

直流磁场控制电磁悬浮熔炼旋转 稳定性的理论分析*

马伟增 季诚昌 李建国

(上海交通大学材料科学与工程学院, 上海 200030)

(2002 年 2 月 9 日收到 2002 年 4 月 3 日收到修改稿)

在没有直流磁场和存在直流磁场两种情况下,对悬浮于高频磁场的导电球在旋转扰动情况下的稳定性进行了理论分析.悬浮感应器电流的无量纲角频率为 $\bar{\omega}$.在不存在直流稳定磁场的固态球悬浮情况下,存在一个临界无量纲角频率 $\bar{\omega}_c$.当 $\bar{\omega} < \bar{\omega}_c$ 球形悬浮试样对于旋转干扰是稳定的;当 $\bar{\omega} > \bar{\omega}_c$ 球形悬浮试样对于旋转干扰是不稳定的.在直流稳定磁场的固态球悬浮情况下,存在一个无量纲角频率下限 $\bar{\omega}_{c1}$ 和上限 $\bar{\omega}_{c2}$.当 $\bar{\omega} < \bar{\omega}_{c1}$ 或者 $\bar{\omega} > \bar{\omega}_{c2}$ 球形悬浮试样对于旋转干扰是稳定的;当 $\bar{\omega}_{c1} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{c2}$ 球形悬浮试样对于旋转干扰是不稳定的.增大直流磁场可以增大 $\bar{\omega}_{c1}$ 减小 $\bar{\omega}_{c2}$,即可以提高悬浮稳定性.当直流磁场场强 B_d 达到某一临界值 B_{dc} 球形悬浮试样在任意 $\bar{\omega}$ 情况下总是稳定的.相对于固态试样悬浮,液态试样悬浮稳定性要下降.直流磁场可以减小熔体动力学失稳和熔体飞溅的趋势,从而提高液态试样悬浮的稳定性.

关键词:电磁悬浮,熔炼,旋转干扰,旋转稳定性,无量纲角频率,直流磁场

PACC:4110F,4630M,8100

1. 引言

悬浮熔炼是指在悬浮状态实现金属或合金的熔炼操作.使试样悬浮的方式包括电磁悬浮、声悬浮^[1]、空气动力悬浮等.加热熔炼的方式包括高频电磁场、激光.作为一种可以把悬浮和熔炼结合在一起悬浮熔炼方式,电磁悬浮熔炼不需要其他的热源,其思想于 1923 年由 Muck 提出^[2].1950 年,Okress 对金属实现了电磁悬浮熔炼^[3].由于该方法可以消除坩埚的限制,坩埚内壁的污染和坩埚内壁引起的异质形核,电磁悬浮熔炼在高活性、高熔点金属熔炼^[3,4],金属的深过冷和凝固研究^[5,6],材料物性参数的测量^[7,8]等方面具有特殊的应用价值.然而,几十年来,电磁悬浮熔炼虽然取得了很大的进展,但仍局限于

很窄的范围.电磁悬浮熔炼过程中试样的旋转和震荡,试样熔化后高频电磁场对熔体的搅拌作用,都可能导致电磁悬浮熔炼的失败. Essmann 等^[9]和 Fox 等^[10]采用直流磁场提高电磁悬浮熔炼的稳定性.但直流磁场对试样旋转和震荡失稳的具体作用机理,至今尚未给出具体的理论解释.现有理论还不能用来定量指导直流磁场地设计.为此,本文根据最近电磁悬浮熔炼理论的一些新的进展,对直流磁场控制电磁悬浮熔炼旋转稳定性进行理论分析,以期指导电磁悬浮熔炼感应设备的选择和直流稳定磁场的施加.

对于重力作用下的液态悬浮,试样变形严重,进行理论研究比较困难,一般情况下只能得到数值解.本文的研究着重于物理意义,试样的旋转稳定性分析以固态球形试样为研究对象,然后推广到液态变

* 国家自然科学基金(批准号 50171044)资助的课题.

形情况.

2. 高频交变磁场条件下固态悬浮试样旋转稳定性分析

2.1. 构建数学模型

对球形试样(非磁性、导电)电磁悬浮旋转稳定性进行分析的基本思想为:假设一球形试样悬浮于高频电磁场中,在某种外力扰动下球形试样开始旋转.为了确定这种旋转扰动是否发展,有必要计算作用于悬浮并且旋转状态球形试样的力矩.旋转扰动的发展依赖于力矩与旋转的关系;如果由于旋转扰动所导致的悬浮球形试样的力矩有利于该试样旋转,扰动将发展,在没有其他阻尼的情况下,最终将导致悬浮失稳;如果该力矩阻碍试样旋转,旋转扰动将逐步衰减,可以认为在此种情况下,对于旋转扰动是稳定的.支撑球形试样,使其处于悬浮状态的感应器磁场是不均匀的.然而,对于研究球形试样对于旋转干扰稳定性这一基本问题,简化为研究均匀交变磁场作用于球形试样在干扰情况下的稳定性就可以说明问题.

对于未施加直流磁场的情况,球形悬浮试样在扰动情况下的旋转稳定性问题被规范化为:一非磁性,导电球形试样悬浮于一均匀交变磁场 $B = B_0 e^{i\omega t}$ 中,受到某种扰动以角速度 Ω ($\Omega \ll \omega$) 旋转,分析该试样的旋转稳定性.其中 ω 为感应器中交变电流的

角频率等于 $2\pi f$, f 为感应器中交变电流的频率;该磁场与垂直于球形试样旋转轴的平面成 θ 角^[11].对于施加直流稳定磁场的情况,球形悬浮试样在扰动情况下的旋转稳定性问题可以规范化为:一非磁性,导电球形试样悬浮于一叠加直流磁场 B_d 的均匀交变磁场 $B = B_0 e^{i\omega t}$ 中,受到某种扰动以角速度 Ω ($\Omega \ll \omega$) 旋转,分析该试样的旋转稳定性.其中该直流磁场与垂直于球形试样旋转轴的平面成 α 角.

2.2. 均匀交变磁场中球形试样的旋转稳定性分析

交变场 $B = B_0 e^{i\omega t}$ 可以看作具有幅值和频率相同而旋转方向相反的两个场的叠加,每个场产生一相应的力矩^[11].只要球形试样是静止的,这两个力矩互相平衡.如果球形试样旋转,对称性被打破,由此而产生的作用于球形试样两个场的频率分别为 $(\omega + \Omega)$ 和 $(\omega - \Omega)$.结果,这两个场所产生的力矩将不再平衡.这一力矩的差值被用来维持球形试样的旋转.力矩的分量为^[12]

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{B_0^2}{4\mu_0} V k_x \cos\theta \sin\theta, \\ M_y &= \frac{B_0^2}{4\mu_0} V k_y \cos\theta \sin\theta, \\ M_z &= \frac{B_0^2}{4\mu_0} V k_z \cos^2\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 V 为球形试样体积, B_0 为磁感应强度幅值, μ_0 为真空磁导率, k_x, k_y, k_z 可以表示为^[12]

$$\begin{aligned} k_z = -k_x &= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})} \cosh \sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})} - \cos \sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})}} - \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\sinh \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})} + \sin \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})}}{\cosh \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})} - \cos \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})}} - \frac{1}{\bar{\omega} + \bar{\Omega}} + \frac{1}{\bar{\omega} - \bar{\Omega}} \right], \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} k_y &= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})} \cosh \sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})} - \cos \sqrt{\chi(\bar{\omega} + \bar{\Omega})}} - \frac{1}{\sqrt{2\bar{\omega}}} \frac{\sinh \sqrt{2\bar{\omega}} - \sin \sqrt{2\bar{\omega}}}{\cosh \sqrt{2\bar{\omega}} - \cos \sqrt{2\bar{\omega}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})} \cosh \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})} - \cos \sqrt{\chi(\bar{\omega} - \bar{\Omega})}} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\bar{\omega} = \mu_0 \sigma \omega R_0^2$, 为感应器电流的无量纲角频率;

$\bar{\Omega} = \mu_0 \sigma \Omega R_0^2$, 为球形试样旋转的无量纲角频率; σ 为

试样的电导率.

(1)–(3)式表明,在 θ 一定的情况下,力矩惟一决定于无量纲系数 k_x, k_y, k_z ,即决定于无量纲角频率 $\bar{\omega}, \bar{\Omega}$.为了进一步简化,假设该磁场垂直于球形试样旋转轴($\theta = 0$),则有 $M_x = M_y = 0, M_z$ 表示为

$$M_z = \frac{B_0^2}{4\mu_0} V k_z. \tag{4}$$

在忽略其他阻尼的情况下,球形试样的旋转扰动是否发展,取决于 M_z 的符号. $M_z < 0$,旋转扰动逐步增大,在转速达到一定值时悬浮试样动态失稳; $M_z > 0$,旋转扰动逐步衰减,这种情况下,球形悬浮试样对旋转扰动是稳定的; $M_z = 0$ 为临界情况. M_z 的符号决定于 k_z 的符号.下面就主要研究 k_z .

k_z 为无量纲电流角频率 $\bar{\omega}$ 和无量纲试样旋转角频率 $\bar{\Omega}$ 的函数.对于实际的电磁悬浮熔炼过程,从加热和悬浮力两方面考虑,一般要求 $5 < \bar{\omega} < 100$;旋转扰动一般比较小,试样在力矩作用下旋转加速所能达到的转速也受到材料屈服极限(固态)或表面张力和黏度(液态)的限制,考虑到材料悬浮是处于高温状态,一般 $0 < \bar{\Omega} < 1$.图1表示了 k_z 随 $\bar{\Omega}$ 和 $\bar{\omega}$ 变化的趋势.设曲线与 $k_z = 0$ 对应的无量纲角频率为 $\bar{\omega}_c$.无量纲角频率 $\bar{\omega} < \bar{\omega}_{c, \bar{\Omega}}, k_z > 0$,即 $M_z > 0$,阻力矩大于驱动力矩,试样悬浮是稳定的; $\bar{\omega} > \bar{\omega}_{c, \bar{\Omega}}, k_z < 0$,即 $k_z < 0$,驱动力矩大于阻力矩,试样悬浮发生转动失稳.图1曲线所对应的临界电流角频率 $\bar{\omega}_c$ 列于表1.由表1,通过外推,可以得到 $\bar{\Omega} \rightarrow 0$ 时,对应的临界感应器电流无量纲角频率 $\bar{\omega}_{c, 0} = 11.6087$; $\bar{\omega}_c$ 随 $\bar{\Omega}$ 增大而增大,即增大干扰有利于电流无量纲角频率阈值的提高.在所考虑的范围内, $\bar{\omega}_{c, \bar{\Omega}}$ 变化范围为11.6到11.7.

表1 图1曲线所对应临界无量纲角频率

曲线	1	2	3	4	5
$\bar{\Omega}$ 值	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{\omega}_{c, \bar{\Omega}}$	11.6109	11.6176	11.6286	11.6441	11.6639

试样稳定悬浮对应感应器电流临界无量纲角频率 $\bar{\omega}_c$ 的数值独立于试样的物理、几何性质和感应器电流的频率,是感应器和试样所组成系统的固有特性.根据感应器电流无量纲角频率 $\bar{\omega}$ 定义式为 $\bar{\omega} = \mu_0 \sigma \omega R_0^2$, ω 定义式为 $\omega = 2\pi f$,则悬浮熔炼所采用

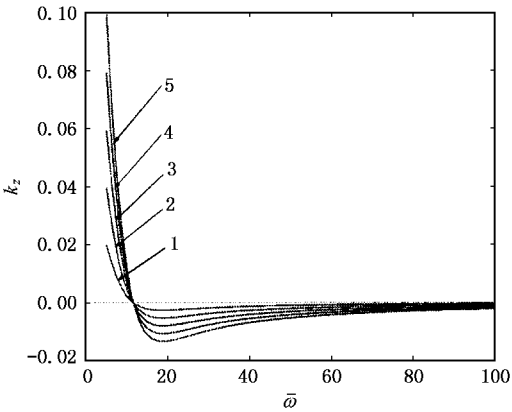


图1 系数 k_z 随无量纲角频率 $\bar{\Omega}$ 和 $\bar{\omega}$ 变化曲线(曲线1—5分别对应 $\bar{\Omega}$ 值为0.2 0.4 0.6 0.8 1.0)

的金属试样的电导率越小、球形试样的半径越大、感应器电流频率越低,试样越容易稳定悬浮;反之,试样容易在旋转扰动情况下失稳.

2.3. 直流稳定磁场叠加均匀交变磁场球形悬浮试样的旋转稳定性分析

以角速度 Ω 旋转的球形导体试样在直流磁场中所受的阻力矩可以通过该试样在角频率为 Ω 均匀交变磁场中所受的驱动力矩来计算.其力矩分量可以表示为^[12]

$$\begin{aligned} M_{r, x} &= \frac{B_d^2}{4\mu_0} V k_{r, x} \cos\alpha \sin\alpha, \\ M_{r, y} &= \frac{B_d^2}{4\mu_0} V k_{r, y} \cos\alpha \sin\alpha, \\ M_{r, z} &= \frac{B_d^2}{4\mu_0} V k_{r, z} \cos^2\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

无量纲系数 $k_{r, x}, k_{r, y}, k_{r, z}$ 可以表示为

$$k_{r, z} = -k_{r, x} = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\bar{\Omega}}} \frac{\sinh\sqrt{2\bar{\Omega}} + \sin\sqrt{2\bar{\Omega}}}{\cosh\sqrt{2\bar{\Omega}} - \cos\sqrt{2\bar{\Omega}}} - \frac{1}{\bar{\Omega}} \right], \tag{6}$$

$$k_{r, y} = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\bar{\Omega}}} \frac{\sinh\sqrt{2\bar{\Omega}} - \sin\sqrt{2\bar{\Omega}}}{\cosh\sqrt{2\bar{\Omega}} - \cos\sqrt{2\bar{\Omega}}} - \frac{1}{3} \right]. \tag{7}$$

与2.2.讨论类似,为了简化问题,假设直流磁场垂直于试样旋转轴,即 $\alpha = 0$,则 $M_{r, x} = M_{r, y} = 0$
 $M_{r, z}$ 可以表示为

$$M_{r, z} = \frac{B_d^2}{4\mu_0} V k_{r, z}, \tag{8}$$

则在直流磁场叠加均匀交变磁场情况下,以角速度

Ω 旋转球形悬浮试样所受总力矩为

$$\Delta = M_z + M_{r,z} . \tag{9}$$

令

$$f(x) = \frac{9}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{2x}} \frac{\sinh \sqrt{2x} + \sin \sqrt{2x}}{\cosh \sqrt{2x} - \cos \sqrt{2x}} - \frac{1}{x} \right] , \tag{10}$$

结合(2)(4)(6)(8)(9)(10)式,可得

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{B_0^2}{4\mu_0} V \left[f(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) - f(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \right] + \frac{B_d^2}{4\mu_0} V f(\bar{\Omega}) \\ &= \frac{B_0^2}{4\mu_0} V \left[f(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) - f(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) + \left(\frac{B_d}{B_0} \right)^2 f(\bar{\Omega}) \right] . \end{aligned} \tag{11}$$

$\Delta > 0$,则悬浮是稳定的 ; $\Delta = 0$,对应临界情况 ; $\Delta < 0$,则悬浮是不稳定的 .令

$$\begin{aligned} F\left(\bar{\omega}, \bar{\Omega}, \frac{B_d}{B_0}\right) &= f(\bar{\omega} + \bar{\Omega}) - f(\bar{\omega} - \bar{\Omega}) \\ &+ \left(\frac{B_d}{B_0}\right)^2 f(\bar{\Omega}) , \end{aligned}$$

则 Δ 的性质可以通过研究关于 $\bar{\omega}, \bar{\Omega}, \frac{B_d}{B_0}$ 的函数 F 得到 .图 2 表示在固定无量纲旋转扰动角频率 $\bar{\Omega} = 0.1$ 不同的直流磁场所对应 $F-\bar{\omega}$ 关系曲线 .在没有直流稳定磁场的情况下 ,如曲线 1 ,当 $\bar{\omega}$ 大于某一阈值 $\bar{\omega}_c$,悬浮试样在旋转扰动下失稳 ;随着直流磁场的增大 , $\bar{\omega}$ 的失稳区域逐渐减小 ,如曲线 4 ;当 $\bar{\omega}_{c,1} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{c,2}$ 时 ,悬浮试样在旋转干扰下失稳 ;在该区间以外 ,悬浮试样在旋转干扰下是稳定的 ;当直流磁场足够大 ,对于任意的 $\bar{\omega}$, $F > 0$ 总是存的 ,即总有 $\Delta > 0$,悬浮试样在旋转干扰下总是稳定的 ,如曲线 5 所示 .

在给定扰动无量纲角频率 $\bar{\Omega}$ 情况下 ,总是可以找到 $(B_d/B_0)_c$,使得对于任意给定的 $\bar{\omega}$, F_{\min} 等于 0 ,则 $B_{dc} (B_d/B_0)_c$,即 B_{dc} 为悬浮试样对于旋转干扰保持稳定所必须得最小直流磁场场强 .表 2 列举了对应于不同 $\bar{\Omega}$ 值的临界稳定最小直流磁场 .从表 2 可以得到 , $\bar{\Omega}$ 值对临界稳定最小直流磁场影响不大 ,对于一般情况 B_{dc} 在 $0.366 B_0$ 到 $0.367 B_0$ 之间 .

表 2 不同 $\bar{\Omega}$ 值对应的临界稳定最小直流磁场

$\bar{\Omega}$	0.1	0.5	0.9
B_{dc}	$0.3660 B_0$	$0.3664 B_0$	$0.3668 B_0$

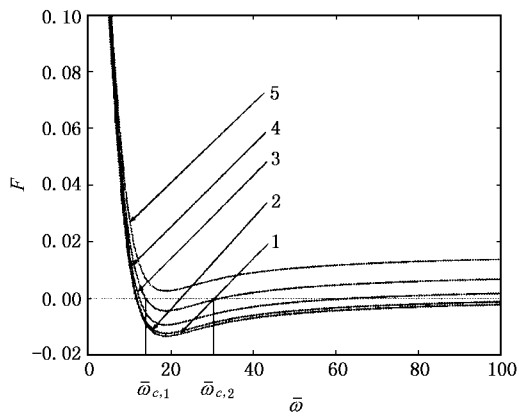


图 2 $\bar{\Omega} = 0.1$ 不同直流磁场对应的 $F-\bar{\omega}$ 关系曲线 (曲线 1—5 分别对应 B_d/B_0 值为 0 0.1 0.2 0.3 0.4)

3. 高频交变磁场条件下液态悬浮试样旋转稳定性分析

相对于固态试样悬浮 ,液态试样悬浮有自己的两个特点 :

- 1)对于液态试样悬浮 ,由于试样熔化 ,在重力方向拉长 ,导致其 R 值 (垂直于 Z 轴的投影圆的半径)减小 ,从而 $\bar{\omega}$ 减小 ,从而有利于悬浮试样旋转干扰的稳定性 ;
- 2)对于液态试样悬浮 ,由于试样熔化 ,熔体在涡流的电磁搅拌作用下产生剧烈对流 ,可能导致试样的流体动力学失稳 ,熔体在试样所产生的离心力作用下可能向四周飞溅 ,都不利于悬浮试样旋转干扰的稳定性 .

通过悬浮熔炼实践 ,特点 2 占主导地位 ,因此液态下悬浮在旋转干扰下的稳定性比固态下的要差 .直流磁场对于液态悬浮的稳定性更为重要 .与固态悬浮相同的是直流磁场对试样旋转的阻力矩作用 ;与固态悬浮不同 ,而且更重要的是直流磁场对试样内部熔体对流的阻尼作用 ,这种作用等效于熔体黏度增大 ,从而降低流体动力学失稳和熔体飞溅的趋势 .

4. 结 论

1. 对于球形试样悬浮于高频交变磁场中 ,得出了不同大小旋转干扰下的 ,试样保持稳定的感应器

电流频率阈值.

2. 对于球形试样悬浮于直流稳恒磁场和高频交变磁场中,从理论上揭示直流稳恒磁场可以减小电磁悬浮熔炼旋转失稳的感应器电流频率区间范围,得到在任意感应器频率,对于旋转干扰保持稳定的最小直流磁场场强.

3. 液态悬浮试样对于旋转干扰的稳定性比固态试样的差.

通过进行悬浮试样的旋转稳定性分析,可以有

效指导试样悬浮熔炼的实践.如果对某一种材料的试样进行悬浮熔炼,就可以通过试样的几何参数和物理参数,依据旋转失稳的稳定性判据选择合适的电源频率,在给定电源情况下,可以计算悬浮试样对于旋转干扰是否稳定或者在失稳情况下使其恢复稳定所要施加的直流稳恒磁场量值.必须注意到,由于理论分析中的各种简化,在实践中利用理论分析结果时,需要结合实际实验条件进行修正.

- [1] Xie W J, Cao C D and Wei B B 1999 *Acta. Phys. Sin.* **48** 250 (in Chinese) [解文军、曹崇德、魏炳波 1999 物理学报 **48** 250]
- [2] Muck O 1923 German patent 422004
- [3] Okress E C, Wroughton D M, Comenetz G *et al* 1952 *J. Appl. Phys.* **23** 525
- [4] Hermann R and Löser W 1998 *J. Appl. Phys.* **83** 6399
- [5] Herlach D M, Cochrane R F and Egry I *et al* 1993 *Int. Mat. Rev.* **38** 273
- [6] Wang N, Xie W J and Wei B B 1999 *Chin. Phys.* **8** 503
- [7] Egry I, Lohöfer G and Sauerland S 1993 *Int. J. Thermophys.* **14** 573

- [8] Egry I, Lohöfer G and Gorges E *et al* 1996 *J. Phys.: Condens. Matter* **8** 9363
- [9] Essmann U and Kiessig H 1970 *Mat. Res. Bull.* **14** 1139
- [10] Richard J Fox, Oak Ridge, Tenn 1994 United States Patent 5319670
- [11] Gelfgat Yu, Grants I and Krumins J *et al* 1999 *Magnetohydrodynamics* **35** 105
- [12] Landau L D and Lifshitz E M 1984 *Electrodynamics of Continuous Media* (2nd Edition, Revised and Enlarged by Lifshitz E M and Pitaevskii L P), Volume 8 of Course of Theoretical Physics, (Oxford: Pergamon Press LTD) p199

Theory analysis of steady magnetic field on rotational stability of electromagnetic levitation melting^{*}

Ma Wei-Zeng Ji Cheng-Chang Li Jian-Guo

(School of Materials Science and Engineering , Shanghai Jiaotong University , Shanghai 200030 , China)

(Received 9 February 2002 ; revised manuscript received 3 April 2002)

Abstract

The stability of an electrically conducting sphere levitated in a high frequency magnetic field with respect to rotational disturbances is analyzed theoretically with and without steady magnetic field respectively. The dimensionless angular frequency of inducer's current is $\bar{\omega}$. Under the conditions of without steady magnetic field and the sphere is solid, there is exists a critical dimensionless angular frequency $\bar{\omega}_c$. As $\bar{\omega} < \bar{\omega}_c$, the levitation of sphere sample is stable; as $\bar{\omega} > \bar{\omega}_c$, the levitation of sphere sample is unstable. Under the conditions of existing steady magnetic field and the sphere is solid, there are exist a lower limit dimensionless angular frequency $\bar{\omega}_{c,1}$ and an upper limit dimensionless angular frequency $\bar{\omega}_{c,2}$. As $\bar{\omega} < \bar{\omega}_{c,1}$ or $\bar{\omega} > \bar{\omega}_{c,2}$, the levitation of sphere sample is stable; as $\bar{\omega}_{c,1} < \bar{\omega} < \bar{\omega}_{c,2}$, the levitation of sphere sample is unstable. The increasing of steady magnetic field can make $\bar{\omega}_{c,1}$ increase and $\bar{\omega}_{c,2}$ decrease. As the strength of steady magnetic field B_d reaches the critical value $B_{d,c}$, the levitation of sphere sample is always stable. Relative to that of solid sphere, the levitation stability of liquid sphere is decreasing. Steady magnetic field can reduce the hydrodynamic destabilization and melt splashing and improve the levitation stability of liquid sphere sample.

Keywords : electromagnetic levitation , melting , rational disturbance , rotational stability , dimensionless angular frequency , steady magnetic field

PACC : 4110F , 4630M , 8100

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No.50171044).