

一种基于三阶 Volterra 滤波器的混沌时间序列 自适应预测方法*

韦保林¹⁾ 罗晓曙^{1,2)} 汪秉宏²⁾ 全宏俊²⁾ 郭 维³⁾ 傅金阶³⁾

¹⁾ 广西师范大学物理与电子科学系, 桂林 541004)

²⁾ 中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

³⁾ 桂林市第二人民医院, 桂林 541001)

(2001 年 11 月 4 日收到, 2002 年 1 月 10 日收到修改稿)

基于 Takens 的相空间延迟坐标重构, 研究了用于混沌信号预测的三阶 Volterra 滤波器的一种乘积耦合近似实现结构, 并应用于典型的低维混沌时间序列和具有高维混沌特性的 EEG 信号的预测. 数值研究表明, 这种滤波器结构对于低维混沌时间序列的预测精度可以比二阶 Volterra 滤波器提高 10^3 倍, 而且能够较好地对一些具有高维混沌特性的 EEG 信号进行预测.

关键词: 混沌, 非线性自适应预测, 三阶 Volterra 滤波器, electroencephalography 信号

PACC: 0545

1. 引言

混沌现象是自然界广泛存在的一种不规则运动, 是一种非线性的、确定的动力学系统的复杂行为. 来源于非线性系统的混沌信号在信号处理、通信、自动控制、电子对抗、生物医学工程等领域中有着越来越广泛的应用^[1]. 随着混沌理论和应用技术研究的不深入, 混沌系统的控制^[2-6]和混沌信号的预测建模^[7, 8]已成为混沌控制及混沌信息处理领域中的一个重要的研究热点.

混沌信号不是真正的随机信号, 而是由确定的非线性动力系统产生的伪随机信号. 混沌信号可以通过重构而体现在嵌入空间的一个低维流上, 在由系统正的 Lyapunov 指数所确定的时间内, 其重构的轨迹是可以预测的. 基于混沌信号产生的确定性、非线性机制以及大量的非线性系统可用 Volterra 级数来表征^[9]这一特点, 文献 [7, 8] 先后研究了用于低维混沌时间序列自适应预测的基于 Sigmoid 函数的少参数非线性自适应预测滤波器、RPSOVE 预测滤波器等非线性滤波预测模型. 但是这些滤波器的非线性阶次都没超过二阶, 由于二阶 Volterra 滤波器的非

线性逼近能力有限, 使其对低维混沌时间序列的预测精度较低, 而且也不适应于高维混沌时间序列的预测. 为此本文研究了一种三阶 Volterra 自适应滤波器的乘积耦合近似实现结构, 并采用这种结构和非线性归一化 LMS 自适应算法^[8, 10]对一些常见的低维混沌时间序列和具有高维混沌特性的脑电 (EEG) 信号进行预测. 研究表明, 这种三阶 Volterra 自适应滤波器不仅能够大幅度提高对低维混沌时间序列的预测精度, 而且能够对具有高维混沌特性的 EEG 信号进行有效地预测, 因而具有较好的应用前景.

2. 预测滤波器模型的选定及实现结构

2.1. 模型选定

Takens 定理^[11, 12]指出: 系统原始状态变量构成的相空间和一维观测值重构相空间里的动力学行为等价, 两个相空间中的混沌吸引子微分同胚, 即一维观测值中包含有系统所有状态变量演化的全部信息. 由此演化规律可得系统下一时刻的状态, 从而得到时间序列下一时刻的预测值. 这为混沌信号的预测提供了依据. 混沌信号的预测基础是从一维观测

* 广西卫生厅医药卫生科研课题(批准号: 9929), 国家重点基础研究专项经费(973 计划), 国家自然科学基金(批准号: 19932020, 19974039, 59876039) 和香港特区政府研究资助局基金(批准号: RGC-CUHK4241/01P) 资助的课题.

数据中构造系统的等价相空间,即重构相空间.一般采用的是 Takens 时间延迟法:假设观测到的时间序列为 $\{x(t) | (t=1, 2, 3, \dots)\}$,则在状态空间中重构的某一点状态矢量可以表示为 $X(t) = \{x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \dots, x(t+(m-1)\tau)\}$ 其中 τ 是延迟时间, m 是嵌入维数,即重构相空间的维数.对于具有 N 个数据点的预测信号 $x(t)$,可以在 m 维相空间中重构成 $M = N - (m-1) \times \tau$ 个状态点,这些相点的连线构成了点在 m 维相空间中的轨迹,该轨迹表征了系统状态随时间的演化.

时间序列预测的实质是一个动力系统的逆问题,即通过动力系统的状态来重构系统的动力学模型 $F(\cdot)$,即

$$x(t' + T) = F(x(t), x(t + \tau), x(t + 2\tau), \dots, x(t + (m-1)\tau)), \quad (1)$$

其中 $t' = t + (m-1)\tau$, T 是前向预测步长 ($T > 0$).

理论研究和实践经验表明:实际中大量的非线性系统可用 Volterra 级数表征.因此可用 Volterra 级数展开式来构造预测混沌信号的非线性预测模型.目前所采用的各种 Volterra 级数预测滤波器的非线性阶次一般没有超过二阶,由于二阶 Volterra 级数滤波器的非线性逼近能力有限,所以预测精度较低,而且只适用于低维混沌系统.但是自然界中存在大量的高维混沌系统,因此本文采用三阶 Volterra 滤波器的一种乘积耦合近似实现结构对一些低维混沌时间序列以及具有高维混沌特性的 EEG 信号进行预测.研究结果表明:这种预测结构对于低维混沌时间序列的预测精度比二阶 Volterra 滤波器的预测精度可以提高 10^3 倍,而且能够对具有高维混沌特性的 EEG 信号进行较好地预测.

2.2. 实现结构

假设非线性离散系统的输入为 $X(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T$, 输出为 $y(n) = x(n+1)$, 则此非线性系统的三阶 Volterra 级数展开式为

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(x(n)) \\ &= h_0 + \sum_{m=0}^{+\infty} h_1(m) x(n-m) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} h_2(m_1, m_2) x(n-m_1) x(n-m_2) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+\infty} \sum_{m_2=0}^{+\infty} \sum_{m_3=0}^{+\infty} h_3(m_1, m_2, m_3) \end{aligned}$$

$$\times x(n-m_1) x(n-m_2) x(n-m_3), \quad (2)$$

其中 $h_0, h_1(m), h_2(m_1, m_2), h_3(m_1, m_2, m_3)$ 为 Volterra 核.采用有限次求和形式,若嵌入维(即记忆单元)为 m ,则展开式为

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(x(n)) \\ &= h_0 + \sum_{m_0=0}^{+m} h_1(m_0) x(n-m_0) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+m} \sum_{m_2=0}^{+m} h_2(m_1, m_2) x(n-m_1) x(n-m_2) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+m} \sum_{m_2=0}^{+m} \sum_{m_3=0}^{+m} h_3(m_1, m_2, m_3) \\ &\quad \times x(n-m_1) x(n-m_2) x(n-m_3). \quad (3) \end{aligned}$$

若直接用此式作为预测滤波器,则滤波器系数总个数为 $1 + m + m^2 + m^3$.可见随着 Volterra 级数滤波器阶数或记忆单元 m 的增大,Volterra 级数滤波器系数的个数将按幂次快速增加,相应所需的计算次数也呈幂指数增长,使其在工程上的实现越来越困难.减小 Volterra 滤波器复杂性的可能办法是将 Volterra 滤波器线性化,即用线性滤波器的乘积耦合方式来实现非线性逼近^[13].在乘积耦合方式中将 $h_2(m_1, m_2), h_3(m_1, m_2, m_3)$ 分解(3)式可为

$$\begin{aligned} x(n+1) &= F(x(n)) \\ &= h_0 + \sum_{m_0=0}^{+m} h_1(m_0) x(n-m_0) + \sum_{m_1=0}^{+m} \sum_{m_2=0}^{+m} g_1(m_1) \\ &\quad \times g_2(m_2) x(n-m_1) x(n-m_2) \\ &\quad + \sum_{m_1=0}^{+m} \sum_{m_2=0}^{+m} \sum_{m_3=0}^{+m} g_3(m_1) g_4(m_2) g_5(m_3) \\ &\quad \times x(n-m_1) x(n-m_2) x(n-m_3). \quad (4) \end{aligned}$$

这样滤波器系数个数变为 $1 + m + 2m + 3m$, 复杂性大为减少,但还较为复杂.可以采用带常数项的 FIR 滤波器的乘积耦合来进一步减少滤波器系数的个数和计算的复杂性^[8].为此定义以下滤波器:

$$\begin{aligned} y(n) &= \left[\left(h_{1,0} + \sum_{i=1}^m h_{1,i} x(n-i) \right) \right. \\ &\quad \times \left. \left(h_{2,0} + \sum_{j=1}^m h_{2,j} x(n-j) \right) \right] \\ &\quad \times \left(h_{3,0} + \sum_{k=1}^m h_{3,k} x(n-k) \right), \quad (5) \end{aligned}$$

其中 $h_{1,i}, h_{2,j}, h_{3,k}$ 为滤波器系数,具体实现结构如图 1 所示,则滤波器系数个数变为 $3m + 3$, 复杂性更为减少.将(5)式展开,得

$$\begin{aligned}
 y(n) = & h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0} + \sum_{i=1}^m h_{1,0}h_{2,0}h_{3,0}(h_{2,0}h_{1,i} \\
 & + h_{1,0}h_{2,i})x(n-i) \\
 & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m ((h_{2,0}h_{1,i} + h_{1,0}h_{2,j})h_{3,0} \\
 & + h_{1,i}h_{2,j}h_{3,0})x(n-i)x(n-j) \\
 & + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m h_{1,i}h_{2,j}h_{3,k}x(n-i) \\
 & \times x(n-j)x(n-k). \tag{6}
 \end{aligned}$$

比较(4)式和(6)式可见(4)式与(6)式具有相近的形式,故三阶 Volterra 级数滤波器可用(5)式及图 1 所示结构近似实现。

3.>NNLMS 算法

一个性能优良的自适应滤波器离不开有效的自适应算法,以保证这种滤波器结构的快速收敛性.为此我们采用改进的非线性归一化 LMS 自适应滤波算法(Nonlinear Normalized LMS Algorithm,即>NNLMS 算法)^[8,10],算法描述如下:

设 $d(n)$ 和 $y(n)$ 分别表示未知系统在 n 时刻的系统输出和预测输出值, ω_i 表示预测模型的待定滤波器系数,则在 n 时刻的瞬时平方误差为

$$e^2(n) = [d(n) - y(n)]^2, \tag{7}$$

则令代价函数最小的非线性归一化 LMS 算法如下:

$$\begin{aligned}
 \omega_i(n+1) = & \omega_i(n) + \frac{\mu}{c + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial y(n)}{\partial \omega_j}\right)^2} \\
 & \times e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial \omega_i}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

其中 c 是保证系统稳定收敛的常数, μ 是收敛控制辅助常数($c > 0, \mu > 0$).根据(8)式和(5)式所描述

的三阶 Volterra 滤波器结构,可得这种近似实现结构的>NNLMS 算法如下:

$$\begin{aligned}
 A(n+1) = & A(n) + \mu_1 \{c + \|X(n)\|^2 \\
 & \times [B^T(n)X(n)] [C^T(n)X(n)]\}^{-1} \\
 & \times [B^T(n)X(n)] [C^T(n)X(n)] \\
 & \times e(n)X(n), \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(n+1) = & B(n) + \mu_2 \{c + \|X(n)\|^2 \\
 & \times [A^T(n)X(n)] [C^T(n)X(n)]\}^{-1} \\
 & \times [A^T(n)X(n)] [C^T(n)X(n)] \\
 & \times e(n)X(n), \tag{10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C(n+1) = & C(n) + \mu_3 \{c + \|X(n)\|^2 \\
 & \times [A^T(n)X(n)] [B^T(n)X(n)]\}^{-1} \\
 & \times [A^T(n)X(n)] [B^T(n)X(n)] \\
 & \times e(n)X(n), \tag{11}
 \end{aligned}$$

其中

$$X(n) = [1 \quad x(n) \quad x(n-1) \quad x(n-2) \quad \dots \quad x(n-m+1)]^T;$$

$$A(n) = [a_0 \quad a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_m]^T;$$

$$B(n) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_m]^T;$$

$$C(n) = [c_0 \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_m]^T.$$

$A(n), B(n), C(n)$ 分别为三个 FIR 滤波器的滤波系数。

4. 仿真结果及讨论

下面就这种三阶 Volterra 滤波器的近似实现结构对典型的低维混沌系统产生的混沌时间序列的预测性能进行实验研究.实验中每一种混沌时间序列采用四 Runge-Kutta 算法求解得 30000 个点,取其最后 1500 点作实验数据,用其中前 100 点训练模型,然后预测后 1400 点.滤波器的预测性能评价标准采用均方误

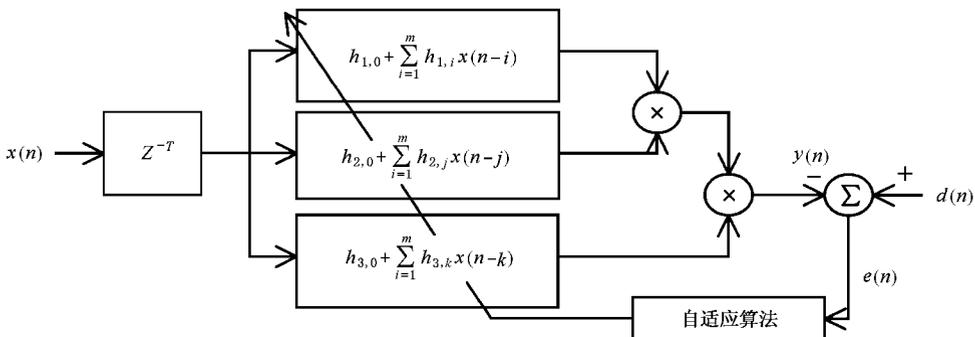


图 1 三阶 Volterra 滤波器的乘积耦合近似结构

差 (MSE 和相对误差 ρ_{err}) 作评价. 分别定义如下:

$$\text{MSE} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |x(k) - \hat{x}(k)|^2, \quad (12)$$

$$\rho_{\text{err}} = \frac{\sum_{k=1}^N [\hat{x}(k) - x(k)]^2}{\sum_{k=1}^N x^2(k)}. \quad (13)$$

图 2、3 分别给出了采用这种预测模型对 Lorenz 和 Rossler 系统的 x 分量进行一步和三步预测结果, 图中横坐标 n 为预测样本数, 纵坐标 $x(n)$ 为真实值 (实线), $x'(n)$ 为预测值 (虚线).

乘积耦合三阶 Volterra 滤波器对 Lorenz 系统 x 分量的预测结果见图 2. Lorenz 系统方程为

$$\dot{x} = a(y - x),$$

$$\dot{y} = rx - xz - y,$$

$$\dot{z} = xy - bz,$$

$$a = 10, b = 8/3, r = 34.0.$$

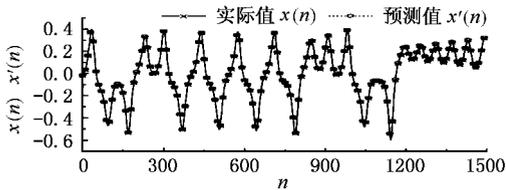
乘积耦合三阶 Volterra 滤波器对 Rossler 系统 x 分量的预测结果见图 3. Rossler 系统方程为

$$\dot{x} = -y - z,$$

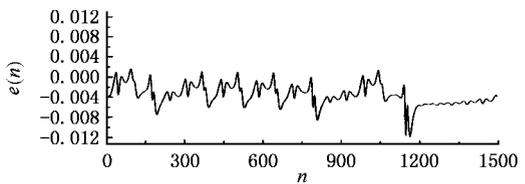
$$\dot{y} = x + ay,$$

$$\dot{z} = b + z(x - c),$$

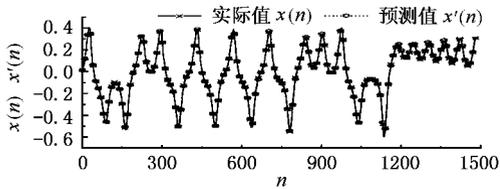
$$a = 0.15, b = 0.20, c = 10.0.$$



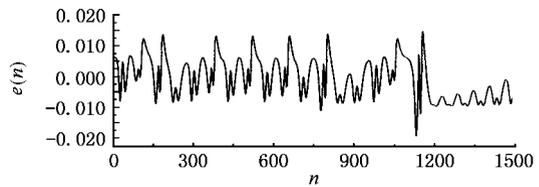
(a) 一步预测



(b) 一步预测误差



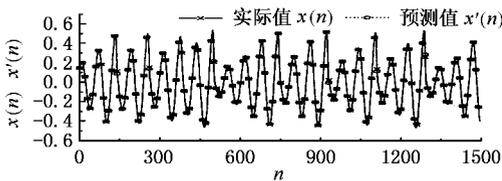
(c) 三步预测



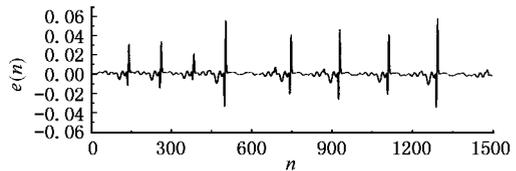
(d) 三步预测误差

图 2 乘积耦合的三阶 Volterra 滤波器对 Lorenz 系统 x 分量的预测结果

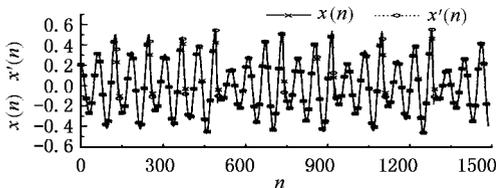
一步预测结果 $\rho_{\text{err}} = 0.000311$; $\text{MSE} = 1.595 \times 10^{-5}$, 三步预测结果 $\rho_{\text{err}} = 0.000774$; $\text{MSE} = 3.987 \times 10^{-5}$



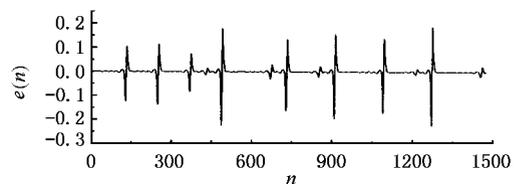
(a) 一步预测



(b) 一步预测误差



(c) 三步预测结果



(d) 三步预测误差

图 3 乘积耦合的三阶 Volterra 滤波器对 Rossler 系统 x 分量的预测结果

一步预测结果 $\rho_{\text{err}} = 0.000644$; $\text{MSE} = 3.948 \times 10^{-5}$, 三步预测结果 $\rho_{\text{err}} = 0.00375$; $\text{MSE} = 0.000845$

上述数值实验结果表明,本文研究的这种三阶 Volterra 滤波器的乘积耦合近似实现结构对两种典型的低维混沌系统的一步和三步预测的均方误差 (MSE) 和相对误差 (p_{err}) 都很小,一步预测的均方误差 (MSE) 和相对误差 (p_{err}) 数量级分别为 10^{-5} , 10^{-3} , 比文献 [8, 10] 中二阶情况下最小数量级 10^{-2} 分别低 3 和 1 个量级. 这说明了本文研究的预测模型能够更好地预测低维混沌时间序列, 具有比二阶 Volterra 滤波器更强的非线性逼近能力. 值得一提的是仅用 100 个样本训练预测模型就能对其后 1400 个点作出有效预测, 说明用此模型能很快地逼近被预测的混沌系统, 这一结果更符合工程上的实际需要, 具有较好的应用价值.

5. 应用于 EEG 信号的预测

EEG 信号反映了神经系统的电生理活动, 是生理研究与临床脑疾病诊断的重要依据. EEG 信号的预测对于脑疾病的临床治疗具有十分重要的意义. 大量的研究表明 EEG 信号源于高维混沌系统, 具有高维的混沌特性^[14, 15]. 为了检验本文研究的

预测模型对具有高维混沌特性的混沌信号的预测能力, 我们采用该预测模型分别对正常 EEG 信号和异常 EEG 信号(带有棘、慢综合波)进行一步预测. 实验中采用桂林市第二人民医院神经内科的脑电图和脑电地形图检查室采集的各种脑电信号. 从各 EEG 信号的任一导联上任取连续的 1300 个 EEG 信号点, 用前 300 点训练预测模型, 然后预测其后 1000 点. 实验结果如图 4 所示, 图中横坐标 n 为信号点数, 纵坐标 $x(n)$ 为实际值(实线), $x'(n)$ 为预测值(虚线).

由图 4 的预测结果可见, 这种三阶 Volterra 滤波器的乘积耦合近似实现结构对实测的 EEG 信号预测的均方误差 (MSE) 达 10^{-2} 数量级, 预测信号的幅值与节律基本能反映原信号的幅值与节律. 这说明这种三阶 Volterra 滤波器的乘积耦合近似实现结构能够对具有高维混沌特性的混沌信号进行有效地预测, 具有很强的非线性逼近能力.

6. 结 论

本文研究了三阶 Volterra 滤波器的乘积耦合近

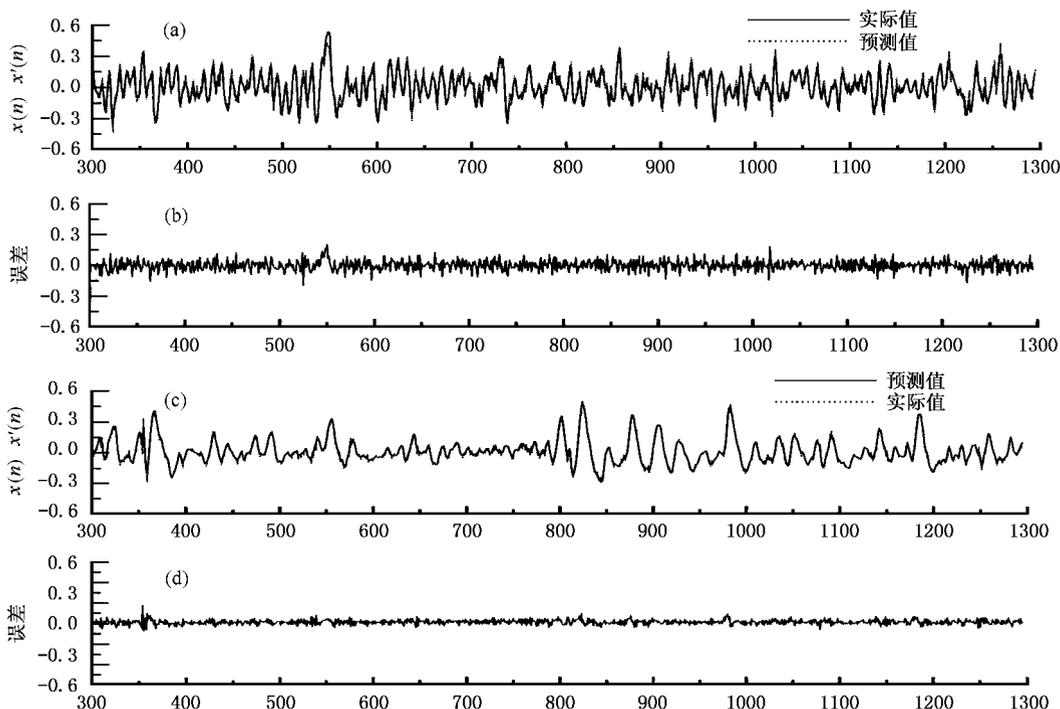


图 4 乘积耦合的三阶 Volterra 滤波器对实测的 EEG 信号的预测结果

正常 EEG 预测结果: $p_{err} = 0.136$, $MSE = 0.00248$; 异常 EEG 预测结果: $p_{err} = 0.0318$, $MSE = 0.00068$

似实现结构, 及其用于对典型的低维混沌系统产生的混沌时间序列和具有高维混沌特性的 EEG 信号的非线性自适应预测性能. 数值仿真结果表明, 本文研究的预测模型具有很强的非线性逼近能力, 不仅有对低维混沌时间序列的预测比采用二阶时的精度高的特点, 而且能够对一些高维混沌信号进行有效

地预测, 而且利用本文的预测模型, 只需很少地训练样本, 就能对混沌信号作很好地预测. 另外, 本文的预测模型仅用了三个 FIR 滤波器、两个乘法器和一个加法器就可实现, 具有结构简单、计算次数少等特点, 克服了传统的 Volterra 滤波器结构复杂、计算量大的弊病, 具有较好的应用前景.

- [1] Yuan J and Xiao X C 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 897 [袁 坚、肖先赐 1998 物理学报 **47** 897]
- [2] Fang J Q, Luo X S *et al* 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 1546
- [3] Luo X S, Wang B H *et al* 2001 *Chin. Phys.* **10** 17
- [4] Luo X S, Wang B H *et al* 2001 *Journal of Circuits and Systems* **6** 90 [罗晓曙、汪秉宏等 2001 电路与系统学报 **6** 90]
- [5] Fang J Q, Gao Y *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 435 [方锦清、高远等 2001 物理学报 **50** 435]
- [6] Fang J Q, Hong Y G *et al* 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2523
- [7] Zhang J S and Xiao X C 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2333 [张家树、肖先赐 2000 物理学报 **49** 2333]
- [8] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1248 [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 1248]

- [9] Standberg L W 1983 *IEEE Trans. CAS* **30** 61
- [10] Kalluri S and Arce G R 1999 *IEEE Trans. on SP* **47** 2262
- [11] Takens F 1981 *Dynamical System and Turbulence, Lecture Notes in Mathematics* Vol. 898 (Berlin: Springer-Verlag) pp230 - 241
- [12] Abarbanel D I 1996 *Analysis of Observed Chaotic Data* (New York: Springer-Verlag)
- [13] Koh T and Powers E J 1981 *IEEE Trans. on ASSP* **33** 1445
- [14] Song Y and Tian X 2000 *Foreign Medical Sciences Biomedical Engineering Fascicle* **23**(4) 198 [宋莹、田心 2000 国外医学生物医学工程分册 **23**(4) 第 198 页]
- [15] Rombouts S A R B, Keunen R W M *et al* 1995 *Phys. Lett. A* **202** 352

A method based on the third-order Volterra filter for adaptive predictions of chaotic time series^{*}

Wei Bao-Lin¹⁾ Luo Xiao-Shu²⁾ Wang Bing-Hong²⁾ Quan Hong-Jun²⁾ Guo Wei³⁾ Fu Jin-Jie³⁾

¹⁾ Department of Physics and Electronic Science, Guangxi Normal University, Guilin 541004, China)

²⁾ Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

³⁾ The Second People's Hospital of Guilin, Guilin 541001, China)

(Received 4 November 2001; revised manuscript received 10 January 2002)

Abstract

Based on the Takens' delay-coordinate phase reconstruct, we study the third-order Volterra filter which is used to make adaptive predictions of chaotic signals. It is approximately implemented by a product-coupling configuration; and this filter is used to predict typical low-dimensional chaotic time series and high-dimensional chaotic electro-encephalography(EEG) signal. Simulation results show that: this filter has a precision 10^3 times higher than the second-order Volterra filter when it is used to make predictions of low-dimensional chaotic time series. It can be successfully used to make predictions of some high-dimensional chaotic EEG signal.

Keywords: chaos, nonlinear adaptive prediction, third-order Volterra filter, EEG signal

PACC: 0545

^{*} Project supported by the Scientific Research Subject of Health and Medicine of Health Bureau of Guangxi (Grant No. 9929), the Special Funds of Basic Research of National Key Program (project of 973), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19932020, 19974039, 59876039), and by the Funds of the Research Imburse Office of HongKong Government (Grant No. RGC-CUHK4241/01P).