} = \beta_0^{-1} = \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi M(1-N)}{N\alpha^N}r_{\mathrm{H}}^{-N} + \frac{3\alpha^2}{(2N-1)}r_{\mathrm{H}}^{N-1} - \frac{Q^2}{\alpha^{2N}}r_{\mathrm{H}}^{-N-1}\right) = \frac{1}{2\pi}\frac{B'(r_{\mathrm{H}})}{2}. \tag{3}$$

---

* 国家自然科学基金(批准号：10073002)及山西省自然科学基金(批准号：20001009)资助的课题．

对应单位 xoy 平面的黑平面视界面积为

$$A_{\mathrm{H}} = (\alpha r_{\mathrm{H}})^{2N}. \tag{4}$$

3 玻色场熵

按照文献[10]的观点,黑洞视界附近的固有辐射温度为

$$T = \frac{T_{\mathrm{H}}}{\lambda}, \tag{5}$$

式中 $\lambda = \sqrt{B(r)}$,是红移因子.

对于玻色气体,系统的配分函数为

$$\ln Z = -\sum_i g_i \ln(1 - \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{6}$$

在单位体积内,能量在 ε 到 $\varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon$ 或 ν 到 $\nu + \mathrm{d}\nu$ 间隔内,粒子的量子态数应为

$$g(\nu)\mathrm{d}\nu = j4\pi\nu^2\mathrm{d}\nu. \tag{7}$$

式中 j 为粒子的自旋简并度.由于时空(1)式中的单位 xoy 平面,对应任意 r 点的超曲面为 $\alpha^{2N}r^{2N}$,则对应黑平面视界外附近,任意厚度内系统的配分函数为

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{1}{n}\mathrm{e}^{-n\beta\varepsilon_i} \\ &= j4\pi\alpha^{2N}\sum_{n=1}\frac{1}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{nh\nu}{T}}\nu^2\mathrm{d}\nu\int r^{2N}\frac{\mathrm{d}r}{\lambda} \\ &= j\alpha^{2N}\frac{\pi^2}{90}\int r^{2N}\frac{\mathrm{d}r}{\beta^3\lambda}.\end{aligned} \tag{8}$$

其中$\frac{1}{\beta} = T$,利用熵与配分函数的关系

$$S = \ln Z - \beta_0\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta_0}, \tag{9}$$

可得

$$S_b = j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^{2N}}{\beta_0^3}\int r^{2N}\frac{\mathrm{d}r}{\lambda^4}. \tag{10}$$

式中 $\beta = \beta_0\lambda$,$\beta_0 = \frac{1}{T_{\mathrm{H}}}$.对(10)式,取积分区间$[r_{\mathrm{H}} + \zeta, r_{\mathrm{H}} + K\zeta]$,式中 ζ 为一非负的小量,K 是大于 1 的常数.则(10)式可写为

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{b}} &= j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^{2N}}{\beta_0^3}\int_{r_{\mathrm{H}}+\zeta}^{r_{\mathrm{H}}+K\zeta}\frac{r^{2N}\mathrm{d}r}{\lambda^4} = j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^{2N}}{\beta_0^3} \\ &\cdot\int_{r_{\mathrm{H}}+\zeta}^{r_{\mathrm{H}}+K\zeta}\frac{N^2r^{4N}}{4\left(\frac{3\alpha^2}{(2N-1)}r^{2N} - \frac{2\pi M}{\alpha^N}r + \frac{Q^2}{\alpha^{2N}}\right)^2}\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{11}$$

当 $N = 1$ 时,上式化为

$$S_{\mathrm{b}} = j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^2}{\beta_0^3}\int_{r_{\mathrm{H}}+\zeta}^{r_{\mathrm{H}}+K\zeta}\frac{r^4}{36\alpha^4(r - r_{\mathrm{H}})^2(r - r_-)^2}\mathrm{d}r, \tag{12}$$

式中

$$r_{\mathrm{H}} = \frac{1}{3\alpha^3}\left(\pi M + \sqrt{\pi^2M^2 - 3\alpha^2Q^2}\right),$$

$$r_- = \frac{1}{3\alpha^3}\left(\pi M - \sqrt{\pi^2M^2 - 3\alpha^2Q^2}\right)$$

分别为黑洞的外内视界位置,

$$\beta_0^{-1} = \frac{1}{2\pi}\left(3\alpha^2 - \frac{Q^2}{\alpha^2r_{\mathrm{H}}^2}\right) = \frac{3\alpha^2}{2\pi}\left(\frac{r_{\mathrm{H}} - r_-}{r_{\mathrm{H}}}\right).$$

对(12)式积分可得

$$\begin{aligned}S_{\mathrm{b}} &= j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^2}{\beta_0^3}\frac{1}{36\alpha^4}\frac{r_{\mathrm{H}}^4}{(r_{\mathrm{H}} - r_-)^2}\left[\frac{K-1}{K\zeta}\right] \\ &+ j\frac{2\pi^2}{45}\frac{\alpha^2}{\beta_0^3}\frac{1}{36\alpha^4}F(K,\zeta),\end{aligned} \tag{13}$$

式中

$$\begin{aligned}F(K,\zeta) &= 4r_{\mathrm{H}}^3\ln K + 6r_{\mathrm{H}}^2\zeta(K-1) \\ &+ 2r_{\mathrm{H}}\zeta^2(K^2-1) + \frac{1}{3}\zeta^3(K^3-1).\end{aligned}$$

由文献[11]中的(3.17)式知,当 $K\zeta = L \gg r_{\mathrm{H}}$ 时,如取 $\zeta = \frac{T_{\mathrm{H}}}{90}$,可得到黑洞熵与视界面积成正比的关系.在(13)式,我们引入了参数 K,为使黑洞熵与参数 K 无关,我们取

$$\zeta = \frac{T_{\mathrm{H}}}{90}\frac{K-1}{K}, \tag{14}$$

则黑面熵可表为

$$S_{\mathrm{b}} = j\frac{1}{4}\alpha^2r_{\mathrm{H}}^2 + j\frac{\pi^2}{45}\frac{1}{\beta_0^3}\frac{1}{18\alpha^2}F(K,\zeta), \tag{15}$$

当 $K \to 1$ 时,$\zeta \to 0$,$K\zeta \to 0$,即所取上限和下限都趋于黑面的外视界上,而$\lim\limits_{N\to 1}F(K,\zeta) \to 0$,故熵为

$$S_{\mathrm{b}} = j\frac{1}{4}\alpha^2r_{\mathrm{H}}^2 = j\frac{1}{4}A_{\mathrm{H}}. \tag{16}$$

式中 $A_{\mathrm{H}} = \alpha^2r_{\mathrm{H}}^2$ 为单位 xoy 平面所对应的黑面外视界面积.由于我们在计算中把积分上限和下限期都趋于黑面的外视界上,故(16)式中所得到的熵与视界外的辐射场无关,而只是视界作为三维空间里的一个一维膜所具有的性质,故所得熵为此一维膜具有的特性,应为黑面熵.当辐射粒子的 $j = 1$ 时,我们得到黑面熵为对应视界面积的四分之一.

4 费米场的熵

对于费米系统,对应的配分函数

$$\ln Z = \sum_i g_i \ln(1 + e^{-\beta\varepsilon_i}). \tag{17}$$

由(7)式,可得

$$\begin{aligned}\ln Z &= \sum_i g_i \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} e^{-n\beta\varepsilon_i} \\ &= i4\pi \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{T}} \nu^2 d\nu \int \alpha^2 r^2 \frac{dr}{\lambda} \\ &= i \frac{2\pi^2}{45} \frac{\alpha^2}{\beta_0^3} \frac{7}{8} \int_{r_H+\zeta}^{r_H+K\zeta} \frac{r^4}{36\alpha^4 (r - r_H)^2 (r - r_-)^2} dr.\end{aligned} \tag{18}$$

利用第三部分的结果,可得对应费米粒子的黑面熵为

$$S_f = i \frac{7}{8} \frac{1}{4} \alpha^2 r_H^2 = i \frac{1}{4} \frac{7}{8} A_H. \tag{19}$$

式中 i 为辐射费米粒子的自旋简并度.

5　结　　论

通过以上分析,在黑面背景下,从统计物理学角度出发,直接运用统计方法求解各种场的配分函数,避开了求解波动方程的困难,克服了近似处理的方式.由于我们运用了改进的 brick-wall 方法 – 膜模型,计算各种场的熵,不存在态密度在视界附近发散问题.在我们的计算中当 $K\to 1$ 时,$\zeta\to 0$,$K\zeta\to 0$,即积分的上限和下限都趋于黑面的外视界上,然而由(16)和(19)式知,所得黑面熵为相应黑面视界面积的四分之一.计算的结果与辐射场无关,只与黑面视界面积有关.故我们计算的结论应为黑面熵.不存在原 brick-wall 方法中的对数发散项与舍去项.

由于我们采用了膜模型,所以我们把计算黑面熵转化为计算在视界附近求相应的熵,然后再令所取的截断因子趋于零,即所取的区间趋于三维空间的一个二维膜上,这样不但能够克服掉原 brick-wall 方法中无法回避的困难.而且能够计算非平衡系统的熵,并且在计算中考虑到辐射粒子自旋对熵的影响.整个计算过程,物理图像清楚,计算简单,为研究各种时空黑洞熵提供了一条简捷的新途径.

[1] Liberati S 1997 *IL Nuovo Cimento*., **B112** 405

[2] Frolov V P and Furaev D V 1998 *Class Quantum Grav*. **15** 2041

[3] Lee H, Kim S W and Kim W T 1996 *Phys*. *Rev*., **D54** 6559

[4] Frolov V P, Fursaev D V and Zelnikov A I 1996 *Phys Rev*. **D54** 2711

[5] Liu W B and Zhao Z 2000 *Phys Rev*. **D61** 063003

[6] Zhao Z 1981 *Acta Phys*. *Sin*. **30** 1508(in Chinese)[赵　峥 1981 物理学报 **30** 1508]

[7] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys*. *Rev*. **D15** 2752

[8] Li X and Zhao Z 2000 *Phys Rev*. **D62** 104001

[9] Cai R G and Zhang Y Z 1996 *Phys Rev*. **D54** 4891

[10] Tolman R C 1934 *Relativity*, *Thermodynamics and Cosmology* (Oxford University Press, Oxford)

[11] Hooft G 't 1985 *Nucl*. *Phys*. **B256** 727

Statistical entropy of a plane symmetry black hole*

Zhao Ren Zhang Li-Chun
(*Department of Physics*, *Yanbei Normal Institute*, *Datong* 037000, *China*)

(Received 4 April 2001; revised manuscript received 22 June 2001)

ABSTRACT

By using the method of quantum statistics, we directly derive the partition function of the bosonic and ermionic field on black plane and obtain the integral expression of the black plane's entropy, which avoids the difficulty in solving the wave equation of various particles. Then via the improved brick – wall method, membrane model, we calculate the black plane's entropy and find out that if we let the integral upper and lower limits both tend to the horizon, the entropy of the black plane is proportional to the area of horizon. In our result, the stripped term and the divergent logarithmic term in the original brick – wall method no longer exist. In the whole process, we do not take any approximation. We offer a new simple and direct way of calculating the entropy of different complicated black holes.

Keywords: quantum statistics, entropy of black plane, membrane model
PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10073002) and by the Natural Science Foundation Shanxi Province, China (Grant No. 20001009).