第 51 卷 第 10 期 2002 年 10 月
1000-3290/2002/51(10)/2245-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.10,October,2002

原子质心运动的量子效应对光场量子噪声压缩的影响*

熊 锦[1)] 牛中奇[2)] 张智明[1)]

[1)](上海交通大学物理系,上海 200240)

[2)](西安电子科技大学电子工程学院,西安 710071)

(2001 年 9 月 12 日收到;2002 年 1 月 13 日收到修改稿)

考虑 Jaynes-Cummings 模型中与光场相互作用的原子为超冷原子,讨论了原子质心运动的量子效应对光场两正交分量量子噪声压缩的影响,结果表明,在 Jaynes-Cummings 模型中,原子质心运动的量子效应增加光场两正交分量的量子噪声,使其压缩效应消失.

关键词:超冷原子,质心运动的量子效应,光场量子噪声压缩

PACC:4250

量子光场与原子的相互作用是量子光学和激光物理研究的核心内容之一[1,2],该相互作用的最简单可精确求解模型是 Jaynes-Cummings 模型(JCM)[3],它描述的是单个二能级原子与单模量子电磁场的相互作用.人们对此模型进行了广泛的研究,发现了原子和光场的许多非经典性质[1],如原子发射谱的 Rabi 分裂、原子布居的崩塌与回复现象、光子的亚泊松分布、反聚束效应及光场的压缩效应等.继而,人们也从实验上验证了 JCM 所预言的物理效应,如崩塌与回复现象[4].随着激光冷却原子技术的发展[5],人们已经获得了非常冷的原子,研究超冷原子与量子电磁场的相互作用引起了人们的重视.在研究超冷原子与量子电磁场的相互作用中,必须考虑原子质心运动的量子效应[6,7].1996 年,Scully 等人提出在 micromaser 的研究中用超冷原子注入,提出了 MAZER(microwave amplication via Z-motion-induced emission of radiation)的概念[8].他们随后一系列的研究结果表明[9—11],当考虑原子质心运动的量子效应时,原子在 micromaser 腔中的 de Brogile 波长是一个非常重要的参数.由于原子非常冷,其动能远小于相互作用势能,故对冷原子而言,相互作用势就形成了很高的势垒或很深的势阱,此时原子可能被此势垒(阱)反射也可能透射.当腔长是原子半 de Brogile 波长的整数倍时,原子有 50% 的概率发射光子,并且有 50% 的概率透过腔;否则,原子完全被反射,并且不发射光子[8,9].本文考虑 JCM 中与光场相互作用的原子为超冷的二能级原子,讨论了原子质心运动的量子效应对光场两正交分量量子噪声压缩的影响.

考虑一个超冷的二能级原子与单模量子光场的相互作用,当计及原子质心运动的量子效应时,系统的 Hamiltionian 为[8]

$$H = H_A + H_F + H_I, \tag{1}$$

其中,H_A,H_F 分别为自由原子和自由场的 Hamiltionian,H_I 是相互作用 Hamiltionian,在偶级近似和旋波近似下分别为

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{P_z^2}{2M} + \sum_{i=a,b} \hbar\omega_i \mid i\rangle\langle i \mid, \\ H_F &= \hbar\omega\alpha^+ \alpha, \\ H_I &= \hbar g(\alpha \mid a\rangle\langle b \mid + \mid b\rangle\langle a \mid \alpha^+), \end{aligned} \tag{2}$$

其中,M,P_z 分别为原子质量和质心动量(假设原子沿 z 方向运动),$|a\rangle$,$|b\rangle$分别是原子的上、下能级,$|i\rangle\langle i|$,($i = a, b$)是能量为 $\hbar\omega_i$ 的能级$|i\rangle$的布居算符,而$|a\rangle\langle b|$,$|b\rangle\langle a|$则是原子的上升和下降算符,ω 是单模光场的频率,α^+,α 是光场的产生和湮

* 国家自然科学基金(批准号:10074046,60178001)资助的课题.

没算符，g 是相互作用常数.在这里，为了计算简单起见，我们考虑原子与光场共振的情况，则相互作用 Hamiltionian 的本征值和本征矢分别为（系统的能量从 $\hbar\omega_b + n\hbar\omega$ 测起）

$$V_{n+1}^{\pm} = \pm \hbar g\sqrt{n+1},$$
$$|\varphi_{n+1}^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a,n\rangle \pm |b,n+1\rangle), \quad (3)$$

满足 $H_I|\varphi_{n+1}^{\pm}\rangle = V_{n+1}^{\pm}|\varphi_{n+1}^{\pm}\rangle$.由于原子非常冷，因此，原子的动能远小于相互作用势能，故，对冷原子而言，V_{n+1}^{+} 是一个很高的势垒，而 V_{n+1}^{-} 则是一个很深的势阱.

假定相互作用是在一个长为 l 的高 Q 腔中进行的，且此腔是 reentrant 型[10]，即腔长非常短，则在相互作用过程中，可以不考虑原子的衰减和场的损耗.在进入腔之前，具有质心动量 $\hbar k$ 的冷原子处于叠加态 $\cos\alpha|a\rangle + \sin\alpha e^{-i\beta}|b\rangle$，而场处于数态 $|n\rangle$.这里 $\cos\alpha$，$\sin\alpha e^{-i\beta}$ 分别是原子处于上态 $|a\rangle$ 和下态 $|b\rangle$ 的概率幅，其中 β 为两概率幅之间的相位差.正如文献[8,9]讨论的那样，当原子很冷时，此相互作用可看成是原子被相互作用势反射或透射的问题.在相互作用前，系统的态矢可写为

$$|\psi(z,0)\rangle = \int dkA(k)e^{-ikz}\theta(-z)(\cos\alpha\,|a,n\rangle + \sin\alpha e^{-i\beta}\,|b,n\rangle), \quad (4)$$

其中，$A(k)$ 是描述原子质心运动波包分布的函数，Heaviside 单位阶跃函数 θ 反映原子处于腔的哪一边.遵从文献[9]的技术路线，很容易得到相互作用后原子-场的态函数（在计算过程中，已取 $\hbar = 1$）

$$\begin{aligned}|\psi(z,t)\rangle = \int dkA(k)e^{-i\frac{k^2}{2M}t}\{\cos\alpha\{[R_{a,n}^{a}e^{-ikz}\theta(-z) + T_{a,n}^{a}e^{ik(z-l)}\theta(z-l)]|a,n\rangle + [R_{b,n+1}^{a}e^{-ikz}\theta(-z)\\ + T_{b,n+1}^{a}e^{ik(z-l)}\theta(z-l)]|b,n+1\rangle\} + \sin\alpha e^{-i\beta}\{[R_{a,n-1}^{b}e^{-ikz}\theta(-z) + T_{a,n-1}^{b}e^{ik(z-l)}\\ \times\theta(z-l)]|a,n-1\rangle + [R_{b,n}^{b}e^{-ikz}\theta(-z) + T_{b,n}^{b}e^{ik(z-l)}\theta(z-l)]|b,n\rangle\}\},\end{aligned} \quad (5)$$

其中，t 为相互作用时间，

$$R_{a,n}^{a} = \frac{1}{2}(\rho_{n+1}^{+} + \rho_{n+1}^{-}),$$
$$T_{a,n}^{a} = \frac{1}{2}(\tau_{n+1}^{+} + \tau_{n+1}^{-}),$$
$$R_{b,n+1}^{a} = \frac{1}{2}(\rho_{n+1}^{+} - \rho_{n+1}^{-}),$$
$$T_{b,n+1}^{a} = \frac{1}{2}(\tau_{n+1}^{+} - \tau_{n+1}^{-}),$$
$$R_{a,n-1}^{b} = \frac{1}{2}(\rho_{n}^{+} - \rho_{n}^{-}),$$
$$T_{a,n-1}^{b} = \frac{1}{2}(\tau_{n}^{+} - \tau_{n}^{-}),$$
$$R_{b,n}^{b} = \frac{1}{2}(\rho_{n}^{+} + \rho_{n}^{-}),$$
$$T_{b,n}^{b} = \frac{1}{2}(\tau_{n}^{+} + \tau_{n}^{-}).$$

上列各量的物理意义：当处于叠加态 $\cos\alpha|a\rangle + \sin\alpha e^{-i\beta}|b\rangle$ 的冷原子与腔场 $|n\rangle$ 相互作用时，原子可能被相互作用势反射也可能透射，反射或透射的原子可能处于上态也可能处于下态.其中 $R_{a,n}^{a}$，$T_{a,n}^{a}$ 分别是初始处于 $|a\rangle$ 的原子被反射或透射后仍处于上态 $|a\rangle$ 的概率幅；$R_{b,n+1}^{a}$，$T_{b,n+1}^{a}$ 分别是初始处于 $|\alpha\rangle$ 的原子在发射一个光子处于下态 $|b\rangle$ 后被反射或透射的概率幅；$R_{a,n-1}^{b}$，$T_{a,n-1}^{b}$ 是初始处于 $|b\rangle$ 的原子在吸收光场的一个光子并处于上态 $|a\rangle$ 后被反射或透射的概率幅；$R_{b,n}^{b}$，$T_{b,n}^{b}$ 是初始处于 $|b\rangle$ 的原子被反射或透射后仍处于 $|b\rangle$ 的概率幅.式中 $\rho_{n+1}^{\pm}$，$\tau_{n+1}^{\pm}$ 分别是原子被相互作用势 $V_{n+1}^{\pm}$ 反射或透射的概率幅，它们具有如下形式

$$\rho_{n+1}^{\pm} = i\Delta_{n+1}^{\pm}\sin(k_{n+1}^{\pm}l)\tau_{n+1}^{\pm},$$
$$\tau_{n+1}^{\pm} = [\cos(k_{n+1}^{\pm}l) - i\textstyle\sum_{n+1}^{\pm}\sin(k_{n+1}^{\pm}l)]^{-1}, \quad (7)$$

其中

$$k_{n+1}^{\pm} = \sqrt{k^2 - \kappa^2\sqrt{n+1}},$$
$$\Delta_{n+1}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{n+1}^{\pm}}{k} - \frac{k}{k_{n+1}^{\pm}}\right),$$
$$\Sigma_{n+1}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_{n+1}^{\pm}}{k} + \frac{k}{k_{n+1}^{\pm}}\right), \quad (8)$$

这里，$\frac{\kappa^2}{2M} = g$ 是真空耦合能.

众所周知[12]，$X_1 = \frac{a+a^+}{2}$，$X_2 = \frac{a-a^+}{2i}$ 是描述单模光场的两正交分量的算符，它们满足 Heisenberg 不确定关系 $(\Delta X_1)^2\cdot(\Delta X_2)^2 \geqslant \frac{1}{16}$.在相干态下，有 $(\Delta X_1)^2 = (\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4}$，即相干态是光场两分量的量子涨落有最小不确定值的态.在一定条件下，若光场

的某分量的量子涨落满足不确定关系 $(\Delta X_i)^2 < \frac{1}{4}$ ($i = 1,2$),则称光场的正交分量 X_i 的量子噪声被压缩[12].

由(5)和(6)式很容易得到考虑了原子质心运动的量子效应后光场两正交分量的量子起伏(这里考虑初始光场为真空场的情况,即 $n = 0$)

$$(\Delta X_1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}\left[\frac{1}{2}(|\rho_1^+ - \rho_1^-|^2 + |\tau_1^+ - \tau_1^-|^2) - \sin^2\alpha\cos^2\beta(\tau_1^+ - \tau_1^-)^2\right],$$

$$(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}\left[\frac{1}{2}(|\rho_1^+ - \rho_1^-|^2 + |\tau_1^+ - \tau_1^-|^2) - \sin^2\alpha\sin^2\beta(\tau_1^+ - \tau_1^-)^2\right]. \tag{9}$$

下面对(9)式进行解析分析:当原子很冷时,原子动能远小于相互作用势能,$\frac{k^2}{2M} \ll g$,即 $k^2 \ll \kappa^2$,从而有

$$k_1^+ \approx -\mathrm{i}\kappa, k_1^- \approx \kappa, \Delta_1^+ \approx \Sigma_1^+ \approx \frac{\kappa}{2\mathrm{i}k},$$

$$\Delta_1^- \approx \Sigma_1^- \approx \frac{\kappa}{2k}, \tag{10}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
\rho_1^+ &= -\mathrm{i}\frac{\kappa}{2k}\sinh(\kappa l)\tau_1^+,\\
\tau_1^+ &= \left[\cosh(\kappa l) + \mathrm{i}\frac{\kappa}{2k}\sinh(\kappa l)\right]^{-1},\\
\rho_1^- &= \mathrm{i}\frac{\kappa}{2k}\sin(\kappa l)\tau_1^+,\\
\tau_1^- &= \left[\cos(\kappa l) - \mathrm{i}\frac{\kappa}{2k}\sin(\kappa l)\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

假设 $\mathrm{e}^{\kappa l} \gg 1$,则有 $\sinh(\kappa l) \approx \cosh(\kappa l) \approx \frac{\mathrm{e}^{\kappa l}}{2} \gg 1$,又因为 $\frac{\kappa}{k} \gg 1$,故有

$$\begin{aligned}
&\rho_1^+ = -1, \tau_1^+ = 0\\
&\rho_1^- = -1, \tau_1^- = 0 \quad (\kappa l \neq m\pi),\\
&\rho_1^- = 0, \tau_1^- = (-1)^m \quad (\kappa l = m\pi),
\end{aligned} \tag{12}$$

其中 m 为正整数,即 $m = 1,2,3,\cdots$.

上式意味着,相对于入射原子的动能而言,势垒很高,原子几乎完全被反射,而对于势阱情况则有所不同.条件 $\kappa l = m\pi$(称为共振条件)意味着腔长 l 与原子在腔中的 de Brogile 波长 $\lambda_{\mathrm{dB}}\left(\approx\frac{2\pi}{\kappa}\right)$ 满足关系 $l = \frac{m}{2}\lambda_{\mathrm{dB}}$,即腔长等于原子半 de Brogile 波长的整数倍.相对于入射原子的动能而言,势阱很深,当腔长与原子的 de Brogile 波长满足共振条件时,原子几乎完全透射,否则,原子几乎完全被反射.

由(12)式和(9)式可得

$$\begin{aligned}
&(\Delta X_1)^2 = (\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} \quad (\kappa l \neq m\pi),\\
&(\Delta X_1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos^2\alpha}{4}(1 - \sin^2\alpha\cos^2\beta) \quad (\kappa l = m\pi),\\
&(\Delta X_2)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\sin^2\alpha}{4}(1 - \sin^2\alpha\sin^2\beta) \quad (\kappa l = m\pi).
\end{aligned} \tag{13}$$

上式是我们分析所得的主要结果.

我们知道[12],在 JCM 中,相互作用前,若光场处于真空态 $|0\rangle$,原子处于叠加态 $\cos\alpha|a\rangle + \sin\alpha\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\times|b\rangle$,则相互作用后光场的某个正交分量的量子噪声可出现压缩(如当 $\alpha = \frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}$,$\beta = \frac{\pi}{2}$ 时,分量 X_1 的量子噪声被压缩).在这里,我们考虑了原子质心运动的量子效应,从(13)式可看出,不管 α,β 取何值,两个分量 X_1, X_2 的量子噪声均不可能出现压缩.下面我们讨论之.

从(13)式可见,当共振条件 $\kappa l = m\pi$ 不满足时,相互作用后,光场的两正交分量 X_1, X_2 的量子起伏没有发生改变,与相互作用前一样,仍为其最小不确定值.这是因为,当共振条件不满足时,原子完全被反射,并且不发射光子[8,9],此时场仍然为真空场(这一点由(12)式代入(6)式和(5)式即可得到).故相互作用前后,场的量子性质没有改变.

在共振条件下,由(13)式可见,相互作用后,场两个分量的量子噪声都增加了,并且,不管 α,β 取何值,两分量的量子噪声均不可能出现被压缩的情况.这表明,原子质心运动的量子效应增加场的量子噪声,使得光场两分量量子噪声的压缩效应消失.我们可以这样来理解这一现象:在共振条件下,冷原子与光场发生相互作用,原子可能发射光子也可能不发生任何跃迁,二者均具有 50% 的概率;同时,原子可能被相互作用势能反射也可能透射,也均具有 50% 的概率[8,9],这样,考虑了原子质心运动的量子效应后,原子-场系统的不确定度增大了,正是因为这种较大的不确定性,场的量子噪声增加.

总之,我们考虑了冷原子质心运动的量子效应对光场两分量量子噪声压缩的影响,结果表明,原子质心运动的量子效应增加场两分量的量子噪声,使其压缩效应消失.

[1] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing :Science Press) (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京 科学出版社]

[2] Sargent M Ⅲ, Scully M O and Lamb W E Jr 1974 *Laser Physics* (Mass :Addison-Wesley)

[3] Jaynes E T and Cummings F W 1963 *Proc . IEEE* **51** 89

[4] Rempe G, Walther H and Klein N 1987 *Phys . Rev . Lett* .**58** 353

[5] Cohen-Tannoudji C 1992 *Phys . Rep* . **219** 153

[6] Horache S, Brune M and Raimond J M 1991 *Europhys . Lett* . **14** 19

[7] Englert B G, Schwinger J, Barut A O and Scully M O 1991 *Europhys . Lett* **14** 25

[8] Scully M O, Meyer G M and Walther H 1996 *Phys . Rev . Lett* . **76** 4144

[9] Meyer G M, Scully M O and Walther H 1997 *Phys . Rev* . A **56** 4142

[10] Loffler M, Meyer G M, Schroder M, Scully M O and Walther H 1997 *Phys . Rev* . A **56** 4153

[11] Schroder M, Vogel K, Schleich W P, Scully M O and Walther H 1997 *Phys . Rev* . A **56** 4164

[12] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Bdijing :Sciene Press) p165 (in Chinese) [彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京 科学出版社) 第 165 页]

Effects of the quantization of atomic center-of-mass motion on the squeezing of quantum noise*

Xiong Jin[1] Niu Zhong-Qi[2] Zhang Zhi-Ming[1]

[1] (*Department of Physics*, *Shanghai Jiaotong University*, *Shanghai* 200240, *China*)

[2] (*College of Electronic Engineering*, *Xidian University*, *Xi'an* 710071, *China*)

(Received 12 September 2001 ;revised manuscript received 13 January 2002)

Abstract

Effects of the quantization of atomic center-of-mass motion on the quadrature squeezing of the quantum light field are discussed, by considering that the atom in the Jaynes-Cummings model is ultracold. It is shown that the quantization of the atomic center-of-mass motion increases the quantum fluctuation of the light field and makes the squeezing properties disappear.

Keywords : ultracold atom, quantization of atomic center-of-mass motion, squeezing of quantum noise

PACC : 4250

* Project supported by the National atural Science Foundation of CHina (Grant Nos. 10074046, 60178001).