第 51 卷 第 10 期 2002 年 10 月
1000-3290/2002/51(10)/2183-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.10, October, 2002

非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性

方建会 薛庆忠 赵嵩卿

(石油大学应用物理系, 东营 257061)

(2002 年 1 月 14 日收到; 2002 年 3 月 2 日收到修改稿)

研究非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性. 给出非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性的定义和判据, 研究形式不变性和 Noether 对称性的关系, 并举例说明结果的应用.

关键词: 非保守力学系统, Nielsen 方程, 形式不变性, Noether 对称性

PACC: 0320

1. 引 言

力学系统的对称性与守恒量之间有着密切的联系. 寻求力学系统守恒量的近代方法, 主要是研究作用量在无限小变换下不变性的 Noether 方法和研究运动微分方程在无限小变换下不变性的 Lie 方法[1—4]. 十多年来, Noether 对称性理论和 Lie 对称性理论的研究取得了一系列重要成果[3—12]. 最近, 梅凤翔教授提出了一种对称性研究的新方法[13,14], 利用动力学方程的形式不变性研究系统的对称性, 寻求系统的守恒量. 在文献[13]和[14]中分别研究了力学系统 Appell 方程和保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性. 文献[15]研究了变质量系统 Gibbs-Appell 方程的形式不变性. 本文研究非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性. 给出非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性的定义和判据, 研究形式不变性和 Noether 对称性的关系, 并举例说明结果的应用.

2. Nielsen 方程的形式不变性

设非保守力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,2,\cdots,n)$ 确定, 系统保守部分的 Lagrange 函数为 L, 非保守广义力为 Q_s, 则系统的 Nielsen 方程为

$$\frac{\partial \dot{L}}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{1}$$

一般来说, $L = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, $Q_s = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$.

取无限小变换

$$t^* = t + \Delta t,\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \Delta q_s, \quad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{2}$$

在一级近似下, 其展开式为

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q}),\ q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q}), \tag{3}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小单参数群变换的生成元.

在变换(3)下, Lagrange 函数 $L = L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 变成 $L^* = L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$, 非势广义力 $Q_s = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 变成 $Q_s^* = Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)$.

定义 如果在无限小变换(3)下, Nielsen 方程(1)的形式保持不变, 即

$$\frac{\partial \dot{L}^*}{\partial \dot{q}_s} - 2\frac{\partial L^*}{\partial q_s} = Q_s^* \qquad (s = 1,2,\cdots,n), \tag{4}$$

则称这种不变性为非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性.

将 L^*, Q_s^* 展开, 有

$$\begin{aligned} L^* &= L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\Big[\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s \\ &\quad + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\Big] + 0(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Q_s^* &= Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right) \\ &= Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) + \varepsilon\Big[\frac{\partial Q_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial q_l}\xi_l \\ &\quad + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{q}_l}(\dot{\xi}_l - \dot{q}_l\dot{\xi}_0)\Big] + 0(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{6}$$

引入 Nielsen 算子

$$N_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - 2\frac{\partial}{\partial q_s},$$

如果 L，Q_s 及无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 满足

$$N_s\left[\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\right] = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial t}\xi_0 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial q_l}\xi_l + \sum_{l=1}^{n}\frac{\partial Q_s}{\partial \dot{q}_l}(\dot{\xi}_l - \dot{q}_l\dot{\xi}_0) = 0, \tag{8}$$

则在无限小变换(3)下，Nielsen 方程(1)的形式不变.

证明 由(5)，(6)，(7)，(8)式可得

$$N_s(L^*) = N_s(L) = Q_s = Q_s^*.$$

如果有常数 k 和函数 $G_L = G_L(t,\boldsymbol{q})$，使下式满足：

$$\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) = kL - \dot{G}_L, \tag{9}$$

根据(7)式，有

$$N_s(kL - \dot{G}_L) = 0, \tag{10}$$

于是有

判据 对给定的 L 和 Q_s，如果存在常数 k 和函数 $G_L = G_L(t,\boldsymbol{q})$，使无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 满足(8)，(9)式，则在无限小变换(3)下，Nielsen 方程(1)的形式不变.

证明 $N_s(L^*) = N_s(L) + \varepsilon N_s(kL - \dot{G}_L) = Q_s = Q_s^*$.

非保守力学系统 Nielsen 方程的形式不变性在一定条件下可导致守恒量.

3. 形式不变性和 Noether 对称性

按照 Noether 对称性理论[4]，对 Lagrange 函数为 L，非势广义力为 Q_s 的力学系统，如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q})$ 满足 Noether 等式

$$L\dot{\xi}_0 + \frac{\partial L}{\partial t}\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0) + \sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G}_N, \tag{11}$$

则相应的对称性为 Noether 对称性，此时力学系统存在如下守恒量：

$$I = L\xi_0 + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_N = \mathrm{const}. \tag{12}$$

Nielsen 方程的形式不变性可能是 Noether 对称性，也可能不是 Noether 对称性.

命题 在无限小变换(3)下，如果 Nielsen 方程(1)的形式不变，且存在规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q})$ 满足

$$kL - \dot{G}_L + L\dot{\xi}_0 + \sum_{s=1}^{n}Q_s(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = -\dot{G}_N, \tag{13}$$

则形式不变性是 Noether 对称性；否则，形式不变性不是 Noether 对称性.

证明 将(9)式代入(11)式便可得到(13)式.

本文结果具有更一般的意义. 当 $Q_s = 0$ 时，本文结果化为文献[14]的结果.

4. 算例

例 1 一力学系统 Lagrange 函数 L 中不显含时间 t，系统受的非保守广义力为 $Q_s = \dfrac{1}{\dot{q}_s}$，研究其形式不变性和 Noether 对称性.

取

$$\xi_0 = 1,\ \xi_s = 0, \tag{14}$$

则(8)式满足. 将(14)式代入(9)式得

$$\dot{G}_L = kL, \tag{15}$$

取

$$k = 0,\ G_L = 0, \tag{16}$$

则(9)式满足. 将(14)和(16)式代入(13)式得

$$\dot{G}_N = \sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\dot{q}_s}\dot{q}_s = n, \tag{17}$$

于是有

$$G_N = nt. \tag{18}$$

(12)式给出

$$I = L - \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s + nt = \mathrm{const}. \tag{19}$$

例 2 一力学系统的 Lagrange 函数 $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$，系统受的非势广义力为 $Q_1 = \dot{q}_1$，$Q_2 = \dot{q}_2$，研究其形式不变性和 Noether 对称性.

取 $\xi_0 = 0$，$\xi_1 = 1$，$\xi_2 = 1$ 和 $k = 0$，$G_L = 0$，则(8)和(9)式满足，(13)式给出

$$\dot{G}_N = -(\dot{q}_1 + \dot{q}_2), \tag{20}$$

于是有

$$G_N = -(q_1 + q_2). \tag{21}$$

(12)式给出

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_1 - q_2 = \text{const}. \tag{22}$$

若取 $\xi_0 = t$,$\xi_1 = q_1$,$\xi_2 = q_2$ 和 $k = 0$,$G_L = 0$,则(8)和(9)式满足,(13)式给出

$$\left(\frac{1}{2} - t\right)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2 = -\dot{G}_N, \tag{23}$$

从上式得不到 G_N,因此这个形式不变性不是 Noether 对称性.

[1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* KI II 235

[2] Lutzky M 1979 *J. Phys. A*:*Math. Gen.* **12** 973

[3] Zhao Y Y and Mei F X 1993 *Advances in Mechanics* **23** 360(in Chinese)[赵跃宇、梅凤翔 1993 力学进展 **23** 360]

[4] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems*(Beijing:Science Press)(in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[5] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901(in Chinese)[梅凤翔、尚 玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[6] Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[7] Qiao Y F, Li R J and Zhao S H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 811(in Chinese)[乔永芬、李仁杰、李淑红 2001 物理学报 **50** 811]

[8] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816 (in Chinese)[张 毅、薛 纭 2001 物理学报 **50** 816]

[9] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001(in Chinese)[方建会 2001 物理学报 **50** 1001]

[10] Zhang R C, Chen X W and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 12

[11] Guo Y X, Jiang L Y and Yu Y 2001 *Chin. Phys.* **10** 181

[12] Fang J H and Zhao S Q 2002 *Chin. Phys.* **11** 445

[13] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[14] Wang S Y and Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[15] Li R J, Qiao Y F and Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese)[李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

Form invariance of Nielsen equation of a nonconservative mechanical system

Fang Jian-Hui Xue Qing-Zhong Zhao Song-Qing

(*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

(Received 14 January 2002; revised manuscript received 2 March 2002)

Abstract

A form invariance of Nielsen equation of nonconservative mechanical system is studied. The definition and criterion of the form invariance of Nielsen equation of a nonconservative mechanical system are given. The relation between the form invariance and the Noether symmetry is studied. Some examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: nonconservative mechanical system, form invariance, Nielsen equation, Noether symmetry

PACC: 0320