

# 在伽利略坐标变换下的二端面弹性转轴 相似动力学方程\*

董全林 刘 彬

(燕山大学仪器科学与工程系, 秦皇岛 066004)  
(2001 年 11 月 6 日收到 2002 年 2 月 28 日收到修改稿)

在非相对论性原理下建立了二端面弹性转轴的相似动力学方程. 使弹性转轴的动力学方程与地面坐标下的动力学方程相似, 为相似工程学和计量、测控仪器的相似标定提供理论依据及方法.

关键词: 二端面弹性转轴, 相似模拟, 坐标变换, 相似动力学方程, 标定

PACC: 0340D 0313 0316

## 1. 引 言

转动现象是自然界中最基本的运动. 1979 年, Bengtsson 和 Frauendorf 对 14 种核子的自旋速率做了较为精确的测量, 结果表明各核子的自旋速率均有一最大值, 且各不相同<sup>[1]</sup>. 1985 年, Carmeli 提出了转动相对论力学的理论<sup>[2,3]</sup>. 1996 年 Luo 建立了转动系统的相对论性分析力学理论<sup>[4,5]</sup>. 近两年, 人们对转动相对论性动力学方程的非线性、变质量及代数与几何结构等也进行了研究<sup>[6-14]</sup>. 随着研究的深入, 人们对转动的机理、时空结构、几何特性有了越来越多的了解.

上述理论一般适用于极高速转动. 例如, 当  $\omega \rightarrow \Gamma \left( \Gamma = \frac{c}{r}, \omega = 2\pi n \right)$  时的核子、粒子等转动. 在工程中, 大量的高速、中低速转动现象需要以相对性原理为指导, 利用伽利略坐标变换, 建立非相对论性的相对转动理论, 为相似工程学和计量、测控仪器相似标定等学科提供理论依据和办法.

二端面弹性转轴是工程中最广泛、最基本的零件, 用于回转运动与动力的传动. 但是二端面弹性转轴的力学方程一般都忽略了分布质量和二端面弹性转轴材料的内耗, 这种简化方程在精确控制和测控中受到了限制. 本文建立二端面弹性转轴的动

学方程及相似动力学方程, 给出一般初始条件方程的解.

## 2. 二端面弹性转轴的力学方程

二端面弹性转轴, 是机械传动中最广泛的组成零件. 弹性转轴一般是通过两个端面建立与其他零件的联接关系. 其力学、位移条件也是通过二端面给定和需要测出的, 故称为二端面弹性转轴. 当建立了二端面弹性转轴的力学方程之后, 由此组成整个回转传动系统的力学方程也就建立了. 尽管二端面弹性转轴的两端面之间的力学、位移状态也需要了解, 但是, 根据材料力学中的结论, 在确定了两端面的力学、位移条件后, 中间部分的状态按线性关系便可确定.

图 1 为一均匀圆柱形二端面弹性转轴, 长度为  $l$ , 分析它所具有的动能以及其等效转动惯量. 设轴的单位长度转动惯量为  $J_s$ ,  $\theta_s$  为某一截面  $S$  处的角位移. 则动能

$$E = \int_0^l \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}_s^2 dx. \quad (1)$$

设轴的扭转变形沿轴向是直线变化的, 截面  $S$  处的变形为

$$\alpha_s = \frac{x}{l} \alpha, \quad (2)$$

\* 河北省科技攻关基金(批准号 02212106D)资助的课题.

其中  $\alpha = \theta_2 - \theta_1$ , 所以

$$\theta_s = \theta_1 + \alpha_s = \theta_1 + \frac{x}{l}(\theta_2 - \theta_1). \quad (3)$$

对时间求一阶导数, 得

$$\dot{\theta}_s = \dot{\theta}_1 + \frac{x}{l}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1). \quad (4)$$

代入(1)式得轴的动能  $E$  为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_0^l J_s \left[ \dot{\theta}_1 + \frac{x}{l}(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} J_s l \left[ \frac{1}{3} \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{3} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \frac{1}{3} \dot{\theta}_2^2 \right] \\ &= \frac{1}{6} J(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2), \end{aligned} \quad (5)$$

其中  $J = J_s l$  为整个转轴的转动惯量。

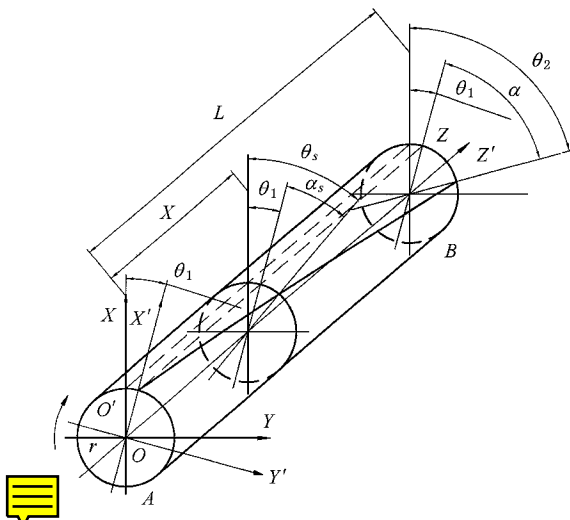


图 1 二端面弹性转轴扭转坐标图

应用 Lagrange 方程, 建立弹性转轴的运动微分方程. 如图 2 所示, 取广义坐标为  $q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2$ , 则系统的动能为(5)式, 其势能  $U$  为

$$U = \frac{1}{2} K(\theta_2 - \theta_1)^2, K = \frac{GI}{l}. \quad (6)$$

实际上, 二端面弹性转轴材料一般是有内耗的<sup>[15]</sup>, 这是由于存在的晶界摩擦、晶粒的曲张等过程要消耗一部分能量, 在系统中形成耗散力. 耗散力一般也称为阻尼力. 将阻尼力当做主动力, 则本系统仍满足理想约束条件. 在本系统, 阻尼力(阻尼力矩)一般可表示为

$$M_1^c = -C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (7)$$

$$M_2^c = -C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1), \quad (8)$$

由于是同一种材料(7)(8)式的系数相同. 将阻尼

力矩公式带入动力学普遍方程

$$\sum_{i=1}^n (M_i^{(\alpha)} - I_i \ddot{\theta}_i) \cdot \delta \theta_i = 0, \quad (9)$$

其中  $M_i^{(\alpha)} = M_i + M_i^c$ , 则(9)式的第一项为

$$\sum_{i=1}^n M_i^{(\alpha)} \cdot \delta \theta_i = \sum_{\alpha=1}^s \left( \sum_{i=1}^n M_i^{(\alpha)} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_r} \right) \cdot \delta q_r = 0, \quad (10)$$

其中  $q_r (r=1, 2, \dots, s)$  为广义坐标. 广义力(广义力矩)为

$$Q_r = \sum_{i=1}^n M_i^{(\alpha)} \frac{\partial \theta_i}{\partial q_r} \quad (r=1, 2, \dots, s). \quad (11)$$

将(7)(8)式带入(11)式后得本系统的广义力(广义力矩)为

$$\begin{aligned} Q_1 &= (T_1 + T_1^c) \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_1} + (T_2 + T_2^c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1} \\ &= T_1 + T_1^c = T_1 - C(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= (T_1 + T_1^c) \frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_2} + (T_2 + T_2^c) \frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_2} \\ &= T_2 + T_2^c = T_2 - C(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $T_1 = M_1$  为端面 1 所受外力矩,  $T_1^c = M_1^c$  为端面 1 所受阻尼力矩,  $T_2 = M_2$  为端面 2 所受外力矩,  $T_2^c = M_2^c$  为端面 2 所受阻尼力矩.

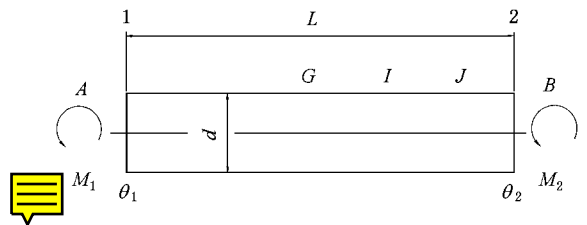


图 2 弹性转轴加载示意图

代入 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial E}{\partial q_r} + \frac{\partial U}{\partial q_r} = Q_r \quad (r=1, 2, \dots, s), \quad (14)$$

得

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} J \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6} J \ddot{\theta}_2 + C \dot{\theta}_1 - C \dot{\theta}_2 + K \theta_1 - K \theta_2 &= T_1, \\ \frac{1}{6} J \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3} J \ddot{\theta}_2 - C \dot{\theta}_1 + C \dot{\theta}_2 - K \theta_1 + K \theta_2 &= T_2. \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$J_{11} = \frac{1}{3} J_s, J_{12} = J_{21} = \frac{1}{6} J_s, J_{22} = \frac{1}{3} J_s,$$

$$K_{11} = K_{22} = K, K_{12} = K_{21} = -K,$$

$$C_{11} = C_{22} = C, C_{12} = C_{21} = -C,$$

则(15)式变为矩阵形式

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

也可写为

$$[J]\{\ddot{\theta}\} + [C]\{\dot{\theta}\} + [K]\{\theta\} = \{T\}. \quad (17)$$

方程(17)就是二端面弹性转轴动力学方程. 式中  $[J]$  为惯量矩阵  $[C]$  为阻尼矩阵  $[K]$  为刚度矩阵, 且

$$\{\theta\} = \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}. \quad (18)$$

### 3. 二端面弹性转轴动力学方程的伽利略坐标变换

(17)式是在地面(机架)坐标系  $S$  系下的动力学方程. 设  $S$  系的  $O_x$  轴与弹性转轴中心线重合, 如图 1 所示.  $O_{yz}$  面与弹性转轴左端面  $A$  重合. 设有另一坐标系  $S'(O'_x y' z')$ , 命  $S'$  系的原点与  $S$  系的原点重合,  $S'$  系的  $O'_z$  轴与  $S$  系的  $O_z$  轴重合,  $S'$  系相对于  $S$  转动. 在工程上, 非常关心二端面弹性转轴的右端面  $B$  与左端面  $A$  的动力学过程. 若将坐标系  $S'$  与弹性转轴的左端面  $A$  固联并随其一起转动, 则通过伽利略变换推导相对动力学方程.

伽利略变换设为

$$q_2 = \theta_2 - \dot{\theta}_1 t,$$

$$r' = r = \text{const}, \quad (19)$$

$$t' = t,$$

其中

$$q_1 = \theta_1, \quad \theta_1 = \dot{\theta}_1 t. \quad (20)$$

$q_2$  即为弹性转轴的右端面  $B$  相对于左端面  $A$  的转角. 将(20)式代入(19)式并求一阶、二阶导数得

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1, \quad \ddot{q}_2 = \ddot{\theta}_2 - \ddot{\theta}_1. \quad (21)$$

将(21)式代入(15)式, 消去  $\ddot{\theta}_2$ , 整理得

$$\frac{J}{2} \ddot{q}_1 + \frac{J}{6} \ddot{q}_2 - C \dot{q}_2 - K q_2 = T_1,$$

$$\frac{J}{2} \ddot{q}_1 + \frac{J}{3} \ddot{q}_2 + C \dot{q}_2 + K q_2 = T_2. \quad (22)$$

以上二式相减, 得

$$\frac{J}{6} \ddot{q}_2 + 2C \dot{q}_2 + 2K q_2 = T_2 - T_1. \quad (23)$$

这就得出二端面弹性转轴在(19)式伽利略坐标变换下的相对动力学方程. 其中导数是对  $t'$  进行的. 二端面弹性转轴两端面的状态是建立回转系统动力学方程的连续条件和边界条件. 根据  $T_2 - T_1$ , 解出  $q_2$  即为相对角位移方程. 由于  $K > 0$ , 所以方程的特征根为复数, 相对角位移  $q_2$  一般是时间  $t = t'$  的振荡周期函数, 即由于转轴的扭转刚度存在, 不可能使相对转角无限增加. 这是符合物理条件的. 伽利略变换是惯性系的坐标变换, 即  $\ddot{\theta}_1 = 0$ . 在上述(21)式的推导中利用了这一条件, 即

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_1 t = \dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1.$$

对于非惯性系, 上式不成立. 但是对于非惯性系的每一瞬时, 方程(23)是成立的.

### 4. 二端面弹性转轴动力学方程的广义坐标变换

仍不考虑相对论效应, 但

$$\ddot{\theta}_1 \neq 0, \quad (24)$$

伽利略变换为(19)式, 对  $q_2$  两次求导得

$$\dot{q}_2 = \dot{\theta}_2 - (\dot{\theta}_1 t)' = \dot{\theta}_2 - (\dot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_1 t), \quad (25)$$

$$\ddot{q}_2 = \ddot{\theta}_2 - 2\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_1 t. \quad (26)$$

将(25)(26)式代入(15)式, 整理得

$$\frac{2}{3} J \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} \ddot{q}_2 + \frac{1}{6} J \ddot{q}_1 t - C \dot{q}_2 - C \dot{q}_1 t - K q_2 = T_1,$$

$$\frac{5}{6} J \ddot{q}_1 + \frac{1}{3} J \ddot{q}_2 + \frac{1}{3} J \ddot{q}_1 t + C \dot{q}_2 + C \dot{q}_1 t + K q_2 = T_2. \quad (27)$$

(27)式是二端面弹性转轴的一般性相对动力学方程组. 当  $\ddot{q}_1 = 0$  时便得到(22)式. 当  $\ddot{q}_1 = 0$  时(27)式变为

$$\frac{2}{3} J \ddot{q}_1 + \frac{1}{6} J \ddot{q}_2 - C \dot{q}_2 - C \dot{q}_1 t - K q_2 = T_1,$$

$$\frac{5}{6} J \ddot{q}_1 + \frac{1}{3} J \ddot{q}_2 + C \dot{q}_2 + C \dot{q}_1 t + K q_2 = T_2. \quad (28)$$

整理得

$$\frac{J}{2} \ddot{q}_2 + 9C \dot{q}_2 + 9C \dot{q}_1 t + 9K q_2 = 4T_2 - 5T_1. \quad (29)$$

这就得出二端面弹性转轴在(19)式和(20)式伽利略坐标变换下的广义动力学方程.与方程(23)相比,从系数上转动惯量加大到三倍,刚度加大到4.5倍,阻尼系数加大到4.5倍,无阻尼自由振荡频率增大到 $\sqrt{\frac{3}{2}}$ 倍,但驱动力降低了.根据 $4T_2 - 5T_1$ ,解出 $q_2$ 可得相对角位移方程.由于 $9K > 0$ ,所以相对角位移 $q_2$ 一般是时间 $t = t'$ 的周期函数.由于伽利略变换仅是在惯性系下的坐标变换,故方程(29)也具有瞬时性.

在解方程(29)时,由于方程中含有久期项,显含时间 $t$ .方程变成非定常、非线性的非自治二阶微分方程.方程的解的复杂性表现出来了,同时也表明了动力学过程模拟的复杂性.这正是我们要揭示的静、动态精确计量标定的巨大差异.一般金属材料的阻尼系数较小,在相对较平稳的运行中,相对加速度较小,含 $t$ 项是一二阶小量,方程(29)可看作是在小扰动量作用下的参数方程.在一般精度的测量中可略去二阶小量久期项.方程(29)变为

$$\frac{J}{2}\ddot{q}_2 + 9C\dot{q}_2 + 9Kq_2 = 4T_2 - 5T_1. \quad (30)$$

## 5. 对二端面弹性转轴动力学方程的相似模拟

二端面弹性转轴的动力学方程建立后的测控是需要较高的技术支持的.为实现测控,一般将参考系建立在地面坐标系下,即令

$$q_1 = \dot{q}_1 = \ddot{q}_1 = \ddot{q}_1 = 0, \quad (31)$$

$T_1$ 变为约束力,故方程(28)中的第一式无法确定.将(31)式代入(28)式的第二式得

$$\frac{1}{3}J\ddot{q}_2 + C\dot{q}_2 + Kq_2 = T_2, \quad (32)$$

$T_1$ 由(32)式通过 $T_2$ 确定的 $q_2$ 确定,将(31)式代入(28)式的第一式得

$$\frac{1}{6}J\ddot{q}_2 - C\dot{q}_2 - Kq_2 = T_1. \quad (33)$$

将方程(31)代入(15)式所得结果与(32)式和(33)式相同.方程(32)可作为方程(23)(30)的相似方程,通过测试方程(32)后将参量变换为与之相似的方程(23)(30)的参量,从而求得二端面弹性转轴方程(23)(30)的解.

## 6. 二端面弹性转轴动力学方程的比较与分析

二端面弹性转轴的动力学方程,是二阶耦合常微分方程组,伽利略广义坐标变换的方程则是非自治的非线性的二阶耦合微分方程组.在第3节中假设 $\ddot{q}_1 = 0$ 后,得到了常系数微分方程组,并推出了相对动力学方程.现在我们把第2,3,4节推出的动力学方程的解在给定初始条件下求出.把(23),(30)(32)式重写在下面

$$\frac{J}{6}\ddot{q}_2 + 2C\dot{q}_2 + 2Kq_2 = T_2 - T_1, \quad (34)$$

$$\frac{J}{2}\ddot{q}_2 + 9C\dot{q}_2 + 9Kq_2 = 4T_2 - 5T_1, \quad (35)$$

$$\frac{1}{3}J\ddot{q}_2 + C\dot{q}_2 + Kq_2 = T_2. \quad (36)$$

若令 $M = \frac{3C}{J}$ ,  $N = \frac{3}{J}$ .不失一般性,角度的角标2去掉,方程(36)扭矩的角标2也去掉,则(34),(35)(36)式变为

$$\ddot{q} + 4M\dot{q} + 4NKq = 2N(T_2 - T_1), \quad (37)$$

$$\ddot{q} + 6M\dot{q} + 6NKq = \frac{2}{3}N(4T_2 - 5T_1), \quad (38)$$

$$\ddot{q} + M\dot{q} + NKq = NT. \quad (39)$$

若令施加的转矩 $T = \chi(T_2 - T_1)$ 或 $T = \frac{2}{3}(4T_2 - 5T_1)$ 则(39)式变为

$$\ddot{q} + M\dot{q} + NKq = 2N(T_2 - T_1) \quad (40)$$

或

$$\ddot{q} + M\dot{q} + NKq = \frac{2}{3}N(4T_2 - 5T_1). \quad (41)$$

比较(40)式与(37)式以及(41)式与(38)式可以看出,两方程仅差两个常系数4和6.(39)式是一个二阶正规形式的微分方程.由于 $NK > 0$ ,方程(37),(38)(39)的特征方程的根是共轭复数,故方程(37)(38)(39)的解一定是振动解.令 $M = 2b$ ,  $NK = a^2$ ,  $T' = 2N(T_2 - T_1)$ 或 $T' = \frac{2}{3}N(4T_2 - 5T_1)$ 则方程(37)(38)(40)或(41)变为

$$\ddot{q} + \chi(4b)\dot{q} + (2a)^2q = T', \quad (42)$$

$$\ddot{q} + \chi(6b)\dot{q} + (\sqrt{6}a)^2q = T', \quad (43)$$

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + a^2q = T'. \quad (44)$$

现求方程(44)的解,其齐次方程为

$$\ddot{q} + 2b\dot{q} + a^2q = 0. \quad (45)$$

一般金属材料  $b$  值比  $a$  值小,故  $b^2 - a^2 < 0$ . 令  $\alpha = \sqrt{a^2 - b^2}$ . 则(45)式的通解为

$$q = e^{-bt}(C_1 \cos at + C_2 \sin at), \quad (46)$$

若按角位移引起的振动计算,上式变为

$$q = \frac{q_0}{\alpha} e^{-bt}(\alpha \cos at + b \sin at). \quad (47)$$

若设  $\varphi = \tan^{-1}(b/\alpha)$  则上式变为

$$q = \frac{q_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \varphi). \quad (48)$$

这一结果是减幅振荡解. 周期

$$T = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{3K}{J} - \frac{9C^2}{4J^2}}}, \quad (49)$$

自然频率  $f$  为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K}{J} - \frac{9C^2}{4J^2}}, \quad (50)$$

设

$$T' = \frac{6}{J} T_0 \cos \omega t, \quad (51)$$

按级数展开原则,若  $T'$  符合狄里赫利条件,  $T'$  可展成富氏级数的形式,若略去高次项,考虑微振动,则(51)式是有代表意义的力学形式. 此时方程(45)的特解为

$$q = \frac{2T_0}{\left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right)^2 + \omega^2 C^2} \left[ \omega C \sin \omega t + \left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right) \cos \omega t \right]. \quad (52)$$

若

$$\phi = \tan^{-1} \left[ \frac{\omega C}{\left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right)} \right], \quad (53)$$

则

$$q = \frac{2T_0}{\left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right)^2 + \omega^2 C^2} \cos(\omega t - \phi). \quad (54)$$

(44)式的通解为

$$q = e^{-bt}(C_1 \cos at + C_2 \sin at) + \frac{T_0}{\left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right)^2 + \omega^2 C^2} \cos(\omega t - \phi) = \frac{q_0 \sqrt{a^2 + b^2}}{\alpha} e^{-bt} \cos(\alpha t - \varphi) + \frac{T_0}{\left(K - \frac{\omega^2 J}{3}\right)^2 + \omega^2 C^2} \cos(\omega t - \phi). \quad (55)$$

从上述推导可以看出方程(42)(43)的系数是方程(44)相应系数的确定倍数,即

$$2a \rightarrow a; 4b \rightarrow b; \frac{J}{6} \rightarrow \frac{J}{3}; 4K \rightarrow K \quad (56)$$

或

$$\sqrt{6}a \rightarrow a; 6b \rightarrow b; \frac{J}{2} \rightarrow \frac{J}{3}; 6K \rightarrow K. \quad (57)$$

(56)(57)式即是方程(49)(50)(52)(53), (54)(55)的相似关系. 将相似关系代入方程(55)后便可得到方程(23)(30)的通解,是在初始扰动下的相对角位移表达式. 其中的第一项,显然是暂态项,当  $t \rightarrow \infty$  时,它趋近于 0,但是这一过程与材料的阻尼状况有关,当  $b$  较小时,这一过程可能要持续相当长一段时间,这对于测量和控制是非常不利的. 应设法降低这一过程带来的影响.(55)(56)(57)式对揭示二端面弹性转轴的转动机理,为进行计量与测试工作的相似模拟提供途径和手段. 方程(32)称为方程(23)(30)的相似动力学方程,相似比为(56)(57)式.

总之(55)式表明,在测得的转角中,既有外加转矩产生的角位移,还有由于二端面弹性转轴系统固有的随外加扰动而产生的扭转振动,在信号分析时,应采取一定的措施加以分辨.

## 7. 结 论

本文建立了二端面弹性转轴的相对动力学方程和相似动力学方程,确定了相似动力学方程与相对动力学方程的相似比. 给出了两方程在一定初始条件下的通解及相似关系,并在工程中的应用提出了一些建议和参考. 为相似工程学、计量与测控仪器的模拟标定提供了理论依据和方法.

- [ 1 ] Bengtsson R and Frauendorf S 1979 *Nuclear Physics A* **327** 139
- [ 2 ] Carmeli M 1985 *Foundations of Physics* **15** 175
- [ 3 ] Carmeli M 1986 *International Journal of Theoretical Physics* **15** 89
- [ 4 ] Luo S K 1996 *Journal of Beijing Institute of Technology* **16**( S1 ) 154  
( in Chinese ] 罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**( S1 ) 154 ]
- [ 5 ] Luo S K 1998 *Applied Mathematics and Mechanics* **19** 45
- [ 6 ] Luo S K , Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 in Chinese ] 罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383 ]
- [ 7 ] Luo S K , Guo Y X , Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 in Chinese ] 罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049 ]
- [ 8 ] Luo S K , Guo Y X and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053  
( in Chinese ] 罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053 ]
- [ 9 ] Luo S K , Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
- [ 10 ] Zhang Y L , Qiao Y F and Ma Y P 1999 *Acta Mechanica Solida Sinica* **20** 356 in Chinese ] 张耀良、乔永芬、马云鹏 1999 固体力学学报 **20** 356 ]
- [ 11 ] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 in Chinese ] 方建会 2000 物理学报 **49** 1028 ]
- [ 12 ] Fu J L , Chen X W and Luo S K 1999 *Applied Mathematics and Mechanics* **20** 1175 in Chinese ] 傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1999 应用数学和力学 **20** 1175 ]
- [ 13 ] Fang J H and Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 in Chinese )  
[ 方建会、赵嵩脚 2001 物理学报 **50** 390 ]
- [ 14 ] Qiao Y F , Li R J and Meng J 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1000 in Chinese ] 乔永芬、李仁杰、孟 军 2001 物理学报 **50** 1000 ]
- [ 15 ] Ge T S ( T. S. Ke ) 1999 *Physica* **28** 529 in Chinese ] 葛庭燧 1999 物理 **28** 529 ]

## A similarity dynamic equation of an elastic rotation shaft with twin sides under the Galileo coordinate conversion \*

Dong Quan-Lin Liu Bin

( Department of instrument science and engineering ,Yanshan University , Qinhuangdao 066004 ,China )

( Received 6 November 2001 ; revised manuscript received 8 February 2002 )

### Abstract

A novel similarity dynamic equation of an elastic rotation shaft with twin sides is built within the nonrelativistic theory , in this paper. We make a similarity between the dynamic equation of an elastic rotation shaft with twin sides and that under the ground coordinates. It can provide the theoretical background and method for the similarity engineering and the similarity calibration for quantification and measurement-control.

**Keywords** : twin side elastic rotation shaft , similarity analog , coordinate conversion , similarity dynamics equation , calibration

**PACC** : 0340D , 0313 , 0316

\* Project supported by the Technological Tackle Key Problems of Hebei Province , China ( Grant No. 02212106D ).