第 51 卷 第 10 期 2002 年 10 月
1000-3290/2002/51(10)/2186-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51,No.10,October,2002

一类非完整奇异系统的 Lie 对称性与守恒量*

李元成[1)] 张 毅[2)] 梁景辉[3)]

1)(石油大学应用物理系,东营 257061)

2)(苏州科技学院城建系,苏州 215011)

3)(山西师范大学物理系,临汾 041004)

(2002 年 2 月 6 日收到;2002 年 3 月 7 日收到修改稿)

利用微分方程在无限小变换群下的不变性,研究一类非完整奇异系统的 Lie 对称性.给出 Lie 对称性的确定方程、限制方程、附加限制方程和结构方程,并给出守恒量的形式.

关键词:奇异系统,非完整约束,Lie 对称性,守恒量

PACC:0320

1.引 言

对称性的研究在物理学和数学中具有重要意义,它能揭示系统的物理本质.近代寻找对称性与守恒量的主要方法有两种:一种是基于 Hamilton 作用量在无限小群变换下的不变性的 Noether 对称性;另一种是把 Lie 研究微分方程不变性的扩展群方法引入力学系统,提出的运动微分方程的 Lie 对称性.目前对非奇异系统对称性与守恒量的研究较多[1—10].由于奇异系统(系统的 Lagrange 函数是奇异的)在理论物理中广泛存在,所以对奇异系统的研究是非常重要的.十几年来,对奇异系统对称性的研究以 Noether 对称性为主[11—14],对奇异系统 Lie 对称性的研究很少[1,15],本文研究一类非完整奇异系统的 Lie 对称性与守恒量.

2.系统的运动微分方程

设力学系统的位形由 n 个广义坐标 q_s $(s=1,\cdots,n)$确定,系统的 Lagrange 函数为 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,如果 $\det(h_{sk})=\det(\partial^2 L/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k)=0$,则系统为奇异 Lagrange 系统.再设系统受有 g 个理想双面 Chetaev 型非完整约束

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0\qquad(\beta=1,\cdots,g),\tag{1}$$

约束(1)对虚位移的限制为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0,\tag{2}$$

且系统所受的非势广义力为 $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$,则由 d'Alembert-Lagrange 原理可得系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\qquad(s=1,\cdots,n).\tag{3}$$

研究如下一类奇异系统.假设在运动微分方程积分之前,可由(1)和(3)式求出约束乘子 λ_β 作为 t,$\boldsymbol{q}$,$\dot{\boldsymbol{q}}$的函数,方程(3)可表为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+\Lambda_s\qquad(s=1,\cdots,n),\tag{4}$$

其中 $$\Lambda_s=\Lambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}.$$

展开得

$$h_{sk}\ddot{q}_k=\frac{\partial L}{\partial q_s}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial q_k}\dot{q}_k-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\partial t}+Q_s+\Lambda_s.\tag{5}$$

因系统奇异,不可能由此解出所有的广义加速度,但可假设解出一部分广义加速度,记作

$$\ddot{q}_i=A_i(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})\qquad(i=1,\cdots,r;0\leqslant r\leqslant n),\tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)资助的课题.

以及$(n-r)$个关系

$$\phi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \qquad (j=1,\cdots,n-r). \tag{7}$$

3. 无限小变换与系统的 Lie 对称性

引入时间和广义坐标的无限小群变换

$$t^*=t+\Delta t,\ q_s^*(t^*)=q_s(t)+\Delta q_s \quad (s=1,\cdots,n) \tag{8}$$

或其展开式

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$
$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}), \tag{9}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_s 为无限小生成元.取无限小生成元向量

$$X^{(0)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}, \tag{10}$$

以及它的一次扩展

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}. \tag{11}$$

方程(6)在无限小变换(9)式下的不变性归结为如下确定方程：

$$\ddot{\xi}_i-\dot{q}_i\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0A_i=X^{(1)}(A_i) \qquad (i=1,\cdots,r), \tag{12}$$

方程(7)在无限小变换(9)式下的不变性归结为如下限制方程：

$$X^{(1)}(\phi_j(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0 \qquad (j=1,\cdots,n-r), \tag{13}$$

非完整约束(1)在无限小变换(9)式下的不变性归结为如下的约束限制方程：

$$X^{(1)}(f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}))=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g). \tag{14}$$

推导方程(3)的过程中，用到了 Chetaev 条件(2)，这个条件对 δq_s 施加了限制，即附加限制方程为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0 \qquad (\beta=1,\cdots,g). \tag{15}$$

定义 1　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(12)和限制方程(13)，则相应对称性称为与非完整系统(1)，(3)式相应的完整奇异系统(6)式的 Lie 对称性.

定义 2　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(12)和限制方程(13)，(14)，则相应对称性称为非完整奇异系统的弱 Lie 对称性.

定义 3　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程(12)、限制方程(13)，(14)和附加限制方程(15)，则相应对称性称为非完整奇异系统的强 Lie 对称性.

4. 系统的结构方程和守恒量

对非完整奇异系统，Lie 对称性不一定导致守恒量.下面给出 Lie 对称性导致守恒量的 条件及守恒量的形式.

定理 1　对于满足确定方程(12)和限制方程(13)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s，如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)$$
$$+\Lambda_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}=0, \tag{16}$$

则与非完整奇异系统相应的完整奇异系统存在如下形式的 Lie 对称性守恒量

$$I=L\xi_0+(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}+G=\text{const}. \tag{17}$$

证明

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\dot{L}\xi_0+L\dot{\xi}_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\
&\quad+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\ddot{q}_s\xi_0-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)-L\dot{\xi}_0\\
&\quad-\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\\
&\quad-Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)-\Lambda_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\
&=\dot{L}\xi_0+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)-\frac{\partial L}{\partial t}\xi_0-\frac{\partial L}{\partial q_s}\xi_s\\
&\quad-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s\xi_0-Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)-\Lambda_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}-Q_s-\Lambda_s\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)=0.
\end{aligned}$$

定理 2　对于满足确定方程(12)和限制方程(13)，(14)的无限小生成元 ξ_0,ξ_s，如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(16)，则非完整奇异系统存在形如(17)的弱 Lie 对称性守恒量.

定理 3　对于满足确定方程(12)、限制方程(13)，(14)和附加限制方程(15)的无限小生成元 ξ_0，ξ_s，如果存在规范函数 $G=G(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$满足结构方程(16)，则非完整奇异系统存在形如(17)的强 Lie 对称性守恒量.

5. 系统的 Lie 对称性逆问题

非完整奇异系统的 Lie 对称性逆问题是已知守恒量求相应的 Lie 对称性. 非完整奇异系统的守恒量不一定有相应的 Lie 对称性. 故 Lie 对称性逆问题可能有解,也可能无解.

首先由已知守恒量求出与其相应的 Noether 对称性. 设非完整奇异系统有积分

$$I = I(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \text{const}. \tag{18}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_s}\ddot{q}_s = 0. \tag{19}$$

(5)式两端同乘以 $\bar{\xi}_s = (\xi_s - \dot{q}_s\xi_0)$,并对 s 求和得

$$\bar{\xi}_s\Big(h_{sk}\ddot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_s} + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_s \partial t} - Q_s - \Lambda_s\Big) = 0. \tag{20}$$

(19)式与(20)式相减,分出含 $\ddot{q}_k$ 的项,由其系数为零得

$$\bar{\xi}_s h_{sk} - \frac{\partial I}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad (k = 1, \cdots, n). \tag{21}$$

因系统奇异,故方程(21)不可能求出所有 $\bar{\xi}_s$,只能求出一部分.

再令积分(18)式等于守恒量(17)式

$$I = L\xi_0 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s + G. \tag{22}$$

这样由方程(21),(22)可以求得 ξ_0,ξ_s 中的一部分生成元,将这些生成元代入非完整奇异系统 Lie 对称性确定方程(12)、限制方程(13),(14)和附加限制方程(15)使它们得到满足,就可找到非完整奇异系统的 Lie 对称性.

6. 算例

系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \dot{q}_1 q_2 + q_1\dot{q}_2 - (q_1 - q_2)\dot{q}_3, \tag{23}$$

非势广义力为

$$Q_1 = -\dot{q}_2,\ Q_2 = \dot{q}_1,\ Q_3 = (q_1 - q_2)q_3, \tag{24}$$

系统所受的非完整约束为

$$f = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 - q_3 = 0. \tag{25}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先研究 Lie 对称性正问题. 由方程(3)建立系统的运动方程

$$\ddot{q}_1 + \dot{q}_3 = -\dot{q}_2 + \lambda,\ \ddot{q}_2 - \dot{q}_3 = \dot{q}_1 - \lambda,$$
$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + (q_1 - q_2)q_3 = 0. \tag{26}$$

由(25),(26)式求出 λ,

$$\lambda = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + 3\dot{q}_3). \tag{27}$$

将(27)式代入(26)式得

$$\ddot{q}_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + \dot{q}_3) = A_1,$$
$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3) = A_2,$$
$$\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + (q_1 - q_2)q_3 = 0. \tag{28}$$

将(28)式代入 Lie 对称性的确定方程、限制方程和附加限制方程(12)—(15)式得

$$\ddot{\xi}_1 - \dot{q}_1\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\Big(\frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\Big) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - \frac{1}{2}(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) + \frac{1}{2}(\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0), \tag{29}$$

$$\ddot{\xi}_2 - \dot{q}_2\ddot{\xi}_0 - 2\dot{\xi}_0\Big(\frac{1}{2}(\dot{q}_1 - \dot{q}_2 - \dot{q}_3)\Big) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - \frac{1}{2}(\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - \frac{1}{2}(\dot{\xi}_3 - \dot{q}_3\dot{\xi}_0), \tag{30}$$

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) + q_3\xi_1 - q_3\xi_2 + (q_1 - q_2)\xi_3 = 0, \tag{31}$$

$$(\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1\dot{\xi}_0) - (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2\dot{\xi}_0) - \xi_3 = 0, \tag{32}$$

$$(\xi_1 - \dot{q}_1\xi_0) - (\xi_2 - \dot{q}_2\xi_0) = 0. \tag{33}$$

由(29)—(31)式有如下解:

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \xi_2 = 1,\ \xi_3 = 0, \tag{34}$$

$$\xi_0 = 1,\ \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \tag{35}$$

$$\xi_0 = 0,\ \xi_1 = \xi_2 = t,\ \xi_3 = 0. \tag{36}$$

将(34)式代入结构方程(16)求出规范函数

$$G = -2q_1. \tag{37}$$

而(35),(36)式代入结构方程求不出规范函数,所以这两种对称性不能导致守恒量. (34)式同时满足(32),(33)式,故(34)式既是相应完整奇异系统的 Lie 对称性,同时又是非完整奇异系统的弱 Lie 对称

性和强 Lie 对称性.

将(34)式和(37)式代入(17)式得

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_1 + q_2 = \text{const}. \tag{38}$$

这里 I 既是相应完整奇异系统的 Lie 对称性守恒量,同时又是非完整奇异系统的弱 Lie 对称性守恒量和强 Lie 对称性守恒量.

其次,研究 Lie 对称性逆问题.设系统有积分

$$I = \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_1 + q_2 = \text{const}. \tag{39}$$

由方程(21),(22)给出

$$\bar{\xi}_1 = 1, \bar{\xi}_2 = 1, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} L\xi_0 &+ (\dot{q}_1 + q_2)\bar{\xi}_1 + (\dot{q}_2 + q_1)\bar{\xi}_2 \\ &- (q_1 - q_2)\bar{\xi}_3 + G \\ &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 - q_1 + q_2, \end{aligned} \tag{41}$$

取

$$G = -2q_1, \tag{42}$$

则得到与积分(39)相应的 Lie 对称性生成元

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 1, \xi_3 = 0. \tag{43}$$

将(43)式代入(29)—(33)式均满足,故是非完整奇异系统的 Lie 对称性.

感谢梅凤翔教授的悉心指导.

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing :Science Press) pp90 – 261,281 – 441 (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)第 90 – 261,281 – 441 页]

[2] Zhao Y Y and Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing :Science Press) pp1 – 103 (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 :科学出版社)第 1 – 103 页]

[3] Li Y C, Zhang Y and Liang J H 2000 *Applied Mathematics and Mechanics* **21** 487 [李元成、张　毅、梁景辉 2000 应用数学和力学 **21** 487]

[4] Li Y C, Zhang Y, Liang J H and Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 376

[5] Li Y C 2001 *Acta Armamentarii* **22** 95 (in Chinese) [李元双 2001 兵工学报 **22** 95]

[6] Li Y C, Zhang Y and Liang J H 2001 *Acta Mechanica Solida Sinica* **22** 75 (in Chinese) [李元成、张　毅、梁景辉 2001 固体力学学报 **22** 75]

[7] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[8] Mei F X 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1207 (in Chinese) [梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[9] Qiao Y F and Zhao S H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1 (in Chinese) [乔永芬、赵淑红 2001 物理学报 **50** 1]

[10] Zhang H B 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[11] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing :Beijing Polytechnic University Press) pp59 – 107 (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 :北京工业大学出版社)第 59—107 页]

[12] Li Z P 1991 *Chinese Science Bulletin* **36** 958 (in Chinese) [李子平 1991 科学通报 **36** 958]

[13] Li Z P 1992 *Chinese Science Bulletin* **37** 2204 (in Chinese) [李子平 1992 科学通报 **37** 2204]

[14] Li Z P 1999 *Constrained Hamilton Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing :Beijing Polytechnic University Press) 1 (in Chinese) [李子平 1999 约束哈密顿系统及其对称性质(北京 :北京工业大学出版社) 第 1 页]

[15] Zhang Y 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 816 (in Chinese) [张　毅 2001 物理学报 **50** 816]

Lie symmetries and conserved quantities of a type of nonholonomic singular systems*

Li Yuan-Cheng[1)] Zhang Yi[2)] Liang Jing-Hui[3)]

[1)] (*Department of Applied Physics*, *University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

[2)] (*Department of Urban Construction*, *University of Science and Technology of Suzhou*, *Suzhou* 215011, *China*)

[3)] (*Department of Physics*, *Shanxi Normal University*, *Linfen* 041004, *China*)

(Received 6 February 2002; revised manuscript received 7 March 2002)

Abstract

Using an invariance of differential equations under the infinitesimal transformations of group, we study the Lie symmetries and conserved quantities of a type of nonholonomic singular systems. We establish the determining equations, the restriction equations, the additional restriction equations and the structure equations, and give the form of conserved quantities.

Keywords: singular system, nonholonomic constraint, Lie symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010).