第 51 卷 第 10 期 2002 年 10 月
1000-3290/2002/51(10)/2197-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.10,October,2002

非线性耦合 Schrödinger-KdV 方程组新的精确解析解*

张善卿　李志斌†

(华东师范大学计算机科学技术系,上海　200062)

(2001 年 12 月 13 日收到;2002 年 3 月 13 日收到修改稿)

利用一类耦合 Riccati 方程组的某些特解构造了非线性耦合 Schrödinger-KdV 方程组一批精确解析解,获得了该方程组若干形式一般的精确解及两组新的孤波解.

关键词:孤波解,Schrödinger-KdV 方程组,符号计算

PACC:0340K,0290

1. 引　言

非线性耦合 Schrödinger-KdV 方程组[1]

$$\begin{cases} \mathrm{i}\dfrac{\partial S}{\partial t}+\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}=SL, \\ \dfrac{\partial L}{\partial t}+\alpha L\dfrac{\partial L}{\partial x}+\beta\dfrac{\partial^3 L}{\partial x^3}=\dfrac{\partial}{\partial x}(|S|^2), \end{cases} \tag{1}$$

是描述非线性耗散介质中长波和短波之间相互作用的重要模型,其中 L 表示实的长波,S 表示复的短波,α,β 为控制参数,详细物理背景可参阅文献[2,3].在文献[4]中 Yoshinaga 等人利用改进的 Hirota 方法给出了方程组(1)的五组孤波解.最近,文献[5,6]分别改进了双曲正切方法[7—10],并利用这种方法求得了若干非线性方程和方程组的精确解.本文把这些方法推广应用于方程组(1),借助计算机代数系统 Maple,获得了方程组(1)的七组孤波解,这些解不仅包含了 Yoshinaga 的结果,更主要的是获得了两组新的正则孤波解.

2. 非线性耦合 Schrödinger-KdV 方程组的孤波解

为了寻求方程组(1)的行波解,引入行波变换

$$S(x,t)=S(\xi)\exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right],$$
$$L(x,t)=L(\xi), \tag{2}$$

其中 $\xi=x-ct$,c 为任意非零常数.在变换(2)式下方程组(1)化作常微分方程组

$$\begin{cases} S''+\dfrac{c}{2}\left(V-\dfrac{c}{2}\right)S=SL, \\ \beta L''+\dfrac{\alpha}{2}L^2-cL=S^2-C^2, \end{cases} \tag{3}$$

其中 C 是积分常数,$'$:$=\mathrm{d}/\mathrm{d}\xi$.

为求解(3)式,考虑一类耦合的 Riccati 方程组

$$f'(\xi)=-kf(\xi)g(\xi),$$
$$g'(\xi)=k(1-g^2(\xi)-rf(\xi)), \tag{4}$$

其中 k,r 是任意常数.方程组(4)有两组特解(简称为基本孤波函数)

$$f(\xi)=\pm\frac{1}{\cosh[k(\xi+\xi_0)]+r},$$
$$g(\xi)=\frac{\sinh[k(\xi+\xi_0)]}{\cosh[k(\xi+\xi_0)]+r}, \tag{5}$$

和

$$f(\xi)=\pm\frac{1}{\sinh[k(\xi+\xi_0)]+r},$$
$$g(\xi)=\frac{\cosh[k(\xi+\xi_0)]}{\sinh[k(\xi+\xi_0)]+r}, \tag{6}$$

其中 ξ_0 是为任意常数(通常可取为零),k 为波数,为使(5)式成为正则的孤波解,不妨设 $r>0$ 且 $r\neq 1$.容易看出(5)式和(6)式分别满足

$$g^2=1-2rf+(r^2-1)f^2 \tag{7}$$

和

$$g^2=1-2rf+(r^2+1)f^2. \tag{8}$$

假定 S,L 可以表示为基本孤波函数 f 和 g 的多项式,次数分别为 m,n,平衡(3)式中线性最高阶导

* 国家重点基础研究发展规划(批准号:G1998030600)和上海市曙光计划资助的课题.

† 联系人:lizb@cs.ecnu.edu.cn

数项与非线性项的次数,得到 $m=0,1,2,n=2$,于是可设

$$\begin{cases} S = a_0 + a_1 f + a_2 f^2 + b_1 g + b_2 fg, \\ L = c_0 + c_1 f + c_2 f^2 + d_1 g + d_2 fg, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $c_2 \neq 0$ 或 $d_2 \neq 0$.考虑到(7)式,上式中 g 的最高次数为 1.将(9)式代入(3)式,利用(4),(5)及(7)式,可得到关于待定参数 $a_0,a_1,a_2,b_1,b_2,c_0,c_1,c_2,d_1,d_2,k,r,c,C,V$ 的非线性代数方程组

$$\begin{cases} \alpha d_2^2 r^2 - 2b_2^2 r^2 - \alpha d_2^2 + 2b_2^2 - 2a_2^2 + 12\beta c_2 k^2 r^2 + \alpha c_2^2 - 12\beta c_2 k^2 = 0, \\ 2b_1 b_2 - \beta c_1 k^2 + 2a_1 a_1 - \alpha d_1 d_2 + \alpha d_1^2 r + cc_1 - 2b_1^2 r - \alpha c_0 c_1 = 0, \\ 2b_1 b_2 + \alpha d_1 d_2 r^2 - 2\beta c_1 k^2 - 2a_1 a_2 - 2b_1 b_2 r^2 - 10\beta c_2 k^2 r + 2b_2^2 r + \alpha c_1 c_2 \\ \qquad - \alpha d_2^2 r + 2\beta c_1 k^2 r^2 - \alpha d_1 d_2 = 0, \\ 2C^2 - 2b_1^2 + \alpha c_0^2 - 2cc_0 - 2a_0^2 + \alpha d_1^2 = 0, \\ \alpha d_2^2 - 4a_0 a_2 + \alpha c_1^2 - 2b_1^2 r^2 - 2cc_2 - 4\alpha d_2 d_2 r - \alpha d_1^2 + 8\beta c_2 k^2 + 8b_1 b_2 r \\ \qquad - 2b_2^2 + 2b_1^2 - 6\beta c_1 k^2 r + 2\alpha c_0 c_2 - a_1^2 + \alpha d_1^2 r^2 = 0, \\ \alpha c_1 d_1 + \beta d_2 k^2 + \alpha c_0 d_2 - \beta d_1 k^2 r - cd_2 - 2a_1 b_1 - 2a_0 b_2 = 0, \\ 6\beta d_2 k^2 r^2 + \alpha c_2 d_2 - 6\beta d_2 k^2 - 2a_2 b_2 = 0, \\ \alpha c_0 d_1 - 2a_0 b_1 - cd_1 = 0, \\ \alpha c_2 d_1 + 2\beta d_2 k^2 r^2 - 2a_2 b_1 - 2a_1 b_2 - 2\beta d_1 k^2 - 6\beta d_2 k^2 r + \alpha c_1 d_2 = 0, \\ b_2 d_2 - 6a_2 k^2 + 6a_2 k^2 r^2 - b_2 d_2 r^2 - a_2 c_2 = 0, \\ 2cVa_1 - 4a_0 c_1 - 4a_1 c_0 - 4b_2 d_1 - c^2 a_1 - 4b_1 d_2 + 4a_1 k^2 + 8b_1 d_1 r = 0, \\ b_1 d_2 - b_1 d_2 r^2 - a_2 c_1 - a_1 c_2 - 10a_2 k^2 r + b_2 d_1 - b_2 d_1 r^2 - 2a_1 k^2 + 2a_1 k^2 r^2 + 2b_2 d_2 r = 0, \\ 2cVa_0 - 4a_0 c_0 - c^2 a_0 - 4b_1 d_1 = 0, \\ 4b_1 d_1 - 12a_1 k^2 r - 4b_2 d_2 + 8b_1 d_2 r - 4b_1 d_1 r^2 - c^2 a_2 + 2cVa_2 - 4a_0 c_2 + 16a_2 k^2 \\ \qquad - 4a_1 c_1 + 8b_2 d_1 r - 4a_2 c_0 = 0, \\ 4b_2 k^2 - 4b_1 k^2 r + 2cVb_2 - 4a_0 d_2 - 4b_1 c_1 - 4a_1 d_1 - c^2 b_2 - 4b_2 c_0 = 0, \\ 6b_2 k^2 r^2 - a_2 d_2 - 6b_2 k^2 - b_2 c_2 = 0, \\ 2cVb_1 - c^2 b_1 - 4b_1 c_0 - 4a_0 d_1 = 0, \\ 2b_1 k^2 r^2 - a_1 d_2 - b_2 c_1 - a_2 d_1 - 2b_1 k^2 - 6b_2 k^2 r - b_1 c_2 = 0. \end{cases} \tag{10}$$

在计算机代数系统 Maple 上利用吴文俊消元法[11]求解方程组(10),获得了这个方程组许多非平凡解.由(9),(5)和(2)式,最终得到了方程组(1)的七组正则孤波解,所获结论总结如下:

1)当参数 α,β 满足 $\alpha+6\beta=0$ 时,方程组(1)有两组解

$$\begin{cases} S_1(x,t) = A\operatorname{sech}[k(x-ct)]\exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_1(x,t) = k^2 + \frac{c}{2}\left(V-\frac{c}{2}\right) - 2k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \end{cases} \tag{11}$$

其中

$$A^2 = k^2(2c + 4k^2\beta + 6\beta cV - 3\beta c^2),$$

积分常数 C 满足

$$C^2 = \frac{1}{16}(4k^2 - c^2 + 2cV)(12k^2\beta - 3\beta c^2 + 6\beta cV + 4c),$$

k,c,V 为任意常数.显然,若 C 取为零,必须使其一个因子为零,例如 $4k^2-c^2+2cV=0$,此时,解(11)式即为文献[4]中的(2.6)式.

$$\begin{cases} S_2(x,t) = A\tanh[k(x-ct)]\exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_2(x,t) = \frac{c}{2}\left(V-\frac{c}{2}\right) - 2k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$A^2 = k^2(-2c - 6\beta cV + 3\beta c^2 + 8k^2\beta),$$

k,c,V 为任意常数,积分常数 C 满足

$$C^2 = -\frac{1}{16}\left(32ck^2 + 96\beta k^2 cV - 48\beta k^2 c^2 - 128\beta k^4 - 12\beta c^2 V^2 + 12\beta c^3 V - 3\beta c^4 - 8c^2 V + 4c^3\right). \quad (13)$$

在解(12)式中特别令 $V = \frac{c}{2}$，此时 $C^2 = A^2 = 2k^2(-c + 4k^2\beta)$，解(12)式即为文献[4]的(2.9)式.

2)当参数 α,β 满足 $\alpha + 2\beta > 0$ 时，方程组(1)有两组解

$$\begin{cases} S_3(x,t) = A\operatorname{sech}^2[k(x-ct)]\exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_3(x,t) = \frac{c-4\beta k^2}{\alpha} - 6k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$A^2 = 18k^4(\alpha + 2\beta), k^2 = \frac{c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)}{16(\alpha + \beta)},$$

积分常数 C 满足

$$C^2 = \frac{c^2 - 16\beta^2 k^4}{2\alpha},$$

c, V 为任意常数，

$$c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)(\alpha + \beta) > 0.$$

在解(14)式中，特别取 $V = \frac{c}{2} - \frac{2}{\beta}$，此时，$k^2 = \frac{c}{4\beta}$，$C = 0$，解(14)式退化为文献[4]的(2.8)式.

$$\begin{cases} S_4(x,t) = A\left\{1 - \frac{3}{2}\operatorname{sech}^2[k(x-ct)]\right\} \\ \qquad \times \exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_4(x,t) = \frac{c}{2}\left(V - \frac{c}{2}\right) - 6k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$A^2 = 8k^4(\alpha + 2\beta), k^2 = -\frac{c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)}{16(\alpha + \beta)},$$

积分常数 C 满足 $C^2 = \frac{c^2 - 16\beta^2 k^4}{2\alpha}$，$c, V$ 为任意常数，$c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)(\alpha + \beta) < 0$. 在解(15)式中特别取 $V = \frac{c}{2}$，解(15)式即为文献[4]的(2.10)式.

3)当参数 α,β 满足 $\alpha + 2\beta < 0$ 时，方程组(1)有一组解

$$\begin{cases} S_5(x,t) = A\tanh[k(x-ct)]\operatorname{sceh}[k(x-ct)] \\ \qquad \times \exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_5(x,t) = k^2 + \frac{c}{2}\left(V - \frac{c}{2}\right) \\ \qquad - 6k^2\operatorname{sech}^2[k(x-ct)], \end{cases} \quad (16)$$

其中

$$A^2 = -18k^4(\alpha + 2\beta), k^2 = -\frac{c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)}{8(\alpha + \beta)},$$

积分常数 C 满足

$$C^2 = -\frac{1}{32}(c^2 - 4k^2 - 2cV)(\alpha c^2 - 2\alpha cV + 8c - 4\alpha k^2),$$

c, V 为任意常数，$c(c\alpha + 4 - 2V\alpha)(\alpha + \beta) < 0$. 若取 C^2 的因子 $c^2 - 4k^2 - 2cV = 0$，则可以推出 $V = \frac{c}{2} + \frac{2}{3\alpha + 2\beta}$，这正是文献[4]所给出的条件，此时，解(16)式就退化为文献[4]的(2.7)式.

4)当参数 α,β 满足 $3\alpha + 4\beta = 0$，$\beta > 0$ 时，方程组(1)有一组解

$$\begin{cases} S_6(x,t) = \pm 5\sqrt{6\beta}k^2 \frac{\sqrt{7}\cosh(x-ct) + 2\sqrt{2}}{(\sqrt{7}\cosh(x-ct) + \sqrt{2})^2} \\ \qquad \times \exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_6(x,t) = k^2 + \frac{1}{2}cV - \frac{1}{4}c^2 \\ \qquad - 30k^2 \frac{1}{(\sqrt{7}\cosh(x-ct) + \sqrt{2})^2}, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$V = \frac{1}{2}\frac{23\beta k^2 + \beta c^2 - 3c}{\beta c},$$

k, c 为任意常数，积分常数 C 满足

$$C = \pm\frac{1}{4}\frac{\sqrt{-6\beta(c^2 - 81\beta^2 k^4)}}{\beta}.$$

5)当参数 α,β 满足 $3\alpha + 4\beta = 0$，$\beta < 0$ 时，方程组(1)有一组解

$$\begin{cases} S_7(x,t) = \pm 3\sqrt{-10\beta}k^2\sinh(x-ct)(\sqrt{5}\cosh(x \\ \qquad - ct) + 2\sqrt{2})(\sqrt{5}\cosh(x-ct) + \sqrt{2})^{-2} \\ \qquad \times \exp\left[\mathrm{i}\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L_7(x,t) = \frac{c}{2}\left(V - \frac{c}{2}\right) \\ \qquad - 18k^2 \frac{1}{(\sqrt{5}\cosh(x-ct) + \sqrt{2})^2}, \end{cases} \quad (18)$$

其中 $V = \frac{c}{2} + \frac{39k^2}{2c} - \frac{3}{2\beta}$，$k, c$ 为任意常数. 积分常数 C 满足 $C = \pm\frac{1}{4}\frac{\sqrt{-6\beta(c^2 - 121\beta^2 k^4)}}{\beta}$. 解(17)式和(18)式是本文新获得的.

3. 讨　　论

从上节的结论可以看出，本文获得的 Schrödinger-KdV方程组的精确解形式较文献[4]更为一般，不仅如此，我们还得到了两组新解. 另外，如果利用(4)式

的解(6)式和关系式(8)式,类似地也可以获得方程组(1)奇异形式的孤波解.这里仅列出其一,其余略.

当参数 α,β 满足 $3\alpha+4\beta=0,\beta>0$ 时,方程组(1)有如下奇异孤波解

$$\begin{cases} S(x,t) = \pm 110\sqrt{3\beta}k^2\left(2\sqrt{7}\sinh[k(x-ct)] + 3\sqrt{3}\right)^{-2}\exp\left[\mathrm{i}\,\frac{c}{2}(x-Vt)\right], \\ L(x,t) = 4k^2 + \frac{c}{2}\left(V-\frac{c}{2}\right) - \frac{30\sqrt{3}k^2}{2\sqrt{7}\sinh[k(x-ct)]+3\sqrt{3}} + \frac{330k^2}{\left(2\sqrt{7}\sinh[k(x-ct)]+3\sqrt{3}\right)^2}, \end{cases} \tag{19}$$

其中 $V=\frac{c}{2}-\frac{13k^2}{2c}-\frac{3}{2\beta}$,$k$,$c$ 为任意常数,积分常数 C 满足

$$C = \pm\frac{1}{4}\frac{\sqrt{-6\beta(c^2-\beta^2k^4)}}{\beta}.$$

解(19)式也是本文首次获得的,同文献[6]所使用的方法不同,当 $r\neq0$ 时方程组(1)的正则孤波解与奇异孤波解并不是相伴出现的.

本文获得的解均在计算机代数系统 Maple 上得以验证.

[1] Yoshinaga T, Wakamiya M and Kakutani T 1991 *Phys. Fluids* A **3** 83

[2] Djordjevic V D and Redekoop L G 1977 *J. Fluid Mech.* **79** 703

[3] Yajima N and Satsuma J 1979 *Prog. Thero. Phys.* **62** 370

[4] Yoshinaga T and Kakutani T 1994 *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** 445

[5] Zhang G X, Li Z B and Duan Y S 2000 *Chinese Science* (Ser. A) **30** 1103 (in Chinese) [张桂戌等 2000 中国科学(A 辑) **30** 1103]

[6] Li Z B *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2062 (in Chinese) [李志斌等 2001 物理学报 **50** 2062]

[7] Li Z B *et al* 1997 *Acta Mathermatica Sinica* **17** 81 (in Chinese) [李志斌等 1997 数学物理学报 **17** 81]

[8] Fan E G *et al* 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1064 (in Chinese) [范恩贵等 1998 物理学报 **47** 1064]

[9] Yan Z Y *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1962 (in Chinese) [闫振亚等 1999 物理学报 **48** 1962]

[10] Xia T C, Zhang H Q and Yan Z Y 2001 *Chin. Phys.* **8** 694

[11] Wu W T 1984 *Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometry* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [吴文俊 1984 几何定理机器证明的基本原理(北京 科学出版社)]

New explicit exact solutions to nonlinearly coupled Schrödinger-KdV equations *

Zhang Shan-Qing，Li Zhi-Bin

(*Department of Computer Science*，*East China Normal University*，*Shanghai* 200062，*China*)

(Received 13 December 2001；revised manuscript received 13 March 2002)

Abstract

New explicit exact solutions of the coupled Schrödinger-KdV equations are constructed by using the special solutions of a class of Riccati equations，and several general forms of exact solutions and two new solitary wave solutions of the equations are obtained.

Keywords：solitary wave solution，Schrödinger-KdV equations，symbolic computation

PACC：0340K，0290

* Project supported by the State Key Program of Basic Research of China (Grant No. G1998030600)，and the "Shu-Guang" Project of Shanghai，China.