

非线性 Jaynes-Cummings 模型的 动力学特性^{*}

黄燕霞^{1,2)} 汪毅¹⁾ 詹明生¹⁾

¹⁾中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室,武汉 430071)

²⁾湖北师范学院物理系,黄石 435002)

(2001 年 11 月 30 日收到,2002 年 3 月 4 日收到修改稿)

运用密度算符间的距离研究了附加克尔介质依赖强度耦合 Jaynes-Cummings 模型中原子、场及整个量子系统态的演化规律.在与附加克尔介质单光子 Jaynes-Cummings 模型相比较的基础上,详细讨论了克尔介质非线性相互作用及初始相干光场的强弱对该模型动力学行为的影响.

关键词:密度算符间的距离,克尔介质,J-C 模型.

PACC: 4250

1. 引 言

依赖强度耦合 Jaynes-Cummings 模型(JCM)是 Buck 和 Sukumar 为反映光场与原子相互作用对光场强度依赖性而提出的理论模型^[1].该模型不仅可以精确求解,而且还展示了丰富的量子效应.如原子反转的崩溃与回复现象^[2],光场的压缩效应^[3],光场的位相特性^[4],作者还研究了该模型中原子和场的 Disentangled States 及其演化特性^[5].最近 Xu 等人研究了克尔介质对该模型中光场相位特性的影响^[6],而作者曾研究过克尔介质的非线性相互作用对单光子 JCM 动力学行为的影响^[7],那么,克尔介质的非线性相互作用对依赖强度耦合 JCM 中原子、场及整个量子系统态的演化有什么影响呢?尽管态制备效应可用纯度参数和 Von Neumann 熵进行研究,许多作者已用上述两个参数研究了各种 JCM 中原子和场态的演化^[8-11],且由于量子系统的熵自动包含了系统密度算符的高阶统计矩,是一种十分灵敏的量子态纯度的操作测量^[12,13],但熵还是不能明确地告诉我们场和原子在演化进程中所处的纯态是初始纯态,还是新的量子态.而 Knöll 等人^[14]提出了两个量

子态的密度算符间的距离的概念.如果两个密度算符间的距离很小,则表示由这两个密度算符所描述的量子态非常接近,距离为零,则意味着两个态完全相同.反过来,距离越大,则意味着两个态相差越远;若两个态正交,则相应的距离达到最大值.因此,可以适当地选择参考态,用密度算符间的距离来研究系统的态的演化规律,从而揭示出系统的动力学特性,并且还可以对量子系统的量子信息传输质量给出定量的评价.为此,本文采用密度算符间的距离研究附加克尔介质依赖强度耦合 JCM 中原子、场及整个量子系统态的演化规律,对该模型的动力学行为给出一幅幅准确而直观的演化图像.详细讨论克尔介质非线性相互作用及初始相干光场的强弱对该模型动力学行为的影响,并与附加克尔介质单光子 JCM 相比较,得到了一些新结果.

2. 理论公式

2.1 模型与态矢

考虑一个二能级原子处在一个充满克尔介质的
高 Q 腔中,克尔介质与光场作用在绝热近似下可用

* 国家自然科学基金(批准号:10074072)及湖北省高校科研基金重点资助项目(批准号:2000B08010)资助的课题.

非线性谐振子描述,而二能级原子和光场的耦合依赖于光场强度,在旋波近似和绝热近似下,系统的哈密顿量为^[6,15,16]

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_z + x(a^+)^2 a^2 + g(s_+ a \sqrt{a^+ a} + \sqrt{a^+ a} a s_-), \quad (1)$$

式中 a^+ , a 为频率 ω 的光场的产生和湮没算符; s_z 和 s_{\pm} 为原子的反转和跃迁算符, ω_0 为原子的跃迁频率; g 为原子和场的耦合系数, x 为克尔介质第三阶非线性极化率的色散部分,代表克尔介质与光场非线性相互作用的强弱.为简单起见,本文仅考虑共振的情况($\omega = \omega_0$).

设初始时刻原子处于激发态 $|e\rangle$, 场处于相干

$$\text{态 } |\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle, F_n = \frac{e^{-\frac{\bar{n}}{2}} \cdot \bar{n}^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}} e^{i n \beta}, \text{ 这里 } \bar{n} \text{ 和 } \beta \text{ 为}$$

初始相干光场的平均光子数及相位角,系统在初始时刻的态矢为

$$|\psi(0)\rangle = |\alpha\rangle \otimes |e\rangle, \quad (2)$$

在相互作用表象中,在共振情况下($\omega = \omega_0$)可求得系统在任意时刻的态矢为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t) |e, n\rangle + B_{n+1}(t) |g, n+1\rangle], \quad (3)$$

$$A_n(t) = e^{-i\Omega_n t} F_n [\cos \Omega_n t + \frac{i x n}{\Omega_n} \sin \Omega_n t], \quad (4)$$

$$B_{n+1}(t) = -i F_n e^{-i\Omega_n t} \cdot \frac{g(n+1)}{\Omega_n} \sin \Omega_n t$$

这里 $\Omega_n = [x^2 n^2 + g^2(n+1)^2]^{1/2}$ 为原子的拉比振荡频率.

2.2 密度算符间的距离

光场的约化密度算符为

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \text{Tr}_a \rho(t), \\ \rho_f(t) &= \text{Tr}_a \{ |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \} \\ &= |c\rangle \langle c| + |s\rangle \langle s|. \end{aligned} \quad (5)$$

这里

$$\begin{aligned} |c\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) |n\rangle, \\ |s\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1}(t) |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (6)$$

下标 f (a) 表示场(原子),原子和场的约化密度算符都可以被对角化,即可以找到它的本征值和本征态.

原子和场的约化密度算符的对角表示为

$$\begin{aligned} \rho_a(t) &= \text{Tr}_f \rho(t) = |\psi_a^+ \pi^+ \psi_a^+| \\ &\quad + |\psi_a^- \pi_- \psi_a^-|, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \text{Tr}_a \rho(t) = |\psi_f^+ \pi^+ \psi_f^+| \\ &\quad + |\psi_f^- \pi_- \psi_f^-|, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $|\psi_f^{\pm}\rangle$ 和 $|\psi_a^{\pm}\rangle$ 分别是 ρ_f 和 ρ_a 对应于共同的本征值 π^{\pm} 的正交归一的本征态.

原子和场的约化密度算符的共同本征值为^[12]

$$\pi^{\pm} = |c \pm e^{\mp \theta} |c\rangle \langle s|, \quad (9)$$

相应的本征态为

$$\begin{aligned} |\psi_f^{\pm}\rangle &= (2\pi^{\pm} \cosh \theta)^{-1/2} [e^{1/2(i\varphi \pm \theta)} |c\rangle \\ &\quad \pm e^{-1/2(i\varphi \pm \theta)} |s\rangle], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} |\psi_a^{\pm}\rangle &= (2\cosh \theta)^{-1/2} [e^{-1/2(i\varphi \mp \theta)} |e\rangle \\ &\quad \pm e^{1/2(i\varphi \mp \theta)} |g\rangle] \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\theta = \arcsin(\delta)$, $\delta = [|c\rangle \langle c| - |s\rangle \langle s|] / 2 |c\rangle \langle s|$, $e^{i\varphi} = |c\rangle \langle s| / |c\rangle \langle s|$.

由于密度算符是线性、有界、正定、自共轭的算符,而且也是 Hilbert-Schmidt 算符. Hilbert-Schmidt 模为 $\|\rho\|_2 = \sqrt{\text{Tr} \rho^+ \rho} = \sqrt{\text{Tr} \rho^2}$, 由此可引入两个密度算符 ρ_1 和 ρ_2 之间的距离为^[14]

$$D_2(\rho_1, \rho_2) = \|\rho_1 - \rho_2\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(\rho_1 - \rho_2)^2}.$$

为了对距离进行归一化,两个密度算符之间的距离定义为

$$\begin{aligned} D(\rho_1, \rho_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} D_2(\rho_1, \rho_2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\text{Tr} \rho_1^2 + \text{Tr} \rho_2^2 - 2\text{Tr}(\rho_1 \rho_2)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (12)$$

于是有 $0 \leq D(\rho_1, \rho_2) \leq 1$.

在上面的定义式中, $\text{Tr} \rho_i^2$ 表示态的纯度,若 ρ_i 为纯态,则 $\text{Tr} \rho_i^2 = 1$, 若 ρ_i 表示混合态,则 $\text{Tr} \rho_i^2 < 1$, 而 $\text{Tr}(\rho_1 \rho_2)$ 是两个态 ρ_1, ρ_2 的正交性的量度,若 ρ_1, ρ_2 两态正交,则 $\text{Tr}(\rho_1 \rho_2) = 0$, $D(\rho_1, \rho_2)$ 达到最大.

若 ρ_1, ρ_2 都为纯态,即 $\rho_i = |\psi_i\rangle \langle \psi_i| (i=1, 2)$, 则有 $D(\rho_1, \rho_2) = [1 - |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2]^{1/2}$. 显然,若 $|\psi_1\rangle = |\psi_2\rangle$, 则有 $D(\rho_1, \rho_2) = 0$, 若 $|\psi_1\rangle$ 与 $|\psi_2\rangle$ 正交,则 $D(\rho_1, \rho_2) = 1$. 反之亦然.

若选取系统的参考态为 $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle \otimes |\psi_f\rangle$, 其中 $|\psi_a\rangle$ 和 $|\psi_f\rangle$ 分别为原子和场的参考态,则系统、原子和场相对于各自参考态的距离分别为^[14]

$$D(t) = [1 - |\tilde{\psi}_a| \psi_a^+ \sqrt{\pi^+} \tilde{\psi}_f | \psi_f^+ + \tilde{\psi}_a | \psi_a^- \sqrt{\pi^-} \tilde{\psi}_f | \psi_f^-|^2]^{\frac{1}{2}}, \quad (13)$$

$$D_a(t) = [1 - \pi^+ \pi^- - |\tilde{\psi}_a| \psi_a^+|^2 \pi^+ - |\tilde{\psi}_a| \psi_a^-|^2 \pi^-]^2, \quad (14)$$

$$D_f(t) = [1 - \pi^+ \pi^- - |\tilde{\psi}_f| \psi_f^+|^2 \pi^+ - |\tilde{\psi}_f| \psi_f^-|^2 \pi^-]^2, \quad (15)$$

式中 π^\pm , $|\psi_f^\pm|$, $|\psi_a^\pm|$ 由(3)–(6), (9)–(11)式确定.

3. 计算结果与讨论

选择系统的初态为参考态, 即 $|\tilde{\psi} = |\psi(t=0) = |\alpha \otimes |e\rangle$, $|\tilde{\psi}_a = |e\rangle$, $|\tilde{\psi}_f = |\alpha\rangle$ 并取 $\beta=0$, $\bar{n}=10$, 对反映克尔介质非线性相互作用强弱的参数的不同值 $a = \frac{x}{g} = 0, 0.05, 0.5, 1, 5$ 分别对(13)–(15)式确定的原子、场及总系统与各自初态的距离进行数值计算, 并对标度时间 gt 作图, 作为对照, 同时标绘了初始相干光场较强情况下 ($\bar{n}=50$) 相应的原子、场及整个量子系统距离的演化曲线, 得到图 1 2 3.

从这些计算结果, 可以发现如下现象:

1. 当 $a = \frac{x}{g} = 0$ 即无克尔介质时, $\bar{n}=10$ 或 $\bar{n}=50$, 在原子反转的回复时间 $gt = k\pi$ ($k=1, 2, 3, \dots$) 原子距离演化为零, 即原子在这些时刻周期地回到初态, 而场和总系统的距离在 $gt = 2k\pi$ 时都为零, 即场和总系统在这些时刻周期地回到初态. 这与文献[5]的结果一致. 总之, 无克尔介质非线性相互作用时, 无论初始相干光场的强弱如何, 依赖强度耦合 JCM 的原子、场及整个量子系统态的演化都具有严格的周期性.

2. 克尔介质的非线性相互作用影响了原子、场及总系统态的演化的周期性. 在 $\bar{n}=10$ 和 $\bar{n}=50$ 时, 场及总系统的距离都非常敏感于克尔介质的非线性相互作用. 当 a 从 0 变化到 0.05 时, 尽管此时

克尔介质与场为弱非线性耦合, 场及总系统的距离的演化行为却变化很大, 当 $a=0$ 时, 在 $gt = 2k\pi$ 时, 场和总系统的距离都为零, 在这些时刻, 场和系统都回到了初态, 而当 $a=0.05$ 时, 在 $gt = 2k\pi$ 时, 场和总系统的距离接近于最大值 1, 对应这些时刻, 场和总系统都远离初态. 且周期性完全被破坏. 这与克尔介质的作用使得单光子 JCM 中原子、场及总系统距离的演化逐渐形成周期性的情况正好相反^[7]. 在所有的时间, 都有 $D(t) > D_f(t)$. 在强场 ($\bar{n}=50$) 时, 总系统的距离持续趋近于 1, 即克尔介质的作用使得总系统始终处于与初态正交的量子态上.

3. 对于原子距离的演化而言, 在初始光场较弱 ($\bar{n}=10$) 时, 克尔介质的非线性作用减弱了原子距离演化的周期性. 但对于强场 $\bar{n}=50$ 的情况, 克尔介质的非线性相互作用并没有破坏原子距离演化的周期性, 而只是原子距离演化的周期随着克尔非线性系数的增加而减小 ($gt_R \approx \frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}$), 原子仍然周期地回到初态. 无论初始光强如何, 随着克尔效应的增强, $D_a(t)$ 的值减小. 即克尔效应使原子回到初态的布居概率增大.

4. 当 $a = \frac{x}{g} = 5$ 时, 即克尔介质与光场强耦合相互作用时, 在 $\bar{n}=10$ 和 $\bar{n}=50$ 两种情况下, 即无论初始相干光场的强弱如何, 原子距离都持续趋于 0, 即原子持续地回到初态. 进一步计算表明, 此时原子的粒子数反转为 1, 场熵持续为 0. 场的距离与总系统的距离的演化行为完全一致, $D_f(t) = D(t)$, 但场和总系统并没有持续地趋于初态, 而是在初态和远离初态的态之间强烈地振荡着. 随着时间的增加, 场和系统接近初态的程度明显减小. 在 $a=5$ 这种情况下, 原子、场及总系统的动力学行为与附加克尔介质单光子 JCM 在相应情况下 ($a=5$) 的动力学行为非常相似^[7], 这是由于此时克尔介质与光场的非线性相互作用太强, 导致原子与场近于退耦合, 原子被俘获在初始的激发态上, 系统的特性主要由与克尔介质进行强耦合的光场来表征.

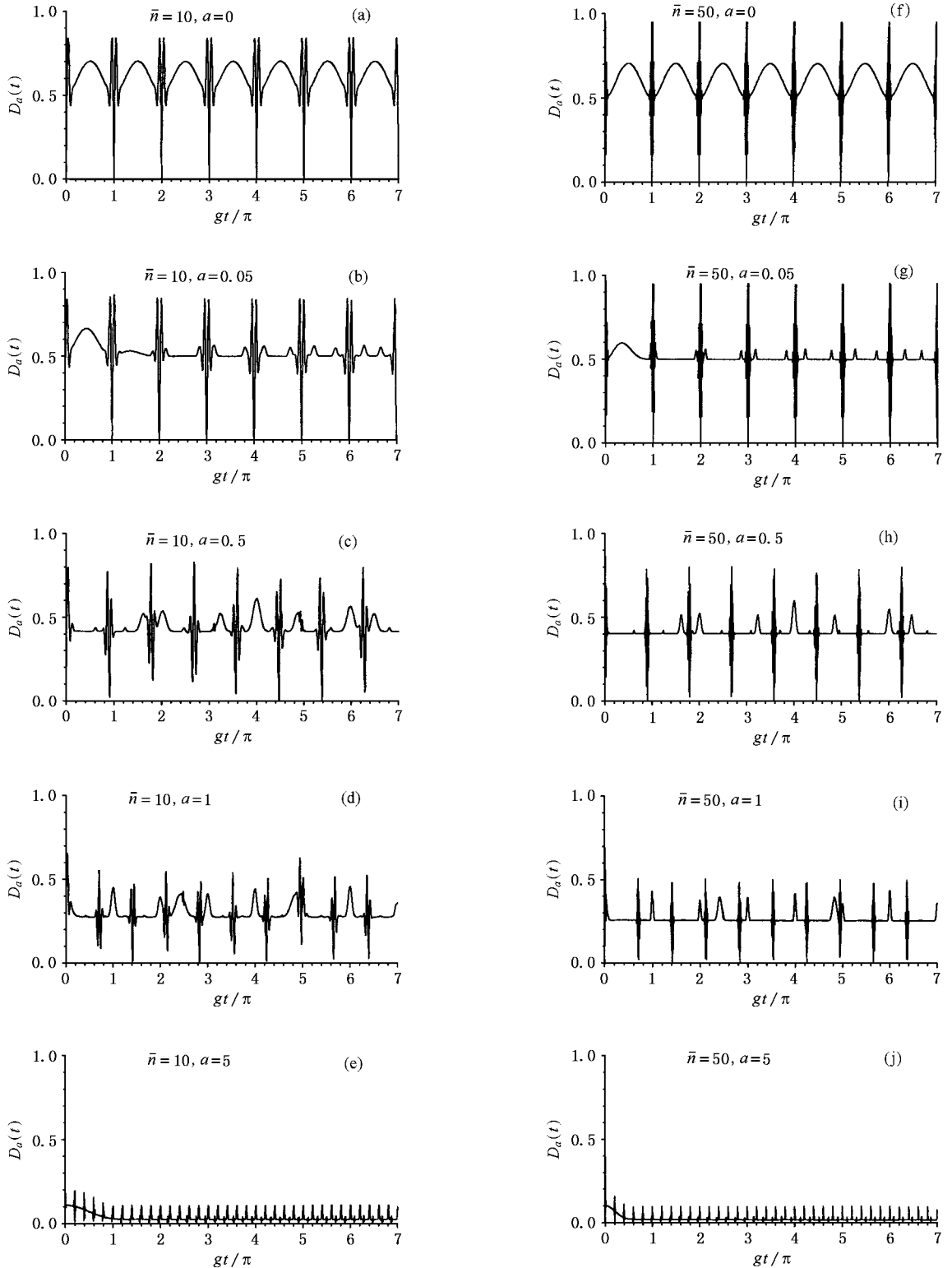
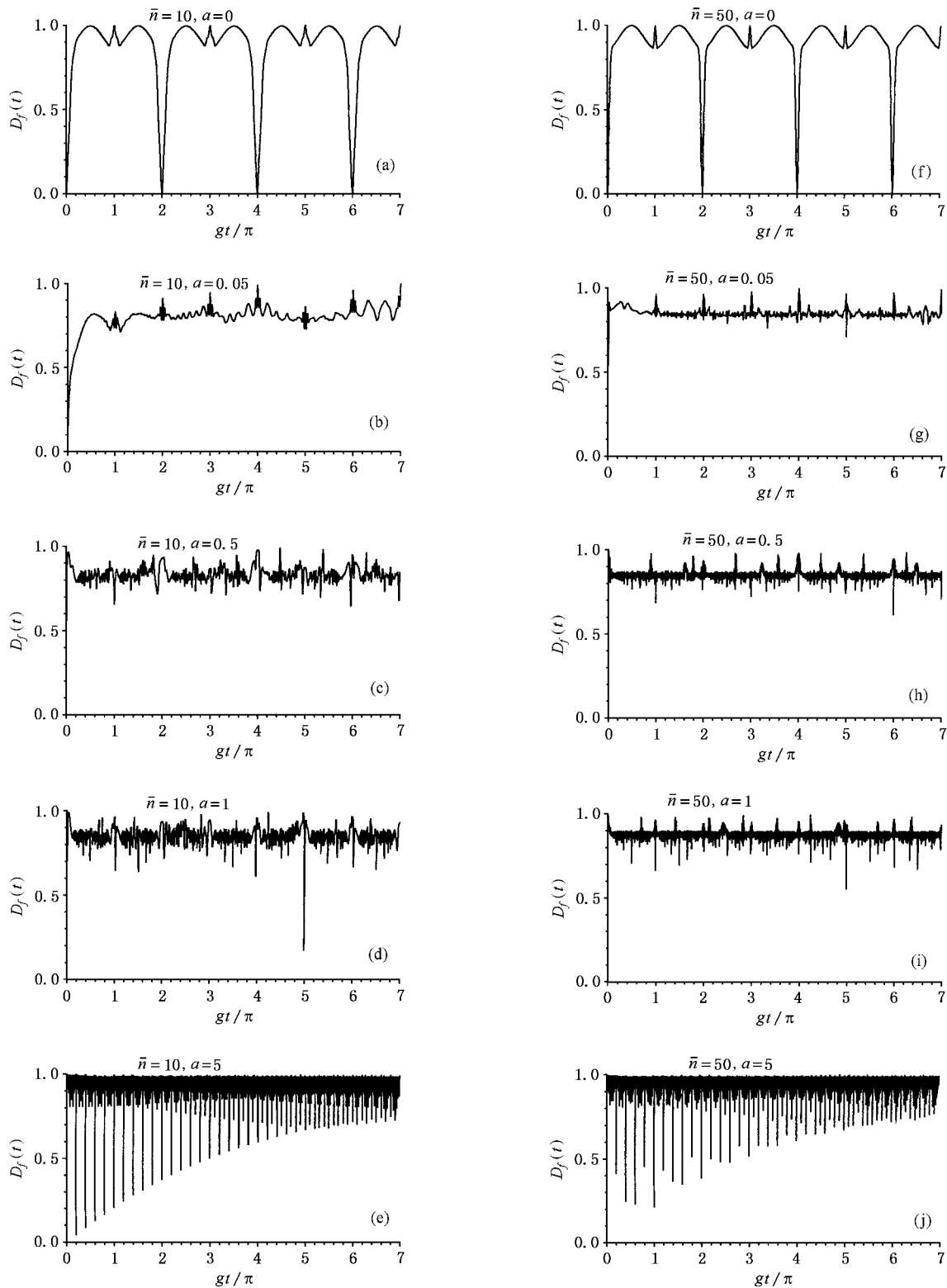


图1 原子相对于初态 $|e\rangle$ 的距离 $D_a(t)$ (a)–(e)分别对应 $\bar{n} = 10, \alpha = 0, 0.05, 0.5, 1, 5$ 的情况 (f)–(j)分别对应 $\bar{n} = 50, \alpha = 0, 0.05, 0.5, 1, 5$ 的情况)

图2 场相对于初态 $|\alpha\rangle$ 的距离 $D_f(t)$

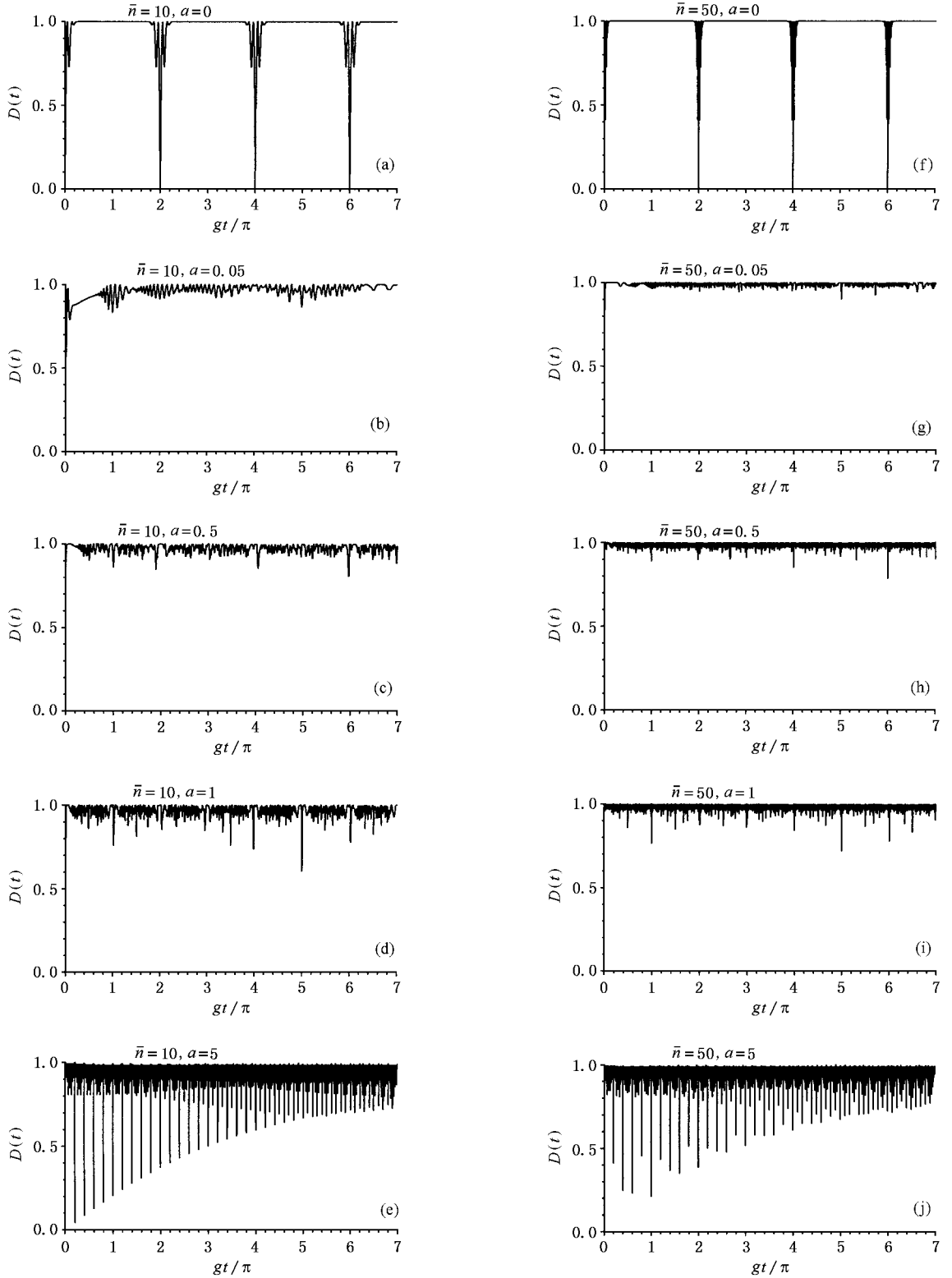


图3 总系统相对于初态 $|\alpha \otimes |e\rangle$ 的距离 $D(t)$

- [1] Buck B and Sukumar C V 1981 *Phys. Lett. A* **81** 132
- [2] Zhou P , Hu Z L and Peng J S 1992 *J. Mod. Opt.* **39** 49
- [3] Buzek V 1989 *J. Mod. Opt.* **36** 1151
- [4] Zhou P , Peng J S and Li G X 1993 *Acta Opt. Sin.* **13** 444 (in Chinese)
- [5] Huang Y X and Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 49 (in Chinese)
[黄燕霞、郭光灿 1999 物理学报 **48** 49]
- [6] Xu D H , Peng J S , Tian Y H and Han L B 2000 *Acta Opt. Sin.* **20** 56 (in Chinese)
- [7] Huang Y X and Guo G C 1996 *Acta Phys. Sin.* (Overseas Edition) **5** 901
- [8] Buzek V *et al* 1992 *Phys. Rev. A* **45** 8190
- [9] Phoenix S J D *et al* 1990 *J. Opt. Soc. Am. B* **7** 116
- [10] Liu X , Fang M F and Liu A L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1707 (in Chinese) [刘 翔、方卯发、刘安玲 2000 物理学报 **49** 1707]
- [11] Lai Z J and Liu Z X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1714 (in Chinese) [赖振讲、刘自信 2000 物理学报 **49** 1714]
- [12] Phoenix S J D and Knight P L 1988 *Ann. Phys. (N Y)* **186** 381
Phoenix S J D and Knight P L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6023
- [13] Barnett S M *et al* 1989 *Phys. Rev. A* **40** 2404
- [14] Knoll L *et al* 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1622
- [15] Buzek V , Jex I 1990 *Opt. Commun.* **78** 425
- [16] Joshi A , Puri R R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 5056

The dynamical properties in the nonlinear Jaynes-Cummings model^{*}

Huang Yan-Xia^{1,2)} Wang Yi¹⁾ Zhan Ming-Sheng¹⁾

¹⁾(State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics ,

Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Chinese Academy of Sciences , Wuhan 430071 , China)

²⁾(Department of Physics , Hubei Normal University , Huangshi 435002 , China)

(Received 30 November 2001 ; revised manuscript received 4 March 2002)

Abstract

The properties of state evolution of the atom , field , and atom-field systems in the intensity-dependent coupling Jaynes-Cummings Model with an additional Kerr medium are investigated by using the distance between density operators. The effects of non-linearity interaction of Kerr medium and the average photon number of initial coherent field on the dynamical behaviour of the quantum system are discussed in comparison with the one-photon Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium.

Keywords : the distance between density operators , Kerr medium , J-C model

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10074072) , and University Key Science Foundation of Hubei Province , China (Grant No. 2000B08010).