

耗散介观电容耦合电路的量子涨落*

龙超云¹⁾ 刘 波²⁾ 王心福³⁾

¹⁾ 贵州大学物理系, 贵阳 550025)

²⁾ 中国科学院半导体研究所, 北京 100083)

³⁾ 北京理工大学化工与材料学院, 北京 100081)

(2001 年 3 月 27 日收到, 2001 年 7 月 23 日收到修改稿)

给出耗散介观电容耦合电路的量子化, 在此基础上研究电荷和电流在能量本征态下的量子涨落, 并对其进行讨论.

关键词: 耗散电容耦合电路, 量子涨落

PACC: 7335

1 引 言

随着纳米技术及纳米电子学的迅速发展^[1,2], 器件及电路的尺寸日益小型化, 当电路及器件的尺寸接近原子尺度时, 必须考虑其量子力学效应^[3,4]. 自 20 世纪 70 年代 Louisell^[5]讨论 LC 电路的量子涨落效应以来, 人们先后研究了 LC, RLC 和电容耦合电路的电荷及电流在真空态、压缩真空态、能量本征态及压缩平移 Fock 态下的量子涨落^[6-14], 但文献 [11-13] 仅仅研究无耗散电容耦合电路在上述量子态中的量子涨落, 由于任何实际电路总是存在一定的电阻, 结果必然导致电路存在一定的耗散作用, 因此, 耗散电容耦合电路的量子涨落的研究更具有普遍性和实际意义. 本文进一步研究耗散电容耦合电路的电荷及电流在能量本征态下的量子涨落.

2 耗散电容耦合电路的量子力学处理

对于图 1 所示的耗散电容耦合电路, 根据 Kirchhoff 定律, 其经典运动方程为

$$\begin{aligned} L_1 \dot{q}_1 + R_1 \dot{q}_1 + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C} &= \epsilon(t), \\ L_2 \dot{q}_2 + R_2 \dot{q}_2 + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_2 - q_1}{C} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $q_i(t)$, L_i , R_i 及 C_i ($i=1, 2$) 分别表示两回路中的电荷、电感、电阻及电容, C 则为两回路之间的耦

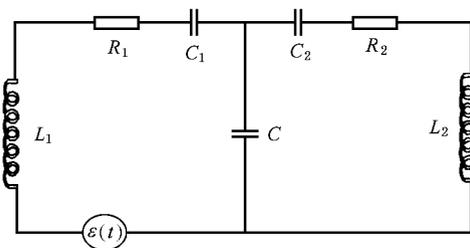


图 1

合电容.

取 $q_i(t)$ 为广义坐标, $p_i = L_i \dot{q}_i$ (i 除因子 L_i 外, 它表示电流的大小) 为广义动量, 当 $\epsilon(t) = 0$ 时, 体系的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H = & \frac{p_1^2}{2L_1} + \frac{p_2^2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1} (p_1 q_1 + q_1 p_1) + \frac{R_2}{2L_2} \\ & \cdot (p_2 q_2 + q_2 p_2) + \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} + \frac{(q_1 - q_2)^2}{2C}. \end{aligned} \quad (2)$$

由方程 (2) 不难验证经典运动方程 (1) 为正则方程 $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ 和 $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ ($i=1, 2$) 的结果, 与文献 [11-13] 所研究的无耗散电容耦合电路的哈密顿量相比较, 由于耗散作用的存在, 耗散电容耦合电路的哈密顿量多了广义坐标与广义动量的耦合作用, 若不考虑耗散作用 (即 $R_i = 0$), 则退化为文献 [11-13] 的结果.

将耗散电容耦合电路量子化, 按正则量子化方

* 贵州省自然科学基金 (批准号 20005025) 资助的课题.

案, 正则变量将满足下列对易关系:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_i, \hat{q}_k] &= [\hat{p}_i, \hat{p}_k] = 0 \\ [\hat{q}_i, \hat{p}_k] &= i\hbar\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (3)$$

于是量子化后的耗散电容耦合电路的哈密顿算符为

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{\hat{p}_1^2}{2L_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2L_2} + \frac{R_1}{2L_1}(\hat{p}_1\hat{q}_1 + \hat{q}_1\hat{p}_1) \\ &+ \frac{R_2}{2L_2}(\hat{p}_2\hat{q}_2 + \hat{q}_2\hat{p}_2) + \frac{\hat{q}_1^2}{2C_1} + \frac{\hat{q}_2^2}{2C_2} \\ &+ \frac{(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2}{2C}, \end{aligned} \quad (4)$$

为解除哈密顿算符中的全部耦合项, 现分别对方程(4)作么正变换^[7]和对电荷及电流作线性变换^[15].

2.1 哈密顿算符 \hat{H} 的么正变换

设么正算符为

$$\hat{U} = \hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2, \quad (5)$$

其中 $\hat{U}_i = \exp\left(\frac{jR_i\hat{q}_i^2}{2\hbar}\right)$, $j = \sqrt{-1}$, $i = 1, 2$.

令 \hat{H}_1 为 \hat{H} 经过么正变换之后的哈密顿算符, 并利用公式

$$e^{\lambda\hat{A}}\hat{B}e^{-\lambda\hat{A}} = \hat{B} + \lambda[\hat{A}, \hat{B}] + \frac{\lambda^2}{2}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$$

则 \hat{H}_1 的表达式为

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \hat{U}\hat{H}\hat{U}^{-1} = \frac{\hat{p}_1^2}{2L_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2L_2} + \frac{1}{2}L_1\omega_1^2\hat{q}_1^2 \\ &+ \frac{1}{2}L_2\omega_2^2\hat{q}_2^2 + \frac{(\hat{q}_1 - \hat{q}_2)^2}{2C}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$\omega_i^2 = \frac{1}{L_i C_i} - \frac{R_i^2}{L_i^2}, \quad i = 1, 2.$$

2.2 电荷及电流的线性变换

将 \hat{H}_1 中的电荷 q_i 及电流 p_i 作下列线性变换:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left[\frac{L_2}{L_1}\right]^{1/4} \cos \frac{\varphi}{2} & \left[\frac{L_2}{L_1}\right]^{1/4} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{1/4} \sin \frac{\varphi}{2} & \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{1/4} \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix}, \quad \text{简记为 } :q = \hat{s}_1 q', \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{1/4} \cos \frac{\varphi}{2} & \left[\frac{L_1}{L_2}\right]^{1/4} \sin \frac{\varphi}{2} \\ -\left[\frac{L_2}{L_1}\right]^{1/4} \sin \frac{\varphi}{2} & \left[\frac{L_2}{L_1}\right]^{1/4} \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix}, \quad \text{简记为 } :p = \hat{s}_2 p'. \end{aligned} \quad (8)$$

由对易关系(3)式, 易证

$$\begin{aligned} [\hat{q}'_i, \hat{q}'_k] &= [\hat{p}'_i, \hat{p}'_k] = 0, \\ [\hat{q}'_i, \hat{p}'_k] &= i\hbar\delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

也就是说, 电荷及电流的上述线性变换不改变其量子力学的代数性质, 若令

$$\begin{aligned} \text{tg} \varphi &= 2\sqrt{L_1 L_2} [L_2(1 + CL_1\omega_1^2) \\ &- L_1(1 + CL_2\omega_2^2)], \end{aligned} \quad (10)$$

则 \hat{H}_1 中的电荷及电流经过上述线性变换后的哈密顿量 \hat{H}_2 为

$$\hat{H}_2 = \frac{\hat{p}'_1{}^2}{2\sqrt{L_1 L_2}} + \frac{\hat{p}'_2{}^2}{2\sqrt{L_1 L_2}} + \frac{\beta_1}{2}\hat{q}'_1{}^2 + \frac{\beta_2}{2}\hat{q}'_2{}^2, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left(\frac{1}{C} + L_1\omega_1^2 \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \left(\frac{1}{C} \right. \\ &\left. + L_2\omega_2^2 \right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{\sin \varphi}{C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\frac{1}{C} + L_1\omega_1^2 \right) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \left(\frac{1}{C} \right. \\ &\left. + L_2\omega_2^2 \right) \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{\sin \varphi}{C} \end{aligned}$$

由(11)式可见, 经过么正变换和线性变换后, \hat{H}_2 中的所有耦合项完全被解除, 原来的哈密顿算符 \hat{H} 被化为两个彼此相互独立的线性谐振子的哈密顿算符之和, 其等效质量及等效频率为

$$M_1 = M_2 = \sqrt{L_1 L_2}, \quad (12)$$

$$\Omega_1^2 = \frac{\beta_1}{\sqrt{L_1 L_2}}, \quad \Omega_2^2 = \frac{\beta_2}{\sqrt{L_1 L_2}}. \quad (13)$$

由量子力学理论, 便可得耗散电容耦合电路的能谱及相应的本征函数为

$$E = \left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega_1 + \left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\hbar\Omega_2, \quad (14)$$

$$\Psi_{n_1, n_2}(q'_1, q'_2) = \prod_{i=1}^2 N_i \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_i q_i'^2\right) H_{n_i}(\alpha_i q_i'), \quad (15)$$

其中

$$N_i = \left(\frac{\alpha_i}{\sqrt{\pi} 2^{n_i} n_i!}\right)^{1/2}, \quad \alpha_i = \sqrt{\frac{M_i \Omega_i}{\hbar}}, \quad H_{n_i}(\alpha_i q_i')$$

为厄米多项式, $n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ($i = 1, 2$).

利用线性变换(7)式的逆变换及么正变换(5)式的逆变换, 则可得未解耦前耗散电容耦合电路的能量本征函数 $\Psi_{n_1, n_2}(q_1, q_2)$ 为

$$\Psi_{n_1, n_2}(q_1, q_2) = \hat{U}^{-1} \hat{S}_1^{-1} \Psi_{n_1, n_2}(q'_1, q'_2) \quad (16)$$

其中

$$\hat{U}^{-1} = \exp\left[-\frac{i}{2\hbar}(R_1 q_1^2 + R_2 q_2^2)\right] \hat{S}_1^{-1}$$

为线性变换 \hat{S}_1 的逆变换, $\hat{S}_1^{-1} \Psi_{n_1, n_2}(q'_1, q'_2)$ 表示将 $\Psi_{n_1, n_2}(q'_1, q'_2)$ 中的变量 q'_1 和 q'_2 按照 (7) 式的变换关系变为 q_1 和 q_2 .

3 耗散电容耦合电路的量子涨落

设 \hat{f} 为耗散电容耦合电路的任一力学量, 则该力学量在其能量本征态 $\Psi_{n_1, n_2}(q_1, q_2)$ 中的平均值为

$$f = \int \Psi_{n_1, n_2}^*(q_1, q_2) \hat{f} \Psi_{n_1, n_2}(q_1, q_2) \lambda q_1 dq_2, \quad (17)$$

在 (17) 式中, 令 $\hat{f} = \hat{q}_i, \hat{q}_i^2, \hat{p}_i$ 和 \hat{p}_i^2 ($i = 1, 2$), 并利用 (15) 和 (16) 式, 则可得

$$\begin{aligned} q_i &= p_i = 0, \\ q_1^2 &= \frac{\hbar}{2L_1} \left[\frac{1}{\Omega_1} (2n_1 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\Omega_2} (2n_2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ q_2^2 &= \frac{\hbar}{2L_2} \left[\frac{1}{\Omega_1} (2n_1 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{\Omega_2} (2n_2 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ p_1^2 &= \frac{\hbar L_1}{2} \left[\Omega_1 (2n_1 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \Omega_2 (2n_2 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ p_2^2 &= \frac{\hbar L_2}{2} \left[\Omega_1 (2n_1 + 1) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \Omega_2 (2n_2 + 1) \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right], \\ n_1, n_2 &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (18)$$

故电路中电荷及电流的量子涨落为

$$\begin{aligned} (\Delta q_i)^2 &= q_i^2 - q_i^2 = q_i^2, \\ (\Delta p_i)^2 &= p_i^2 - p_i^2 = p_i^2. \end{aligned} \quad (19)$$

由 (18) 式和 (19) 式可知, 在未接通电源 ($\epsilon(t) = 0$) 时, 耗散电容耦合电路的电荷及电流在其能量本征态下的平均值为零, 但其方均值均不为零, 即是说, 电路中的电荷及电流均存在量子涨落效应, 并且每个回路的电荷及电流的量子涨落不仅与自身回路的器件参数 (R, L, C) 有关, 同时还与另外回路的器件参数 (R, L, C) 有关, 因此, 可以通过器件参数的适当选择来降低电路的量子噪声.

4 讨 论

1. 若 $R_1 = R_2 = 0$, 即电路无耗散作用, 则 (18) 式中的频率 Ω_i 将退化为文献 [12] 中的频率 ω_i , 从而本文中的 (18) 式将退化为该文献中的 (22) 式至

(26) 式, 也就是说, 文献 [12] 的结果仅是本文中的一种特殊情况.

2. 若耦合电容 $C \rightarrow \infty$ (即 $\varphi = 0$), 则原来的电路本身无耦合作用, 其等效于两个相互独立的 RLC 电路, 由 (18) 式、(13) 式和 β_1 及 β_2 的表达式可得

$$\begin{aligned} q_i &= p_i = 0 \quad i = 1, 2, \\ q_i^2 &= \frac{\hbar \sqrt{C_i}}{2\sqrt{L_i - R_i^2 C_i}} (2n_i + 1), \\ p_i^2 &= \frac{\hbar L_i}{2\sqrt{C_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{L_i - R_i^2 C_i}} (2n_i + 1), \end{aligned}$$

$$(\Delta q_i)^2 = q_i^2 - q_i^2 = q_i^2,$$

$$(\Delta p_i)^2 = p_i^2 - p_i^2 = p_i^2,$$

$$(\Delta q_i)^2 (\Delta p_i)^2 = \frac{\hbar^2}{4} \frac{L_i}{L_i - R_i^2 C_i} (2n_i + 1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4},$$

$n_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ (20)

这一结果与文献 [7] 所讨论的 RLC 电路的结论完全一致.

特别地, 若再进一步令 $R_i = 0$ ($i = 1, 2$), 则由 (20) 式可得两个相互独立的 LC 电路的电荷及电流的量子涨落.

$$\begin{aligned} q_i &= p_i = 0, \\ q_i^2 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{C_i}} (2n_i + 1), \\ p_i^2 &= \frac{\hbar}{2\sqrt{L_i}} (2n_i + 1), \\ (\Delta q_i)^2 &= q_i^2, (\Delta p_i)^2 = p_i^2, \\ (\Delta q_i)^2 (\Delta p_i)^2 &= \frac{\hbar^2}{4} (2n_i + 1)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \end{aligned} \quad (21)$$

3. 由 (10) 式还可知, 若耗散电容耦合电路的器件参数 R, L, C 满足

$$L_2 \left[1 + \left(\frac{C}{C_1} - \frac{R_1^2 C}{L_1} \right) \right] - L_1 \left[1 + \left(\frac{C}{C_2} - \frac{R_2^2 C}{L_2} \right) \right] = 0 \quad (22)$$

则 $\tan \varphi = \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 故由 (18) 式可得此时的电荷及电流的量子涨落为

$$\begin{aligned} q_i &= p_i = 0, \\ q_i^2 &= \frac{\hbar}{4L_i} \left[\frac{1}{\Omega'_1} (2n_i + 1) + \frac{1}{\Omega'_2} (2n_i + 1) \right], \\ p_i^2 &= \frac{\hbar L_i}{4} \left[\Omega'_1 (2n_i + 1) + \Omega'_2 (2n_i + 1) \right], \end{aligned}$$

$$(\Delta q_i)^2 = q_i^2, (\Delta p_i)^2 = p_i^2,$$

$$(\Delta q_i)^2 (\Delta p_i)^2 = \frac{\hbar^2}{16} [(2n_i + 1)^2 + (2n_i + 1)^2]$$

$$+ \left(\frac{\Omega'_1}{\Omega'_2} + \frac{\Omega'_2}{\Omega'_1} \right) \chi(2n_1 + 1) \chi(2n_2 + 1) \Big], \quad (23)$$

其中 Ω'_i ($i = 1, 2$) 为 (13) 式中的 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时的 Ω_i 值.

5 结 论

本文应用么正变换及线性变换给出了耗散电容耦合电路的量子力学处理, 并在此基础上研究了电

荷及电流在能量本征态下的量子涨落. 结果表明: 每个回路的电荷及电流的量子涨落不仅与其所处的量子态有关, 而且还依赖于两回路的器件参数. 故可通过适当选择器件参数来降低电路的量子噪声. 由于任何实际电路总是存在一定的电阻, 即任何电路总是存在一定的耗散作用, 因此本文所得结果更具有普遍性及实际意义, 而文献 [12] 的结果仅为本文的一种特例.

- [1] Srivastava Y and Widom A 1987 *Phys. Rep.* **148** 1
- [2] Buot A F 1993 *Phys. Rep.* **224** 73
- [3] Li Y Q and Chen B 1996 *Phys. Rev.* **B53** 4027
- [4] Chen B, Li Y Q, Fang H *et al* 1995 *Phys. Lett.* **A205** 121
- [5] Louisell W H 1973 *Quantum statistical Properties of Radiation* (John wiley, New York)
- [6] Wang X G and Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171
- [7] Wang J S, Liu T K and Zhan M S 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 528
- [8] Yu Z X, Zhang D X and Liu Y H 1997 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **6** 522
- [9] Wang J S *et al* 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese) [王继锁等 1997 物理学报 **46** 2007]
- [10] Gu Y J 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 963 [顾永健 2000 物理学报 **49** 963]
- [11] Chen B *et al* 1996 *Chinese Science Bulletin* **41** 1170 (in Chinese) [陈斌等 1996 科学通报 **41** 1170]
- [12] Wang J S *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁等 1998 物理学报 **47** 1187]
- [13] Wang J S *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2271 (in Chinese) [王继锁等 2000 物理学报 **49** 2271]
- [14] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1999 物理学报 **48** 2343]
- [15] Ekert A K and Knight P L 1989 *Am. J. Phys.* **57** 692

Quantum fluctuation of dissipative mesoscopic capacitance coupling circuit^{*}

Long Chao-Yun¹⁾ Liu Bo²⁾ Wang Xin-Fu³⁾

¹⁾ Department of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

²⁾ Institute of Semiconductor, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100083, China

³⁾ College of Chemistry Engineering and Material Science, Beijing University of Technology, Beijing 100081, China

(Received 27 March 2001 ; revised manuscript received 23 July 2001)

ABSTRACT

The quantum wave function and the corresponding energy levels of the dissipative mesoscopic capacitance coupling circuits are obtained by using unitary and linear transformations. The quantum fluctuation of charge and current in an arbitrary eigenstate of the system have been also given. The results show that the fluctuation of charge and current depends on not only the eigenstate but also the electronic device parameters.

Keywords : dissipative capacitance coupling circuit, quantum fluctuation

PACC : 7335

* Project supported by the Natural Science Foundation of Guizhou Province, China (Grant No 20005025).