

随机非球形粒子全极化散射的 时间相关 Mueller 矩阵解*

常 梅 金亚秋†

(复旦大学波散射与遥感中心, 上海 200433)

(2001 年 6 月 6 日收到, 2001 年 7 月 16 日收到修改稿)

在与时间相关的矢量辐射传输方程推导一阶 Mueller 矩阵解, 用来模拟 Gauss 型平面脉冲波入射下, 一层随机、非均匀取向非球形粒子的全极化双站散射. 数值计算了同极化和去极化脉冲响应, 与入射脉冲进行了比较, 说明了随机介质的物理参数, 如粒子的取向和占空比、入射角、极化以及层厚等对脉冲响应的影响.

关键词: 平面脉冲波, 非球形粒子, Mueller 矩阵

PACC: 4110H, 4220, 2975

1 引 言

随着 SAR 合成孔径雷达观测技术和其他高技术的发展, 对随机非球形粒子的全极化散射的研究已日显重要^[1,2]. Jin 等人^[3,4]发展了 Mueller 矩阵解, 用于研究任一极化平面波入射时, 随机非球形粒子的同极化和去极化后向散射. 然而, 当入射波是平面脉冲波时, 波的散射和辐射传输由时间相关的矢量辐射传输(VRT)方程描述. 这提出了随机非球形粒子对平面脉冲波的全极化散射响应的 Mueller 矩阵解的问题. 关于随机介质对脉冲波的响应问题, 也已有了不少研究. 例如, 利用双频互相干函数, Hong 和 Ishimaru^[5,6], Liu 和 Yeh^[7], Ito^[8]等人研究了随机介质中标量脉冲波的传输问题; Oguchi 和 Ito^[9]则得到了一圆极化平面脉冲波正入射到半空间球形雨滴上时, 双频矢量辐射传输方程的数值解; Whitman 和 Schwing 等人^[10]则讨论了脉冲波在强前向散射随机介质中的传播.

本文从时间相关的 VRT 方程出发, 采用 Fourier 变换和迭代法, 得到了粒子的散射以及粒子和下垫面相互作用的全极化响应的一阶 Mueller 矩阵解. 数值计算了同极化和去极化脉冲响应, 并与入射脉冲进行了比较. 对随机介质的各种物理参数, 例如粒子的取向和占空比、入射角、极化、层厚等对脉冲回波

的影响作了讨论.

2 时间相关的 VRT 方程

考虑一任意极化的平面脉冲波入射到有下垫面的一层随机非球形粒子上, 下垫面法线方向为正 z 轴方向, 入射矢量与负 z 轴的夹角为 θ_0 , 即写入射角为 $(\pi - \theta_0, \varphi_0)$. 非球形粒子的空间取向由 Euler 角 (α, β, γ) 的概率密度函数来描述. 将散射粒子层中传输的波分为上行波和下行波, 其分别满足的时间相关的 VRT 方程可写为^[3] ($0 \leq \theta < \pi/2$)

$$\begin{aligned} & \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \bar{K}(\theta, \varphi, z, t) \\ &= -\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi) \bar{K}(\theta, \varphi, z, t) + \bar{S}(\theta, \varphi, z, t) \\ & - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}(\theta, \varphi, z, t), \quad (1a) \\ & - \cos \theta \frac{\partial}{\partial z} \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, t) \\ &= -\bar{\kappa}_e(\pi - \theta, \varphi) \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, t) \\ & + \bar{W}(\theta, \varphi, z, t) - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial t} \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, t), \quad (1b) \end{aligned}$$

其中 $\bar{\kappa}_e$ 为 4×4 维的消光矩阵, c_0 为自由空间的光速, 多次散射函数写为

* 国家自然科学基金(批准号: 49831060, 60171009)和国家重点基础研究发展规划项目资助的课题.

† 通信联系人.

$$\begin{aligned} & \bar{S}(\theta, \varphi, z, t) \\ &= \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin\theta' [\bar{P}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \\ & \quad \cdot \bar{K}(\theta', \varphi', z, t) + \bar{P}(\theta, \varphi; \pi - \theta', \varphi') \\ & \quad \cdot \bar{K}(\pi - \theta', \varphi', z, t)], \end{aligned} \quad (2)$$

$\bar{W}(\theta, \varphi, z, t)$ 与 $\bar{S}(\theta, \varphi, z, t)$ 相同, 但将所有的 θ 均用 $\pi - \theta$ 替换. \bar{P} 为相矩阵 (θ', φ') 和 (θ, φ) 分别为入射和散射的方向角.

边界条件可写为

$$\begin{aligned} & \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z = 0, t) \\ &= \bar{I}_0(t) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \cdot \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (3a) \\ & \bar{K}(\theta, \varphi, z = -d, t) \\ &= \bar{R}(\theta) \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z = -d, t), \end{aligned} \quad (3b)$$

其中 $\bar{I}_0(t)$ 为入射的 Stokes 矢量, $\bar{R}(\theta)$ 为下垫面的反射率矩阵.

3 Fourier 变换与迭代法

采用 Fourier 变换

$$\bar{K}(\theta, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\theta, \varphi, z, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (4a)$$

$$\bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (4b)$$

这样, NRT 方程 (1a, b) 变换成

$$\begin{aligned} & \cos\theta \frac{d}{dz} \bar{K}(\theta, \varphi, z, \omega) \\ &= - [\bar{\kappa}_e(\theta, \varphi) + j\omega \bar{U}/c_0] \bar{K}(\theta, \varphi, z, \omega) \\ & \quad + \bar{S}(\theta, \varphi, z, \omega), \quad (5a) \\ & - \cos\theta \frac{d}{dz} \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, \omega) \\ &= - [\bar{\kappa}_e(\pi - \theta, \varphi) + j\omega \bar{U}/c_0] \\ & \quad \cdot \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, \omega) + \bar{W}(\theta, \varphi, z, \omega), \end{aligned} \quad (5b)$$

其中 \bar{U} 为 4×4 维单位矩阵, 方程 (2) 变换为

$$\begin{aligned} \bar{S}(\theta, \varphi, z, \omega) &= \int_0^{\pi/2} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \sin\theta' [\bar{P}(\theta, \varphi; \theta', \varphi') \\ & \quad \cdot \bar{K}(\theta', \varphi', z, \omega) \\ & \quad + \bar{P}(\theta, \varphi; \pi - \theta', \varphi') \\ & \quad \cdot \bar{K}(\pi - \theta', \varphi', z, \omega)]. \end{aligned} \quad (6)$$

边界条件 (3a, b) 变换为

$$\begin{aligned} & \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z = 0, \omega) \\ &= \bar{I}_0(\omega) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0), \quad (7a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bar{K}(\theta, \varphi, z = -d, \omega) \\ &= \bar{R}(\theta) \cdot \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z = -d, \omega). \end{aligned} \quad (7b)$$

假设矩阵 $[\bar{\kappa}_e(\pi - \theta, \varphi) + j\omega \bar{U}/c_0]$ 的特征值为 $\zeta_i(\pi - \theta, \varphi)$, $i = 1, 2, 3, 4$, 相应的特征矢量矩阵为 $\bar{E}(\pi - \theta, \varphi)$. 方程 (5b) 在边界条件 (7a) 下的形式解可获得为^[3]

$$\begin{aligned} & \bar{K}(\pi - \theta, \varphi, z, \omega) \\ &= \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \bar{D} [\zeta(\pi - \theta, \varphi) z \sec\theta] \\ & \quad \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \cdot \bar{I}_0(\omega) \\ & \quad \cdot \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \\ & \quad + \sec\theta \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \int_z^0 \bar{D} [\zeta(\pi - \theta, \varphi) \\ & \quad \cdot (z - z') \sec\theta] \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \bar{W}(\theta, \varphi, z', \omega) dz', \end{aligned} \quad (8a)$$

其中 $\bar{D} [\zeta(\pi - \theta, \varphi) z \sec\theta]$ 为 4×4 维对角矩阵, 其第 ii 个元素为 $\exp[\zeta_i(\pi - \theta, \varphi) z \sec\theta]$.

同样, 可得方程 (5a) 在边界条件 (7b) 下的形式解为

$$\begin{aligned} & \bar{K}(\theta, \varphi, z, \omega) \\ &= \bar{E}(\theta, \varphi) \bar{D} [-\zeta(\theta, \varphi) (z + d) \sec\theta] \\ & \quad \cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \bar{D} [-\zeta(\pi - \theta, \varphi) d \sec\theta] \\ & \quad \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \cdot \bar{I}_0(\omega) \delta(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ & \quad \cdot \delta(\varphi - \varphi_0) + \sec\theta \bar{E}(\theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \bar{D} [-\zeta(\theta, \varphi) (z + d) \sec\theta] \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \int_{-d}^0 \bar{D} [-\zeta(\pi - \theta, \varphi) (z' + d) \sec\theta] \\ & \quad \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \cdot \bar{W}(\theta, \varphi, z', \omega) dz' \\ & \quad + \sec\theta \int_{-d}^z \bar{E}(\theta, \varphi) \bar{D} [\zeta(\theta, \varphi) \\ & \quad \cdot (z' - z) \sec\theta] \cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \\ & \quad \cdot \bar{S}(\theta, \varphi, z', \omega) dz'. \end{aligned} \quad (8b)$$

已知 $\bar{\kappa}_e$ 的特征值为 ξ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 相应的特征矢量矩阵为 \bar{E} ^[3]. 容易证得 $[\bar{\kappa}_e + j\omega \bar{U}/c_0]$ 的特征

值 $\zeta_i = \xi_i + j\omega/c_0$, 相应的特征矢量矩阵与 $\bar{\kappa}_e$ 的相同.

应用迭代法求解积分方程(8a, b). 将方程(8a, b)右边的第一项作为零阶解, 此即相干波的 Stokes 矢量, 代入方程(8a, b)中的 \bar{S}, \bar{W} , 得到一阶解

$$\begin{aligned}
 & \bar{I}^{-1}(\theta, \varphi, z=0, \omega) \\
 &= \sec\theta \bar{E}(\theta, \varphi) \int_{-d}^0 dz' \bar{D}[\xi(\theta, \varphi) z' \sec\theta] \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \\
 & \cdot \{\bar{P}(\theta, \varphi, i\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \bar{D}[\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot z' \sec\theta_0] \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0(\omega) \exp[j\omega z'(\sec\theta + \sec\theta_0)/c_0] \\
 & + \bar{P}(\theta, \varphi, i\theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\theta_0, \varphi_0) \bar{D}[-\xi(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot (z' + d) \sec\theta_0] \bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{R}(\theta_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \cdot \bar{I}_0(\omega) \\
 & \cdot \exp\{-j\omega[(2d + z') \sec\theta_0 - z' \sec\theta]/c_0\} \\
 & + \sec\theta \bar{E}(\theta, \varphi) \bar{D}[-\xi(\theta, \varphi) d \sec\theta] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \\
 & \cdot \int_{-d}^0 dz' \bar{D}[-\xi(\pi - \theta, \varphi) \{z' + d\} \sec\theta] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \\
 & \cdot \{\bar{P}(\pi - \theta, \varphi, i\pi - \theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) z' \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \cdot \bar{I}_0(\omega) \\
 & \cdot \exp\{-j\omega[(2d + z') \sec\theta - z' \sec\theta_0]/c_0\} \\
 & + \bar{P}(\pi - \theta, \varphi, i\theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\theta_0, \varphi_0) \{z' + d\} \sec\theta_0] \bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{R}(\theta_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec\theta_0] \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0(\omega) \exp[-j\omega(2d + z')] \\
 & \cdot (\sec\theta + \sec\theta_0)/c_0 \}]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

对方程(9)作 Fourier 逆变换, 得到

$$\begin{aligned}
 & \bar{I}^{-1}(\theta, \varphi, z=0, t) \\
 &= \sec\theta \bar{E}(\theta, \varphi) \int_{-d}^0 dz' \bar{D}[\xi(\theta, \varphi)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot z' \sec\theta] \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \\
 & \cdot \{\bar{P}(\theta, \varphi, i\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) z' \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0[t + z'(\sec\theta + \sec\theta_0)/c_0] \\
 & + \bar{P}(\theta, \varphi, i\theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\theta_0, \varphi_0) \{z' + d\} \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \bar{R}(\theta_0) \\
 & \cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \bar{D}[-\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0\{t - [(2d + z') \sec\theta_0 - z' \sec\theta]/c_0\} \\
 & + \sec\theta \bar{E}(\theta, \varphi) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\theta, \varphi) d \sec\theta] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi) \\
 & \cdot \int_{-d}^0 dz' \bar{D}[-\xi(\pi - \theta, \varphi) \{z' + d\} \sec\theta] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \\
 & \cdot \{\bar{P}(\pi - \theta, \varphi, i\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) z' \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0\{t - [(2d + z') \sec\theta - z' \sec\theta_0]/c_0\} \\
 & + \bar{P}(\pi - \theta, \varphi, i\theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\theta_0, \varphi_0) \{z' + d\} \sec\theta_0] \\
 & \cdot \bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{R}(\theta_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{D}[-\xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec\theta_0] \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\
 & \cdot \bar{I}_0[t - (2d + z') \{ \sec\theta + \sec\theta_0 \} / c_0 \}]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

注意到方程(10)右边的四项分别对应四种散射过程: 1) 粒子的体散射; 2) 下垫面的反射再到粒子的散射; 3) 粒子的散射再到下垫面的反射; 4) 下垫面的反射到粒子的散射, 再由下垫面的反射.

4 Gauss 型脉冲波入射下的 Mueller 矩阵解

假设入射波为任一极化 (χ, ψ) 的 Gauss 型平面脉冲波

$$\bar{I}_0(t) = I_0(t) \bar{I}_{i0}(\chi, \psi), \quad (11)$$

其中

$$I_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right). \quad (12)$$

这里 $\sigma = T_W / \sqrt{2 \ln 2}$, $2T_W$ 为半功率脉冲宽度, $\bar{I}_{i0}(\chi, \psi)$ 为归一化的入射辐射强度,

$$\bar{I}_{i0} = [(1 - \cos 2\chi \cos 2\psi) / 2, (1 + \cos 2\chi \cos 2\psi) / 2, -\cos 2\chi \sin 2\psi, \sin 2\chi]^T, \quad (13)$$

其中 $\chi \in [-45^\circ, 45^\circ]$ 和 $\psi \in [0^\circ, 180^\circ]$ 分别为入射极化的椭圆角和方位角. 当 $\chi = 0^\circ, \psi = 0^\circ$ 或 180° 时, 有 $\bar{I}_{i0} = [0, 1, 0, 0]^T$, 入射波为水平极化波; 当 $\chi = 0^\circ, \psi = 90^\circ$ 时, $\bar{I}_{i0} = [1, 0, 0, 0]^T$ 为垂直极化波; 当 $\chi = \pm 45^\circ$ 时, $\bar{I}_{i0} = [0.5, 0.5, 0, \pm 1]^T$ 为圆极化波; 其他情况为椭圆极化.

将方程(11—13)代入(10)式, 利用积分式^[11]

$$\int dx \exp(-ax^2 - 2bx - c) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2 - ac}{a}\right) \operatorname{erf}\left(\sqrt{ax} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right) + \text{const.} \quad (14)$$

得到一阶 Mueller 矩阵解

$$\bar{I}_s(\theta, \varphi, z=0, t) = \bar{M}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0, \varphi_0, it) \bar{I}_{i0}(\chi, \psi), \quad (15)$$

其中 $\bar{M}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0, \varphi_0, it)$ 为时间相关的 Mueller 矩阵, 我们推导得其各元素表达式为

$$\begin{aligned} M_{\theta}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0, \varphi_0, it) &= \sec \theta \sum_{k,i} E_{ik}(\theta, \varphi) \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{P}(\theta, \varphi, \pi - \theta_0, \varphi_0) \\ &\cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ki} \frac{1}{2R_1} \{\exp(2\sigma^2 B_1^2/R_1^2 - C_1) \\ &\cdot [\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_1/R_1) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_1/R_1 \\ &- R_1 d/\sqrt{2}\sigma)]\}_{ki} \{\bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ij} \\ &+ \sec \theta \sum_{k,i} E_{ik}(\theta, \varphi) \{\bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{P}(\theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) \\ &\cdot \bar{E}(\theta_0, \varphi_0)\}_{ki} \frac{1}{2|R_2|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\cdot \{\exp(2\sigma^2 B_2^2/R_2^2 - C_2) [\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2/|R_2|) \\ &- \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2/|R_2| - |R_2| d/\sqrt{2}\sigma)]\}_{ki} \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \bar{R}(\theta_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\ &\cdot \bar{D} - \xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0\} \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ij} \\ &+ \sec \theta \sum_{k,i} \{\bar{E}(\theta, \varphi) \bar{D} - \xi(\theta, \varphi) d \sec \theta\} \\ &\cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi)\}_{ki} \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \bar{P}(\pi - \theta, \varphi, \pi - \theta_0, \varphi_0) \\ &\cdot \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ki} \\ &\cdot \frac{1}{2|R_2|} \{\exp(2\sigma^2 B_3^2/R_2^2 - C_3) \\ &\cdot [\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_3/|R_2|) \\ &- \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_3/|R_2| - |R_2| d/\sqrt{2}\sigma)]\}_{ki} \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ij} \\ &+ \sec \theta \sum_{k,i} \{\bar{E}(\theta, \varphi) \bar{D} - \xi(\theta, \varphi) d \sec \theta\} \\ &\cdot \bar{E}^{-1}(\theta, \varphi) \bar{R}(\theta) \bar{E}(\pi - \theta, \varphi)\}_{ki} \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\pi - \theta, \varphi) \\ &\cdot \bar{P}(\pi - \theta, \varphi, \theta_0, \varphi_0) \bar{E}(\theta_0, \varphi_0)\}_{ki} \\ &\cdot \frac{1}{2R_1} \{\exp(2\sigma^2 B_4^2/R_1^2 - C_4) [\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_4/R_1) \\ &- \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_4/R_1 - R_1 d/\sqrt{2}\sigma)]\}_{ki} \\ &\cdot \{\bar{E}^{-1}(\theta_0, \varphi_0) \bar{R}(\theta_0) \bar{E}(\pi - \theta_0, \varphi_0) \\ &\cdot \bar{D} - \xi(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0\} \\ &\cdot \bar{E}^{-1}(\pi - \theta_0, \varphi_0)\}_{ij}, \quad (16) \end{aligned}$$

其中 $i, j, l, k = 1, 2, 3, 4$, $\operatorname{erf}(\cdot)$ 为误差函数. 特征矩阵 \bar{E} 及其逆矩阵 \bar{E}^{-1} 和对角矩阵 \bar{D} 均与粒子的前向散射振幅函数有关. 相矩阵 \bar{P} 可由函数 $n_0 \langle f_{pq} f_{st}^* \rangle (p, q, r, s, t = v, h)$ 构造. 其中 n_0 为单位体积的粒子数, f_{pq}, f_{st}^* 表示粒子的散射振幅函数及其共轭. 角括号 $\langle \cdot \rangle$ 表示对取向求系综平均. f_{pq}, \bar{E}, \bar{D} 和 \bar{P} 的解析表达式可参见文献[3, 4]. (16) 式中其他函数的定义为

$$R_1 = (\sec \theta + \sec \theta_0) c_0, \quad (17a)$$

$$R_2 = (\sec \theta - \sec \theta_0) c_0, \quad (17b)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= [R_1 t/\sigma^2 - \xi_k(\theta, \varphi) \sec \theta \\ &- \xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0] / 2, \quad (18a) \end{aligned}$$

$$C_1 = t^2 \mathcal{K}(2\sigma^2), \quad (18b)$$

$$B_2 = -[-R_2(t - 2d \sec \theta_0 / c_0) \mathcal{V} \sigma^2 + \xi_k(\theta, \varphi) \sec \theta - \xi_k(\theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0] \mathcal{V} 2, \quad (18c)$$

$$C_2 = (t - 2d \sec \theta_0 / c_0) \mathcal{K}(2\sigma^2) + \xi_k(\theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0, \quad (18d)$$

$$B_3 = -[R_2(t - 2d \sec \theta / c_0) \mathcal{V} \sigma^2 - \xi_k(\pi - \theta, \varphi) \sec \theta + \xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0] \mathcal{V} 2, \quad (18e)$$

$$C_3 = (t - 2d \sec \theta / c_0) \mathcal{K}(2\sigma^2) + \xi_k(\pi - \theta, \varphi) d \sec \theta, \quad (18f)$$

$$B_4 = -[R_1(t - dR_1) \mathcal{V} \sigma^2 - \xi_k(\pi - \theta, \varphi) \sec \theta - \xi_k(\theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0] \mathcal{V} 2, \quad (18g)$$

$$C_4 = (t - 2dR_1) \mathcal{K}(2\sigma^2) + \xi_k(\pi - \theta, \varphi) d \sec \theta + \xi_k(\theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0. \quad (18h)$$

当散射角 $\theta \rightarrow \theta_0$ (如在镜向和后向散射方向) 时, 有 $R_2 \rightarrow 0$ 这时方程 (16) 的第二项和第三项必须修正为(见附录):

$$\lim_{|R_2| \rightarrow 0} \frac{1}{2|R_2|} \exp(\mathcal{K}(2\sigma^2 B_2^2 / R_2^2 - C_2)) \cdot \{ \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|) - \operatorname{erf}[\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2| - |R_2| d \mathcal{K}(\sqrt{2}\sigma)] \} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\exp[-\xi_k(\theta, \varphi) d \sec \theta] - \exp[-\xi_k(\theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0]}{\xi_k(\theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0 - \xi_k(\theta, \varphi) \sec \theta} \\ \times \exp\{ -(t - 2d \sec \theta_0 / c_0) \mathcal{K}(2\sigma^2) \}, \quad (19a)$$

$$\lim_{|R_2| \rightarrow 0} \frac{1}{2|R_2|} \exp(\mathcal{K}(2\sigma^2 B_3^2 / R_2^2 - C_3)) \cdot \{ \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_3 / |R_2|) - \operatorname{erf}[\sqrt{2}\sigma B_3 / |R_2| - |R_2| d \mathcal{K}(\sqrt{2}\sigma)] \} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\exp[-\xi_k(\pi - \theta, \varphi) d \sec \theta] - \exp[-\xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0) d \sec \theta_0]}{\xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0) \sec \theta_0 - \xi_k(\pi - \theta, \varphi) \sec \theta} \\ \times \exp\{ -(t - 2d \sec \theta_0 / c_0) \mathcal{K}(2\sigma^2) \}, \quad (19b)$$

容易证得, 当 $t \rightarrow 0, c_0 \rightarrow \infty$, 即脉冲波变为连续平面波时, 方程 (16) 的时间相关的 Mueller 矩阵可退化到文献 [3] 中 Mueller 矩阵的形式(见附录).

5 同极化和去极化镜向及后向散射

利用前面得到的时间相关的 Mueller 矩阵, 计算了 Gauss 型平面脉冲波入射下, 一层非均匀取向盘状小粒子的同极化和去极化散射的脉冲响应. 计算中取载频 $f = 5.3 \text{ GHz}$, 半功率脉冲宽度为 2.0 ns . 所有粒子的大小和形状均一致, 半径为 3.0 cm , 厚度为 0.1 cm , 介电常数为 $(6.5 + i2.0)\epsilon_0$. 下垫面的介电常数为 $(10 + i2)\epsilon_0$. 粒子的散射振幅函数采用 Rayleigh-Gans 近似计算^[12].

下列各图中, 将同极化(实线表示)和去极化(虚线表示)的脉冲回波均做归一化来和入射脉冲波(阴影区)进行形状比较. 同极化和去极化脉冲回波的实际强度峰值也列于图中.

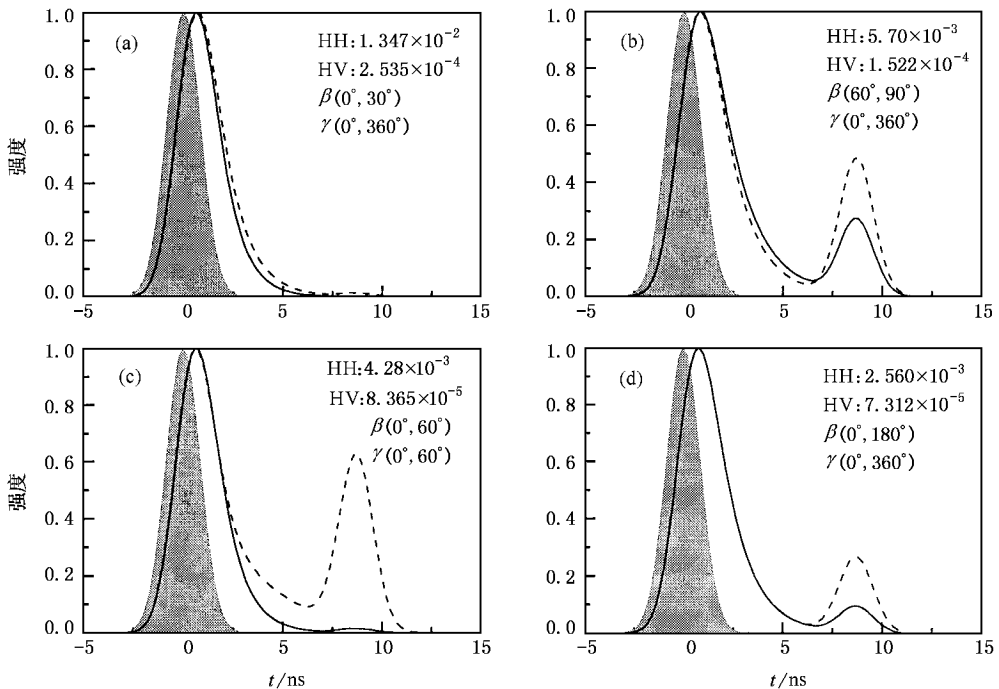


图 1 散射粒子不同空间取向分布情况下的 HH 和 HV 镜向散射

图 1(a—b) 给出了不同空间取向的一层随机盘状小粒子对脉冲波在镜向散射方向(即 $\theta_s = \theta_0, \varphi_s = \varphi_0$) 的同极化(HH)和去极化(HV)散射响应. 其中 (a) $\beta \in (0^\circ, 30^\circ), \gamma \in (0^\circ, 360^\circ)$ (b) $\beta \in (60^\circ, 90^\circ), \gamma \in (0^\circ, 360^\circ)$ (c) $\beta \in (0^\circ, 60^\circ), \gamma \in (0^\circ, 60^\circ)$; (d) $\beta \in (0^\circ, 180^\circ), \gamma \in (0^\circ, 360^\circ)$. 这里的 $\beta \in (\beta_1, \beta_2)$ 和 $\gamma \in (\gamma_1, \gamma_2)$ 分别表示 Euler 角 β 和 γ 在 (β_1, β_2) 和 (γ_1, γ_2) 范围内均匀分布. 由于粒子是轴对称的, Euler 角 α 不出现在取向平均中. 入射脉冲为水平极化波(H), 入射角 $\theta_0 = 40^\circ, \varphi_0 = 0^\circ$. 粒子的占空比 $f_s = 0.005$, 层厚 $d = 100\text{cm}$.

可以看出, 同极化和去极化脉冲回波均产生了时延和展宽. 同极化和去极化脉冲回波中出现的尾

峰主要是由于下垫面的反射. 而当下垫面的反射或多或少地被粒子遮掩时, 尾峰就变得不明显, 例如图 1(a) 的情况. 进而, 如果粒子在水平方向角 γ 范围内不均匀取向, 如图 1(c), 这时, 散射粒子排列趋向特定的方向, 会增强去极化脉冲响应的形变.

为了弄清脉冲波的散射机理, 我们将四种散射过程分别对同极化和去极化响应的贡献分别示于图 2(a, b) 中. 计算所用参数与图 1(b) 相同. 可以看出, 下垫面的反射使同极化和去极化脉冲响应出现尾峰. 本例中, 下垫面的双次反射很小.

图 3(a—d) 给出垂直极化波入射时的结果, 其同极化和去极化波形的变化与水平极化波入射时的结果相似. 但盘状粒子 VV 极化散射峰值要比 HH 小.

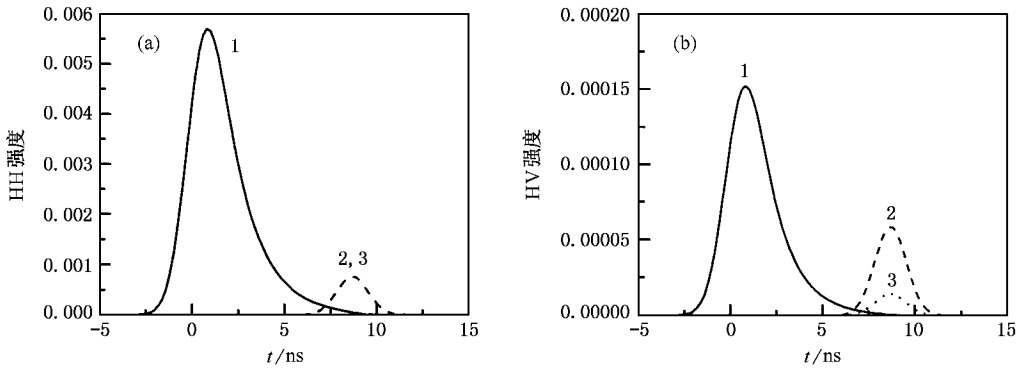


图 2 四种散射过程的贡献

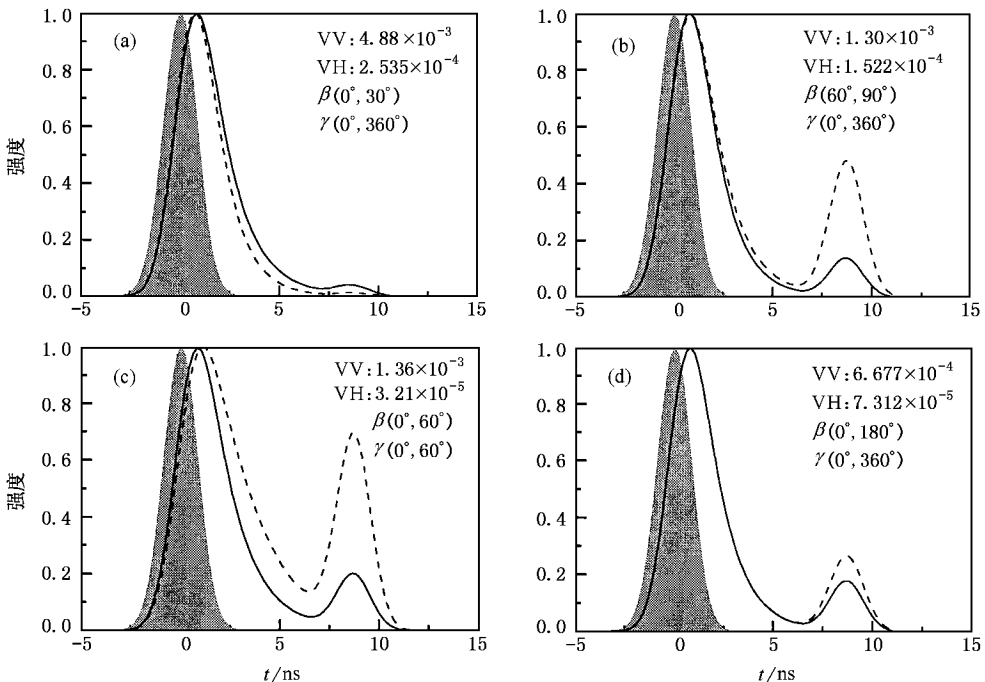


图 3 散射粒子不同空间取向分布情况下的 VV 和 VH 镜向散射

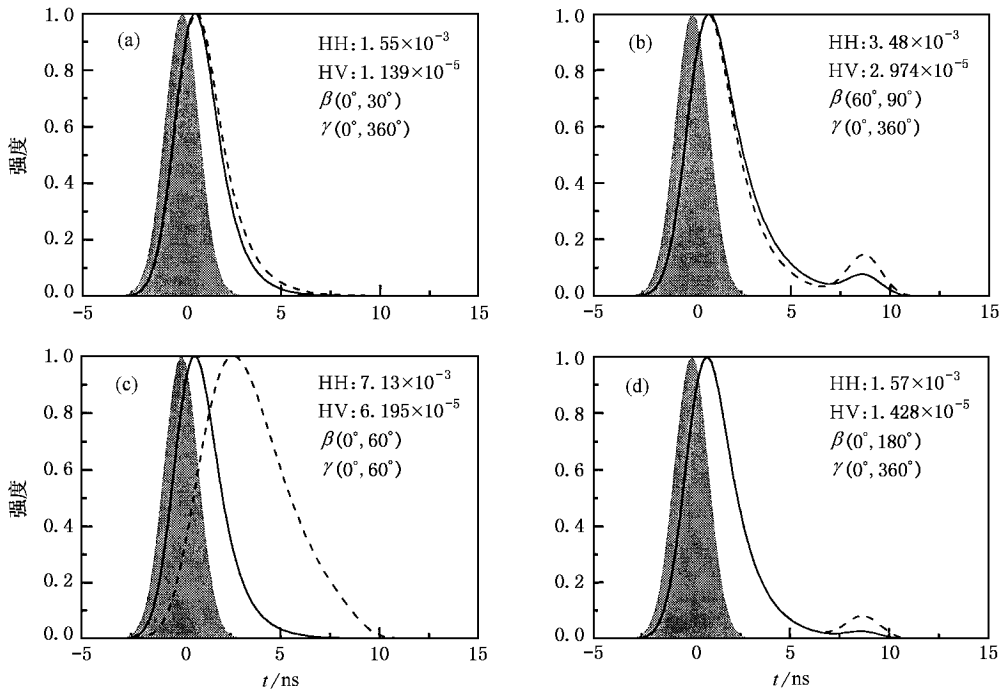


图 4 散射粒子不同空间取向分布情况下的 HH 和 HV 后向散射

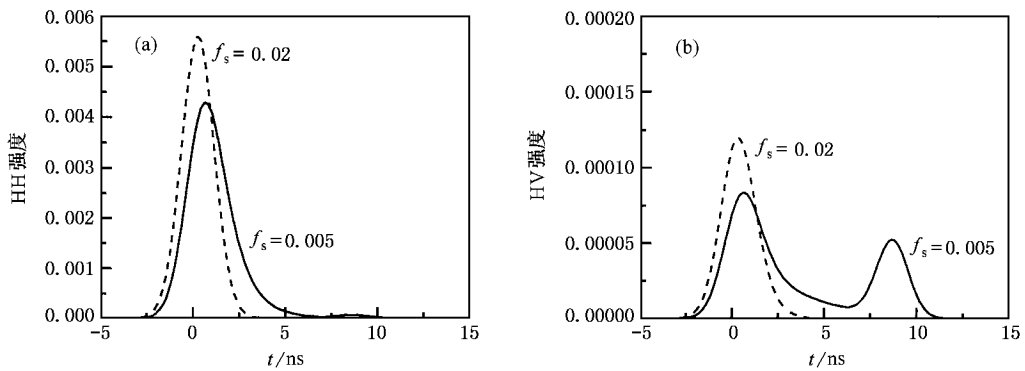


图 5 散射粒子不同占空比情况下的 HH 和 HV 镜向散射

图 4 (a—d) 给出了后向散射 (即 $\theta_s = \theta_0, \varphi_s = \pi + \varphi_0$) 时的结果. 注意到后向散射时的尾峰比图 1 (a—d) 的镜向散射时小许多, 尤其是去极化响应. 但在 γ 不均匀分布的图 4 (c) 中, 去极化的时延和展宽均比同极化大得多.

图 5 (a, b) 给出镜向散射方向上不同的占空比对脉冲波形的影响. 计算所用参数同图 1 (c). 可以看出, 粒子占空比的增加, 使同极化和去极化脉冲回波的强度均增大, 而时延和展宽均变小. 这是因为粒子的密集引起了更强的体散射和导致脉冲波的穿透深度变小. 同时, 粒子变密集会遮挡下垫面, 明显地削弱了尾峰. 后向散射的结果也与此相类似.

图 6 (a—d) 表明了镜向和后向散射方向, 不同的入射角对脉冲波形的影响. 计算所用参数同图 1 (c). 可以看出, 当入射角 θ_0 增大时, 由于粒子的体散射逐渐占据主导, 波形的展宽和形变都变小.

图 7 (a—d) 给出了入射角 $\theta_0 = 0^\circ$ 时, 不同层厚 ($d = 50, 100, 150$ 和 200cm) 情况下, 后向散射的 HH 和 HV 的变化. 其余参数的选取同图 1 (c). 当层厚增加时, 粒子的体散射逐渐占据主导, 由下垫面引起的尾峰减弱, 乃至消失.

当入射角 $\theta_0 = 0^\circ$ 时, 粒子均匀和非均匀取向情况下, 在 $\theta_s = 30^\circ$ 和 60° 方向的双站散射的结果, 分别由图 8 (a, c) 和图 8 (b, d) 给出. 散射的强度和脉冲形

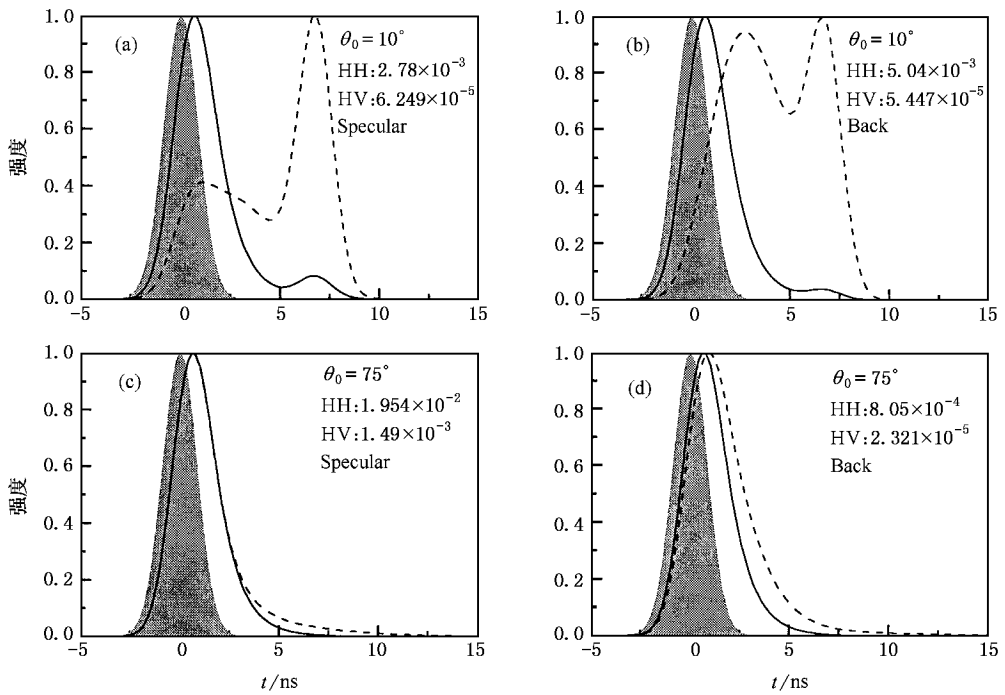


图 6 不同入射角情况下的 HH 和 HV 镜向和后向散射

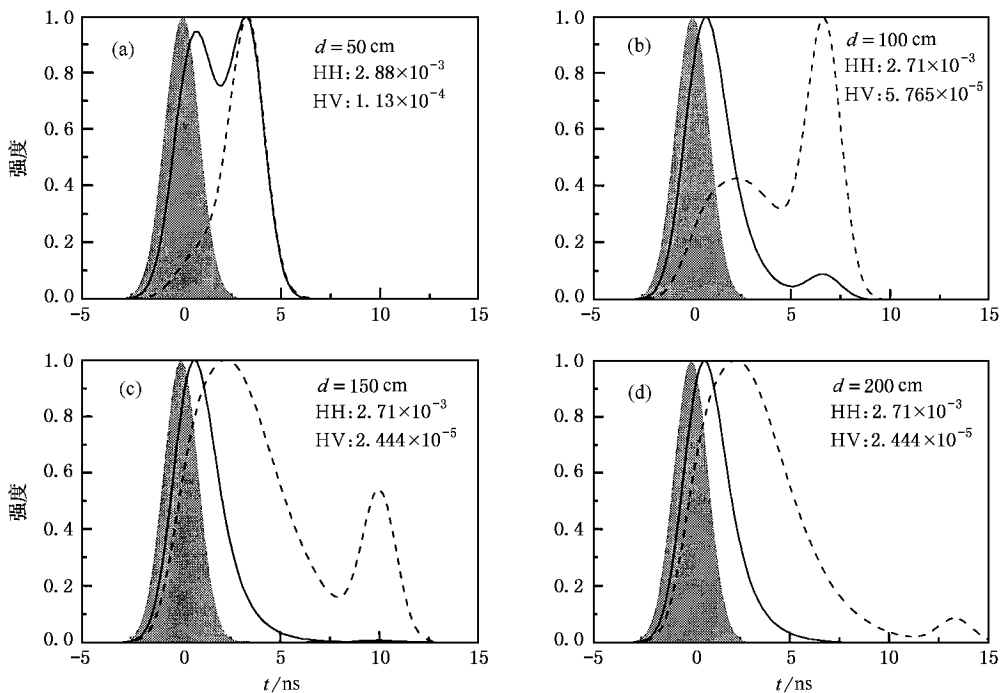


图 7 不同层厚情况下的 HH 和 HV 后向散射

状依赖于散射角 θ_s 和粒子的取向。

6 结 论

为求解 Gauss 型平面脉冲波入射下, 一层随机、

非均匀取向的非球形粒子的全极化散射, 我们推导得到了一阶近似下与时间相关的 Mueller 矩阵的解析表达式, 数值计算了同极化和去极化脉冲响应。

经过粒子层的散射, 同极化和去极化脉冲回波均产生时延和展宽。下垫面的反射使同极化和去极

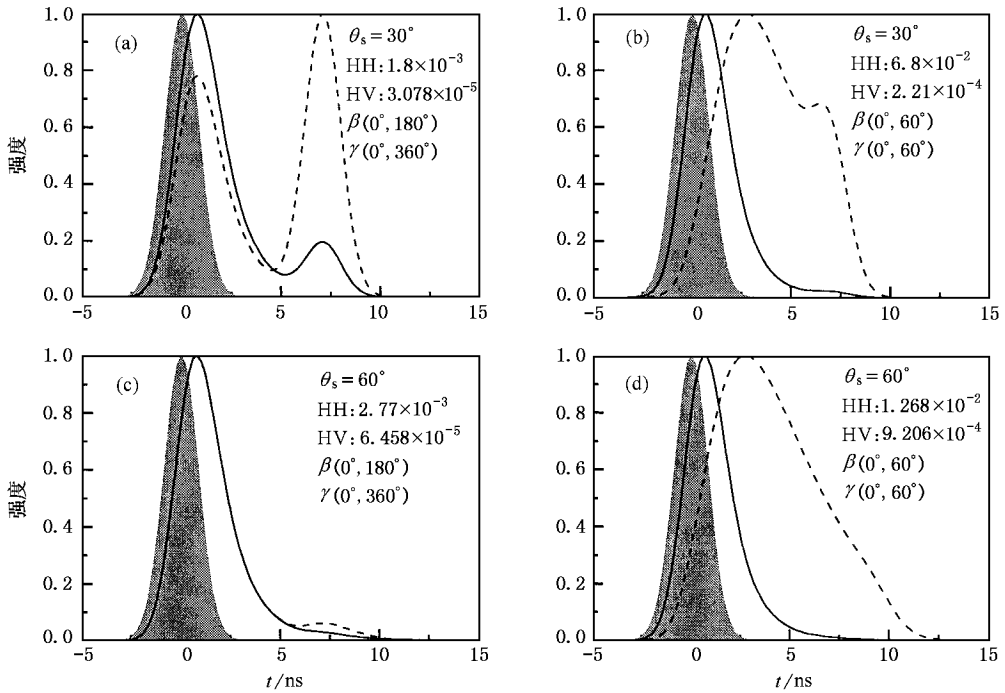


图8 散射粒子均匀(a,c)和非均匀(b,d)取向情况下的HH和HV双站散射

化脉冲回波出现尾峰.后向散射的尾峰比镜向散射方向的小,是因为粒子的散射在前向尤为强.后向散射时,粒子在 γ 范围内的非均匀取向能增强同极化和去极化脉冲响应的时延和展宽的差别.当粒子的占空比增加时,同极化和去极化脉冲回波的强度均增大,脉冲波的穿透深度变小,导致时延和展宽均变小.

全极化脉冲响应的强度和形状由散射介质的物理和几何参数,例如粒子的尺寸和形状、取向、层厚、下垫面及入射波的极化、频率、入射角等决定.本文得到的时间相关 Mueller 矩阵解为复杂粒子介质层全极化脉冲响应的数值模拟提供了一种理论方法.

附录 A

由 Taylor 公式^[11]

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) h^n, \quad (A1)$$

误差函数 $\text{erf}(z+h)$ 可展开为

$$\text{erf}(z+h) = \text{erf}(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{erf}^{(n)}(z) h^n, \quad (A2)$$

其中 $\text{erf}^{(n)}(\cdot)$ 表示误差函数的 n 阶微商,可写为^[11]

$$\text{erf}^{(n)}(z) = (-1)^{n-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} H_{n-1}(z) \exp(-z^2), \quad (A3)$$

其中 Hermite 多项式 $H_{n-1}(z)$ 可展开为^[11]

$$H_{n-1}(z) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-1)!}{m!(n-1-2m)!} (2z)^{n-1-2m}. \quad (A4)$$

由(2)(3)和(4)式,可得到

$$\exp(z^2) [\text{erf}(z) - \text{erf}(z+h)] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} h^n \cdot \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-1)!}{m!(n-1-2m)!} (2z)^{n-1-2m}, \quad (A5)$$

令 $z = \sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|$, $h = -|R_2| d / \sqrt{2}\sigma$, 代入(5)式,得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2|R_2|} \exp(2\sigma^2 B_2^2 / R_2^2 - C_2) \cdot \{ \text{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|) \\ & - \text{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2| - |R_2| d / \sqrt{2}\sigma) \} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-C_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{n!} (2dB_2)^{n-1} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \\ & \cdot \frac{(n-1)!}{m!(n-1-2m)!} (2\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|)^{-2m}. \end{aligned} \quad (A6)$$

由于

$$\lim_{|R_2| \rightarrow 0, m \geq 1} (2\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|)^{-2m} = 0, \quad (A7)$$

在方程(6)中,仅保留 $m=0$ 的项,得到

$$\begin{aligned} & \lim_{|R_2| \rightarrow 0} \frac{1}{2|R_2|} \exp(2\sigma^2 B_2^2 / R_2^2 - C_2) \cdot \{ \text{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2|) \\ & - \text{erf}(\sqrt{2}\sigma B_2 / |R_2| - |R_2| d / \sqrt{2}\sigma) \} \\ & = \lim_{|R_2| \rightarrow 0} \frac{d}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-C_2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2dB_2)^{n-1}}{n!} \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-(t-2d\text{sec}\theta_0/c_0)^2/(2\sigma^2)\} - \xi(\theta_0, \varphi_0) d \text{sec}\theta_0 \} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{n!} [\xi(\theta_0, \varphi_0) d \text{sec}\theta_0 - \xi(\theta, \varphi) d \text{sec}\theta]^{n-1} \\ & \quad (\text{利用 } e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \frac{1-e^x}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}) \\ & = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{ -\xi(\theta, \varphi) d \text{sec}\theta [1 - \exp\{ -\xi(\theta_0, \varphi_0) d \text{sec}\theta_0 \}] \\ & \times \exp\{ -(t-2d\text{sec}\theta_0/c_0)^2/(2\sigma^2) \} \}, \end{aligned} \quad (A8)$$

我们得到

$$\lim_{|R_2| \rightarrow 0} \frac{1}{2|R_2|} \exp\{2\sigma^2 B_3^2/R_2^2 - C_3\} \cdot \{\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_3/|R_2|) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_3/|R_2| - |R_2|d/\sqrt{2}\sigma)\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{\exp[-\xi_k(\pi - \theta, \varphi)d\sec\theta] - \exp[-\xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0)d\sec\theta_0]}{\xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0)\sec\theta_0 - \xi_k(\pi - \theta, \varphi)\sec\theta} \\ \times \exp\{-t^2 \mathcal{K}(2\sigma^2)\}, \quad (\text{A9})$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2R_1} \exp\{2\sigma^2 B_1^2/R_1^2 - C_1\} \cdot \{\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_1/R_1) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_1/R_1 - R_1d/\sqrt{2}\sigma)\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1 - \exp[-\xi_k(\theta, \varphi)d\sec\theta - \xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0)d\sec\theta_0]}{\xi_k(\theta, \varphi)\sec\theta + \xi_k(\pi - \theta_0, \varphi_0)\sec\theta}$$

$$\times \exp\{-t^2 \mathcal{K}(2\sigma^2)\}, \quad (\text{A10})$$

$$\lim_{R_1 \rightarrow 0} \frac{1}{2R_1} \exp\{2\sigma^2 B_4^2/R_1^2 - C_4\} \cdot \{\operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_4/R_1) - \operatorname{erf}(\sqrt{2}\sigma B_4/R_1 - R_1d/\sqrt{2}\sigma)\} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{1 - \exp[-\xi_k(\pi - \theta, \varphi)d\sec\theta - \xi_k(\theta_0, \varphi_0)d\sec\theta_0]}{\xi_k(\pi - \theta, \varphi)\sec\theta + \xi_k(\theta_0, \varphi_0)\sec\theta_0} \\ \times \exp\{-t^2 \mathcal{K}(2\sigma^2)\}. \quad (\text{A11})$$

由(8)至(11)式可看到,若令 $t \rightarrow 0, c_0 \rightarrow \infty$ (即 $R_1, R_2 \rightarrow 0$), 脉冲波成为了连续波, 方程(16)所示时间相关的 Mueller 矩阵能退化到文献[3]中与时间无关的 Mueller 矩阵的形式.

- [1] Mishchenko M I, Hoveniev J W and Travis L D 2000 *Light Scattering by Nonspherical Particle* (New York:Academic Press)
- [2] Zebker H A and Van Zyl J J 1991 *Imaging Radar Polarimetry: A Review. Proc of the IEEE* **79** 1583
- [3] Jin Y Q 1994 *Electromagnetic Scattering Modeling for Quantitative Remote Sensing* (Singapore World Scientific)
- [4] Jin Y Q 1992 *JQSRT* **48** 295
- [5] Ishimaru A 1978 *Wave Propagation and Scattering in Random Media* (New York:Academic Press)
- [6] Hong S T, Sreenivasiah I and Ishimaru A 1977 *Plane wave propaga-*

- tion through random media. IEEE Trans Antennas Propagat* **25** 822
- [7] Liu C H and Yeh K C 1978 *Pulse propagation in random media. IEEE Trans Antennas Propagat* **26** 561
- [8] Ito S 1980 *Radio Sci* **15** 893
- [9] Oguchi T and Ito S 1990 *Radio Sci* **25** 205
- [10] Whitman G M, Schwering F, Triolo A A and Cho N Y 1996 *IEEE Trans Antennas Propagat* **44** 118
- [11] Abramowitz M and Stegun I A 1972 *Handbook of Mathematical Functions* (New York:Dover)
- [12] Jin Y Q, Zhang N X and Chang M 1999 *JQSRT* **63** 599

The temporal Mueller matrix solution for polarimetric scattering from a layer of random non-spherical scatterers*

Chang Mei Jin Ya-Qiu

(Center for Wave Scattering and Remote Sensing, Fudan University, Shanghai 200433, China)

(Received 6 June 2001; revised manuscript received 16 July 2001)

ABSTRACT

The Mueller matrix solution of the vector radiative transfer equation with time dependence is derived in this paper. It is applied to the simulation of polarimetric bistatic scattering from a layer of random non-spherical scatterers nonuniformly oriented when a Gaussian plane pulse is incident upon it. Co-polarized and crosspolarized bistatic scattering are numerically calculated. The pulse echoes are compared with the incident pulse. We demonstrate the functional dependence of the pulse on the physical parameters of a random medium, such as spatial orientation and fractional volume of scatterers, incidence angle and polarization, the layer depth etc.

Keywords: plane pulse wave, non-spherical particles, the Mueller matrix

PACC: 4110H, 4220, 2975

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 49831060, 60171009) and by the state Key Development Program for Basic Research of China.