第 51 卷 第 10 期 2002 年 10 月
1000-3290/2002/51(10)/2202-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.10,October,2002

运动边界的电磁场边界条件*

梁昌洪　褚庆昕

(西安电子科技大学电子工程学院,西安　710071)

(2002 年 2 月 2 日收到;2002 年 3 月 28 日收到修改稿)

基于 Einstein 相对论,给出了运动边界的电磁场边界条件,指出了以往运动边界条件存在的问题.

关键词:电磁场边界条件,运动边界,Einstein 相对论
PACC:0350D,0420

1. 引　　言

在不同媒质的交界面上 Maxwell 方程组的微分形式已不再成立,取而代之的是边界条件,因此,边界条件实质上就是边界上电磁场的支配方程.静止边界的边界条件在各类电磁理论专著和教材中都已有了充分的讨论.但是,运动边界的边界条件却讨论甚少.在文献[1—3]中,讨论了不同媒质交界面以速度 $\boldsymbol{v}$ 整体运动时的边界条件,其出发点是根据包围体积 v 的闭合面 s 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动时,对于任意矢量场 $\boldsymbol{A}$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_v \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}v = \int_v \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t} + \oint_s \boldsymbol{A}(\hat{n}\cdot\boldsymbol{v})\,\mathrm{d}s. \tag{1}$$

将上式用于 Maxwell 方程组的积分形式,便可以得到运动边界条件为

$$\hat{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)+(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\boldsymbol{J}_s, \tag{2a}$$

$$\hat{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)-(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0, \tag{2b}$$

$$\hat{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0, \tag{2c}$$

$$\hat{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s, \tag{2d}$$

式中下标 1,2 分别表示媒质 1 和媒质 2,$\hat{n}$ 为媒质交界面从媒质 2 指向媒质 1 的单位法向矢量.

上述公式至少有两个方面的问题.一是(1)式只是在绝对时空观下导出的,没有考虑相对时空关系.二是(2a)与(2d)式是矛盾的.事实上,用 $\hat{n}$ 点积(2a)式两边,得 $(\boldsymbol{v}\cdot\hat{n})\hat{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\hat{n}\cdot\boldsymbol{J}_s$,因为 $\boldsymbol{J}_s$ 为交界面上表面电流密度,所以,$\hat{n}$ 与 $\boldsymbol{J}_s$ 垂直,即 $\hat{n}\cdot\boldsymbol{J}_s=0$,于是,$\hat{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=0\neq\rho_s$,与(2d)矛盾.

本文从 Einstein 相对性原理出发,导出了边界整体运动时的边界条件.

2. 运动边界的边界条件

设在惯性系 S' 中有一静止的媒质交界面 s,$\hat{n}'$ 为 s 面从媒质 2 指向媒质 1 的单位法向矢量.惯性系 S' 相对于惯性系 S 以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动,如图 1 所示.

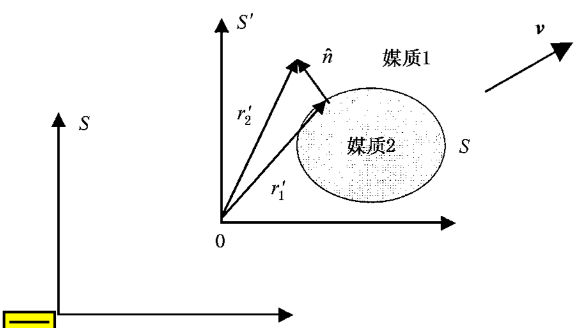

图 1　运动的媒质交界面

在 S' 系中,静止的媒质交界面 s 的边界条件为

$$\hat{n}'\times(\boldsymbol{H}'_1-\boldsymbol{H}'_2)=\boldsymbol{J}'_s, \tag{3a}$$

$$\hat{n}'\times(\boldsymbol{E}'_2-\boldsymbol{E}'_1)=0, \tag{3b}$$

$$\hat{n}'\cdot(\boldsymbol{B}'_1-\boldsymbol{B}'_2)=0, \tag{3c}$$

$$\hat{n}'\cdot(\boldsymbol{D}'_2-\boldsymbol{D}'_1)=\rho'_s. \tag{3d}$$

如图 1 所示,单位法向矢量 $\hat{n}'$ 可以用矢径 $\boldsymbol{r}'_1$ 和

* 国家自然科学基金(批准号:60171011)资助的课题.

$\boldsymbol{r}'_2$ 表示为 $\hat{n}'=\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1$ 且 $|\hat{n}'|=|\boldsymbol{r}'_2-\boldsymbol{r}'_1|=1$. 引入 Minkovski 四维空间中静止边界的单位法向矢量 $\tilde{n}'_4$：

$$\tilde{n}'_4=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'_2\\ \mathrm{j}ct'\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}'_1\\ \mathrm{j}ct'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{n}'\\ 0\end{bmatrix}. \tag{4}$$

对于任意矢量 $\boldsymbol{A}=A_x\hat{x}+A_y\hat{y}+A_z\hat{z}$，引入张量

$$\bar{\bar{A}}=\begin{bmatrix}0 & -A_z & A_y\\ A_z & 0 & -A_x\\ -A_y & A_x & 0\end{bmatrix},$$

则有 $\hat{n}'\times\boldsymbol{A}=\hat{n}'\cdot\bar{\bar{A}}$. 于是，边界条件(3a)，(3b)的简洁形式可以表示为

$$\hat{n}'^{\mathrm{T}}_4(\overline{\overline{EB}}'_1-\overline{\overline{EB}}'_2)=0, \tag{5}$$

$$\hat{n}'^{\mathrm{T}}_4(\overline{\overline{HD}}'_1-\overline{\overline{HD}}'_2)=\boldsymbol{J}'_{s4}, \tag{6}$$

式中

$$\overline{\overline{EB}}'_i=\begin{bmatrix}\bar{\bar{E}}'_i & -\mathrm{j}c\boldsymbol{B}'_i\\ \mathrm{j}c\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}_i & 0\end{bmatrix},$$

$$\overline{\overline{HD}}'_i=\begin{bmatrix}\bar{\bar{H}}'_i & -\mathrm{j}c\boldsymbol{D}'_i\\ -\mathrm{j}c\boldsymbol{D}'^{\mathrm{T}}_i & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{J}'_{4s}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}'_s\\ \mathrm{j}c\rho'_s\end{bmatrix},\quad i=1,2.$$

根据 Einstein 相对性原理，在 S 系中边界条件应具有相同的形式，即

$$\tilde{n}^{\mathrm{T}}_4(\overline{\overline{EB}}_1-\overline{\overline{EB}}_2)=0, \tag{7}$$

$$\hat{n}^{\mathrm{T}}_4(\overline{\overline{HD}}_1-\overline{\overline{HD}}_2)=\boldsymbol{J}_{s4}. \tag{8}$$

S 系中的 $\tilde{n}_4$ 与 S' 系中的 $\tilde{n}'_4$ 满足 Lorentz 变换

$$\tilde{n}'_4=\bar{\bar{L}}\ \tilde{n}_4, \tag{9}$$

式中

$$\bar{\bar{L}}=\begin{bmatrix}\bar{\bar{\alpha}} & \mathrm{j}\gamma\boldsymbol{\beta}\\ -\mathrm{j}\gamma\boldsymbol{\beta} & \gamma\end{bmatrix},\quad \bar{\bar{\alpha}}=\bar{\bar{I}}+(\gamma-1)\frac{\boldsymbol{\beta\beta}}{\beta^2},$$

$$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c},\quad \gamma=1\Big/\sqrt{1-\left(\frac{|\boldsymbol{v}|}{c}\right)^2},$$ c 为光速.

设 $\tilde{n}_4=\begin{bmatrix}\tilde{n}\\ m\end{bmatrix}$，则根据(9)式可以得到

$$\tilde{n}=\bar{\bar{\alpha}}\cdot\hat{n}', \tag{10}$$

$$m=\mathrm{j}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\cdot\tilde{n}. \tag{11}$$

将(10)和(11)式代入(5)和(6)式，展开后便得到如下形式的运动边界的边界条件：

$$\tilde{n}\times(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)+(\boldsymbol{v}\cdot\tilde{n})(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\boldsymbol{J}_s, \tag{12a}$$

$$\tilde{n}\times(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)-(\boldsymbol{v}\cdot\tilde{n})(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0, \tag{12b}$$

$$\tilde{n}\cdot(\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2)=0, \tag{12c}$$

$$\tilde{n}\cdot(\boldsymbol{D}_1-\boldsymbol{D}_2)=\rho_s. \tag{12d}$$

比较(2a)—(2c)与式(12a)—(12c)式，可以看出，两者有着相同的形式，但(12a)—(12c)式中的 $\tilde{n}$ 并不是静止边界的单位法向矢量，利用(10)式不难证明

$$|\tilde{n}|^2=|\hat{n}'|^2+\gamma^2(\hat{n}'\cdot\boldsymbol{\beta})^2\geqslant|\hat{n}'|^2=1.$$

因此，除非运动方向 $\boldsymbol{v}$ 与 $\hat{n}'$ 垂直，否则 S 系中的 $\tilde{n}$ 不再是单位法向矢量，$\tilde{n}$ 的长度大于 1.

3. 结　论

根据 Einstein 相对性原理给出了媒质交界面整体运动时的电磁场边界条件，纠正了以往文献中关于运动边界条件的错误. 本文的工作还仅限于经典电动力学，在相对论量子条件下的相关内容是今后进一步研究的工作.

[1] Costen R C and Adamson D 1965 *Proc. IEEE* **53** 1181

[2] Kong J A 1975 *Theory of Electromagnetic Waves* (New York: John Wiley & Sons)

[3] Wang Y P, Chen D Z and Liu P C 1985 *Electrodynamics in Engineering* (Xi'an: Northwest Telecommunication Institute) (in Chinese) [王一平、陈达章、刘鹏程 1985 工程电动力学(西安:西北电讯工程学院出版社)]

Electromagnetic field boundary conditions on moving interfaces*

Liang Chang-Hong Chu Qing-Xin

(*School of Electronics Engineering*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

(Received 2 February 2002; revised manuscript received 28 March 2002)

Abstract

The Boundary conditions of electromagnetic fields on moving interfaces is given based on Einstein's Principle of Relativity.

Keywords: the boundary conditions of electromagnetic fields, moving interface, Einstein's principle of relativity

PACC: 0350D, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60171011).