第 51 卷 第 1 期 2002 年 1 月
1000-3290/2002/51(01)/0197-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.1,January,2002


# 研究快讯

# 均匀密度零压星的完整的引力解

陈 光

(汕头大学工学院,汕头 515063)

(2001 年 7 月 9 日收到;2001 年 10 月 30 日收到修改稿)

证明了 Oppenheimer 和 Snyder 关于均匀密度零压星的引力塌缩的经典解是不完整的,它并不能正确地连接作为内解和外解的 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规.通过在离散时空上拓展解参数而构成了一个完整的引力解,它实现了 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规之间的等价连接,并可以证明是奇性自由的.这个完整的引力解显示了物质,引力和离散时空结构之间的关联性.

**关键词**:均匀密度零压星,Friedmann 度规,Schwarzschild 度规,离散时空

**PACC**:0420

早在 1939 年,Oppenheimer 和 Snyder 在关于均匀密度零压星的引力解的著名的经典文章[1]中曾经推断引力塌缩导致了引力奇性的形成.在广义相对论的发展史上,这无疑是一个公认的极为重要的理论结果.它一直影响着人们对于引力的最为深奥的性质的认识以及最为重大的问题的探索.然而,我们在重新探讨 Oppenheimer 和 Snyder 的引力解时发现它实际上是不完整的,它并不能正确地连接作为内解和外解的 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规.通过在离散时空上拓展解参数的方法,我们构成了一个完整的引力解,它实现了 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规之间的等价连接,并可以证明是奇性自由的.这个完整的引力解显示了物质,引力和离散时空结构之间的关联性.

如所周知,当采用 Beckedorff 和 Misner 坐标时,均匀密度的零压星的引力内解问题可以表示为 Friedmann 形式的度规[2]

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}\bar{t}^2 + R^2(\bar{t})\Big[\frac{\mathrm{d}\bar{r}^2}{1-k\bar{r}^2} + \bar{r}^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2)\Big] \tag{1}$$

和场方程

$$R'^2(\bar{t}) = k[R^{-1}(\bar{t}) - 1], \tag{2}$$

而由摆线的参数方程给出的(2)式的解为

$$\bar{t} = \left(\frac{\eta + \sin\eta}{2\sqrt{k}}\right), R = \frac{1}{2}(1+\cos\eta). \tag{3}$$

在(3)式中的参数为:$0\leqslant\eta\leqslant\pi$,而 $\eta=\pi$ 为本性奇点.又根据 Birkhoff 定理[3],星球的外部时空几何必须服从 Schwarzschild 度规[4]

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{1-2M/r} + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\phi^2). \tag{4}$$

于是,为了使得内外解在星球的表面上彼此相接,人们取 $k=\frac{2M}{a^3}$($\bar{r}=a$ 为星球的半径,$M$ 为星球的引力质量)而导出[5]

$$r = aR(\eta) = \frac{a}{2}(1+\cos\eta), \tag{5}$$

$$t = 2M\left\{\ln\left|\frac{(a/2M-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(a/2M-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right| + (a/2M-1)^{1/2}[\eta+(a/4M)(\eta+\sin\eta)]\right\}. \tag{6}$$

一方面,Einstein 方程规定,零压流体物质沿径向测地线运动[6],故(5)和(6)式表示了星球表面的测地线方程.它描述起始于最大的球面 $r=aR(0)=a$ 而终止于奇点 $r=aR(\pi)=0$ 的一段径向测地线.正是基于这一点,人们断定,均匀密度零压星的引力塌缩导致了奇性的形成.另一方面,Einstein 方程还规定了时空度规本身必须由物质场的引力解所确定.然而,由于在这里的测地线方程中球径坐标 $r$ 是坐标

时 $t$ 的函数，且有 $\frac{\partial g_{00}}{\partial t} = \frac{\partial g_{00}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \neq 0$ $\left(g_{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\right)$，或 $\frac{\partial g_{11}}{\partial t} = \frac{\partial g_{11}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} \neq 0$ $\left(g_{11} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\right)$，因此，由(5)和(6)式的坐标变换实际上并不能形成一个 Schwarzschild 度规．因为在 Schwarzschild 度规中，球径坐标 $r$ 和坐标时 $t$ 是两个独立的坐标变量，并且度规分量是与坐标时无关的．这就说明，在星球的表面上，Friedmann 解与 Schwarzschild 解之间是不等价的．实际上，由于在 $r$-$t$ 平面上的一段径向测地线并不能覆盖其所在等效半径范围之内的这一部分时空，因此均匀密度零压星的引力塌缩解是不完整的．又考虑到 Friedmann 度规是一个动态度规而 Schwarzschild 度规是一个静态度规，故要使得两者在星球的表面上等价相接，唯一的可能性是前者是周期性的并且两者都是离散化的．首先，必须去掉对于解(3)的参数在 $0 \leqslant \eta \leqslant \pi$ 上的人为的限制．其实，不存在任何基于纯偏微分方程的理由要把解的参数限制在这样的范围之内，而是应当考虑到 $\eta$ 在整个数域上的所有可能的取值．这样一来，随着 $\eta$ 在数值上的增加，固有时 $\bar{t}$ 将单调上升，而标度因子 $R$ 将作周期的变化，从而引力塌缩解便拓展成为引力周期解．与此相应，由(5)和(6)式所表示的均匀密度零压星球面的测地线也将随之而环绕延伸．另外，在测地线上，当 $r/2M > 1$ 即 $2n\pi - \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right) < \eta < 2n\pi + \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right)$ 时，坐标时 $t$ 将随着 $\eta$ 的增加而增加亦即是顺向变化的，而当 $r/2M < 1$ 即 $2n\pi + \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right) < \eta < 2(n+1)\pi - \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right)$ 时，则随着 $\eta$ 的增加而减小亦即是逆向变化的．当然，在一个严格的引力周期解之中，参数 $\eta$ 不可能是连续而必须是离散的，这是因为在连续参数的解中球径坐标 $r$ 和坐标时 $t$ 仍不是独立的因而还不是 Schwarzschild 坐标，此外在解中还存在着诸如 $\eta = (2n+1)\pi$ 或 $\eta = 2n\pi \pm \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right)$ 的间断点．继而，我们进行时空的离散化．注意到，对于任一给定的球径坐标 $r = aR(\eta)$ 而言，可以求得内解中标度因子 $R$ 的一个变化周期即参数 $\eta$ 的一个 $2\pi$ 的增量所引起的坐标时 $t$ 的增量为

$$\Delta t = 4\pi M(a/2M-1)^{1/2}(a/4M+1), \qquad (7)$$

于是当且仅当以 $\Delta t$ 作为一个基元而把坐标时离散化，并以 $n\Delta t$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 代替(6)式中的 $t$，

$$n\Delta t = 2M\left\{\ln\left|\frac{(a/2M-1)^{1/2}+\tan(\eta/2)}{(a/2M-1)^{1/2}-\tan(\eta/2)}\right| + (a/2M-1)^{1/2}[\eta + (a/4M)(\eta+\sin\eta)]\right\},$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (8)$$

由此规定参数 $\eta$ 的离散化，并由离散化的参数 $\eta$ 和(5)式而规定球径坐标 $r$ 的离散化，则对于任一给定的离散球径坐标(离散坐标时)，离散坐标时(离散球径坐标)可以在所有可能的取值之中变化，亦即离散球径坐标与离散坐标时之间是相互独立的，并且度规分量与离散坐标时是无关的，从而在星球的表面上，我们可以由离散化的 Friedmann 度规而形成等价的离散化的 Schwarzschild 度规．当然，Friedmann 度规的离散化是通过由(8)式所导出的参数 $\eta$ 的离散化规定了由(3)式所确定的固有时 $\bar{t}$ 和标度因子 $R$ 的离散化而得到的．关于离散化的 Schwarzschild 度规，由(5)，(7)和(8)式可以推知，对于任一给定的 $n$，并不存在 $\eta = (2n+1)\pi$ 或 $\eta = 2n\pi \pm \arccos\left(\frac{4M}{a}-1\right)$ 亦即 $r = 0$ 或 $r = 2M$ 的解，从而并不存在本性奇点或坐标奇点．也就是说，Schwarzschild 度规作为均匀密度零压星的引力外解必须是离散化的，而离散化的 Schwarzschild 度规则是奇性自由的．至于离散化的 Friedmann 度规，我们只要考虑固有时 $\bar{t}$ 和标度因子 $R$ 在 $\eta = (2n+1)\pi$ 的邻域上的性质．由(8)式可假设，对应于一个坐标时基元 $\Delta t$，参数 $\eta$ 在 $(2n+1)\pi$ 的邻域中的增量为 $\Delta\eta = \eta_2 - \eta_1 = [(2n+1)\pi + \delta] - [(2n+1)\pi - \delta] = 2\delta$．于是由(3)式，可以求出在两个端点 $\eta_1 = (2n+1)\pi - \delta$ 和 $\eta_2 = (2n+1)\pi + \delta$ 处，固有时 $\bar{t}$ 和标度因子 $R$ 分别为

$$\bar{t}_1 = \frac{1}{2\sqrt{k}}((2n+1)\pi - \delta + \sin\delta), \qquad (9)$$

$$R_1 = \frac{1}{2}(1-\cos\delta) \qquad (10)$$

和

$$\bar{t}_2 = \frac{1}{2\sqrt{k}}((2n+1)\pi + \delta - \sin\delta), \qquad (11)$$

$$R_2 = \frac{1}{2}(1-\cos\delta). \qquad (12)$$

可见，在这两个端点上，有 $R_1 = R_2$，而且只要 $\delta$ 为一无穷小量，则有 $\bar{t}_1 = \bar{t}_2$．这就意味着，在参数 $\eta$ 的定义中去掉 $(2n+1)\pi$ 的点并不造成固有时 $\bar{t}$ 的间断，而在 $(2n+1)\pi$ 的邻域上，离散化了的固有时将

正常地延伸.至于 $\delta$ 为一无穷小量则意味着坐标时基元 $\Delta t$ 也为一无穷小量,从而由(7)式,均匀密度零压星的最大等效半径 $r = aR(0) = a$ 应比引力半径 $r_g = 2M$ 大一个无穷小量.当然,$\delta$ 不能为零,否则 $\Delta t$ 将为零,从而由(7)和(8)式有 $a = 2M$ 和 $t$ 恒为零,而这将与前述相矛盾.这个结果保证了在(10)式和(12)式中 $R_1 = R_2 > 0$,于是作为均匀密度零压星的引力内解的 Friedmann 度规也是奇性自由的.还注意到,包含于(5)式的最大的球径坐标为 $r = a$,再由(7)和(8)式可知,为了解的一致性,在 $r > a$ 的时空中,坐标时 $t$ 也必须是以 $\Delta t$ 为基元而离散化的.也就是说,在整个 Schwarzschild 时空之中,坐标时 $t$ 是以同一的无穷小 $\Delta t$ 离散化的.考虑到 Schwarzschild 度规的渐近平直性,这说明了坐标时亦即通常所谓的世界时 $t$ 是与引力无关的.此外,在 $r \leqslant a$ 的时空中,球径坐标 $r$ 或固有时 $\bar{t}$ 是由不同的亦即不等价的同阶无穷小以一种确定的方式离散化的;而在 $r > a$ 的时空中,球径坐标 $r$ 或固有时 $\bar{t}$ 不存在确定的离散化形式,或者说容许存在各种可能的离散化形式.球径坐标 $r$ 或固有时 $\bar{t}$ 的这种性质一方面显示了引力的效应,另一方面还揭示了在物质形态和离散时空结构之间存在着一种内在的关联性.最后必须指出,由于在上述所导出的引力解中,构成离散的时间或空间的所有基元均为数学上的无穷小量,因此这样的解在数学上乃是严格而不是近似的.

综上所述,均匀密度零压星的引力内解可以表示为 Friedmann 度规而其引力外解可以表示为 Schwarzschild 度规,但 Friedmann 度规是一个动态度规,而 Schwarzschild 度规是一个静态度规,要使得两者在星球的表面上等价相接,必须而且只能前者是周期性的而两者都是离散化的.正是通过在离散时空上拓展解参数的方法,我们实现了 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规之间正确的连接从而构成了一个均匀密度零压星的完整的引力解.而且,我们还证明了包含于这个完整的引力解中的 Friedmann 度规和 Schwarzschild 度规是奇性自由的.这个引力解显示了在物质,引力和离散时空结构之间存在着一种深刻的关联性.


[1] Oppenheimer J R and Snyder H 1939 *Phys. Rev.* **56** 455

[2] Weinberg S 1972 *Gravitation and Cosmology*,John Wiley

[3] Birkhoff G 1923 *Relativity and Modern Physics*(Harvard University Press,Cambridge,Mass)

[4] Schwarzschild K 1916 *Sity. Preuss Aksd.* Wiss. 189

[5] Misner C W,Thorne K S and Wheeler J A 1973 *Gravitation*(Freeman,San Francisco)

[6] Carmeli M 1982 *Classical Fields* General Relativity and Gauge Theory,New York

# Complete gravitational solution of a star with uniform density and zero pressure

Chen Guang
(*Shantou University*, *Shantou* 515063, *China*)
(Received 9 July 2001; revised manuscript received 30 October 2001)

ABSTRACT

The collapse solution of a star with uniform density and zero pressure given in the classic paper of Oppenheimer and Snyder is proved to be incomplete; it cannot correctly connect the Friedmann and Schwarzschild metrics as the interior and exterior solutions. By the extension of solution parameter in the discrete spacetime, we construct a complete gravitational solution, which could make an equivalence connection between the Friedmann and Schwarzschild metrics and is proves to be singularity-free. The solution shows that there exists a relationship among matter, gravitation and discrete spacetime configuration.

**Keywords**: uniform density and zero pressure star, Friedmann metric, Schwarzschild metric, discrete spacetime
**PACC**: 0420