第 51 卷 第 11 期 2002 年 11 月
1000-3290/2002/51(11)/2431-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.11, November, 2002

含时量子系统传播子的 *ABCD* 形式*

刘承宜[1)2)] 刘 江[3)] 殷建玲[3)] 邓冬梅[3)] 范广涵[3)]

[1)] (华中科技大学,生物医学光子学教育部重点实验室,武汉 430074)

[2)] (华南师范大学激光运动医学实验室,广州 510631)

[3)] (华南师范大学信息光电子科技学院,广州 510631)

(2001 年 7 月 10 日收到;2002 年 3 月 28 日收到修改稿)

将含时量子系统状态的演化看成物质波波束沿时间轴的传输,引入束宽、发散角、曲率半径、品质因子和束熵表征波束的传输.发现品质因子守恒的量子系统,其动量算子和位置算子呈线性演化,传播子可以表达成 *ABCD* 的形式,最小波包(品质因子为 1)的形式不随时间改变.讨论了对常数势能系统和谐振子系统的应用.

关键词:物质波束,光束,谐振子

PACC:0365

长期以来,求解含时量子系统一直是大家十分感兴趣的课题[1].大多数问题(例如激发态[2])只能用数值方法近似求解,只有少数问题(例如谐振子[3])才能精确求解.鉴于物质波与光波的相似性,本文将光束传输参数[4—6]用于研究含时量子系统状态的演化,发现 Heisenberg 图像中品质因子守恒系统的坐标算子和动量算子的演化呈线性化,而且可以用 2×2 的 *ABCD* 矩阵来表示,相应的传播子可以表达成 *ABCD* 矩阵元的函数,本文称之为 *ABCD* 形式.鉴于 *ABCD* 矩阵是研究激光器的重要工具[7],本文对物质波与光波相似形的揭示,对于借鉴激光器的研究方法研究原子激射器[8]的理论和应用具有重要价值.

设含时量子系统的 Hamiltonian 量为 H,相应的 Schrödinger 方程为

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\varphi\rangle = H|\varphi\rangle, \tag{1a}$$

$$H = H_0 + V,\quad H_0 = p^2/2m, \tag{1b}$$

式中 $|\varphi\rangle$ 表征量子系统的状态.为了简单起见,这里已经假定了 Hamiltonian 量的具体形式.$\boldsymbol{p}$ 为动量,m 为质量.量子系统的质心运动和原子分子系统的内部运动都可以写成方程(1)的形式.方程(1)与傍轴光束所满足的波动方程[4—6]相似,前者沿时间轴传输(没有引入任何近似),后者沿光轴传输(在傍轴近似下)[4—6].因此,量子系统可以与光束类比.它们的不同在于它们的组成粒子,量子系统的粒子有静止质量,而光子没有.它们的相同在于状态的演化,都满足 Schrödinger 方程.如果将量子系统的状态看成物质波,量子系统状态的演化就可以看成波束沿时间轴的传输,例如原子激射束(atom laser beam)[8].因此,$\boldsymbol{p}$ 可以看成波束的动量.在空间坐标表象中,有 $\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar\partial/\partial\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{r}$ 为波束的位置,相应的维数为 d.为了简单起见,本文只讨论中心对称系统.

鉴于波束与光束状态传输的相似性,本文借鉴表征光束传输的光束参数来表征波束的传输.动力学变量 F 的期望值为 $\langle F\rangle = \langle\varphi|F|\varphi\rangle$.引入归一化因子 I,参照文献[4,5]对光束参数的定义,将波束的束宽 W、发散角 Θ、曲率半径 R 和品质因子 Q 分别定义为

$$W^2 = 4\langle(\boldsymbol{r}-\langle\boldsymbol{r}\rangle)^2\rangle/Id,$$

$$\Theta^2 = 4\langle(\boldsymbol{p}-\langle\boldsymbol{p}\rangle)^2\rangle/Id,$$

$$W^2/R = 2\langle(\boldsymbol{r}-\langle\boldsymbol{r}\rangle)\cdot\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{r}-\langle\boldsymbol{r}\rangle)\rangle/Id$$

和

$$Q^4 = (W^2\Theta^2 - W^4/R^2)/4\hbar^2.$$

显然,束宽表征某一个时刻空间位置表象中波函数

* 国家科学技术部重点攻关计划(批准号:2000-068)和广东省自然科学基金团队项目(批准号:20003061)资助的课题.

的形状，而发散角表征某一个时刻动量表象中波函数形状. 本文(3)式表明波束的曲率半径标度束宽的变化，波束品质因子则从新的角度反映了测不准关系. 对于本文讨论的中心对称系统，$\langle \boldsymbol{r}\rangle = \langle \boldsymbol{p}\rangle = 0$.

根据(1)式，可得动力学变量 F 期望值的进化方程为

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle F\rangle = i\hbar\left\langle\frac{\partial F}{\partial t}\right\rangle + \langle [F, H]\rangle. \tag{2}$$

与文献[4, 5]类似，根据定义可以直接得到

$$\frac{\mathrm{d}W^2}{\mathrm{d}t} = 2\frac{W^2}{mR}, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q^4}{\mathrm{d}t} = \frac{W^2}{4\hbar^2}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}t} - \frac{m^2}{8\hbar^2}\frac{\mathrm{d}W^2}{dt} \times \left(\frac{\mathrm{d}^2W^2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{2}{m^2}\Theta^2\right). \tag{4}$$

(4)式可以用于判断量子系统的品质因子是否守恒. 当品质因子守恒时，可以在曲率半径为 ∞ 的束腰计算品质因子，根据测不准关系容易证明 $M \geqslant 1$. $M = 1$ 对应于最小波包. 品质因子的大小实际上表征了波束偏离最小波包的程度. 当品质因子不守恒时，如果(4)式等号右边可以化为全微分的形式，即可以定义一个有效的发散角 Θ_{eff}，使相应的有效品质因子 $Q_{\mathrm{eff}}^4 = (W^2\Theta_{\mathrm{eff}}^2 - W^4/R^2)/4\hbar^2$ 守恒，例如 Bose-Einstein 凝聚系统[9]. 限于篇幅，本文只讨论品质因子守恒的量子系统.

由于品质因子守恒，可以引入复数曲率半径 q，$q^{-1} = R^{-1} + 2i\hbar Q^2 W^{-2}$. 根据(3)和(4)式，可得品质因子守恒的充要条件为

$$\frac{\mathrm{d}Q^4}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 1 - q^2\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{5}$$

引入 Ricatti 代换[10]，$1/q(t) = [m/u(t)]\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t$，与文献[10]类似的办法，可将两个时刻($t_2 > t_1$)的复数曲率半径用 $ABCD$ 4 个参数关联

$$q_2^{-1} = (C + Dq_1^{-1})(A + Bq_1^{-1})^{-1}, \tag{6}$$

$$C = m\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t_2}, \quad D = m\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t_2}, \tag{7}$$

$$\frac{1}{A}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t_2} = \frac{1}{B}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t_2} = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}\Theta^2}{\mathrm{d}W^2}. \tag{8}$$

显然 $AD - BC$ 为常数. 对于本文给出的传输参数的定义，

$$AD - BC = 1. \tag{9}$$

本文讨论的量子系统的势能 V 为实函数，A，B，C 和 D 为实数. 分别取(6)式的实部和虚部，利用(9)式，可得

$$W_2^2 = (A + BR_1^{-1})^2 W_1^2 + 4B^2\hbar^2 Q_1^4 W_1^{-2}, \tag{10}$$

$$R_2^{-1}W_2^2 = (A + BR_1^{-1})(C + DR_1^{-1})W_1^2 + 4BD\hbar^2 Q_1^4 W_1^{-2}. \tag{11}$$

由于品质因子守恒，根据(5)式，可得发散角 Θ 的表达式，利用(3)和(7)—(11)式，可得

$$\Theta_2^2 = (C + DR_1^{-1})^2 W_1^2 + 4D^2\hbar^2 Q_1^4 W_1^{-2}. \tag{12}$$

分别对(10)和(12)式求微分，利用(3)，(9)和(11)式，可得(7)和(8)式. 根据(6)—(8)式求复数曲率半径的微分，可知(5)式成立. 这些推导说明，本文的讨论是自洽的.

引入演化算子为 $U(t, 0)$，

$$|\varphi_j(t_j)\rangle = U_j(t_j, 0)|\varphi(0)\rangle \quad (j = 1, 2).$$

在 Heisenberg 图像中，状态$|\varphi_{\mathrm{H}}\rangle$和动力学变量 F_{H} 分别为

$$|\varphi_{\mathrm{H}}\rangle = U^{+}(t, 0)|\varphi(t)\rangle$$

和

$$F_{\mathrm{H}} = U^{+}(t, 0)FU(t, 0),$$

式中演化算子的厄米共轭算子记为 $U^{+}(z, 0)$. 根据波束传输参数的定义，由(10)和(12)式，可得

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{H2}} = \pm(A\boldsymbol{r}_{\mathrm{H1}} + B\boldsymbol{p}_{\mathrm{H1}}),$$

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{H2}} = \pm(C\boldsymbol{r}_{\mathrm{H1}} + D\boldsymbol{p}_{\mathrm{H1}}). \tag{13}$$

由此可见，对于品质因子守恒的量子系统，波束的动量和位置的演化满足线性关系. 根据空间坐标算子和动量算子的对易关系和(13)式，可以证明(9)式. 根据物理变换的意义，(13)式等号右边小括号前面取 ”+ ’号，因此有

$$\boldsymbol{r}T = AT\boldsymbol{r} + BT\boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{p}T = CT\boldsymbol{r} + DT\boldsymbol{p}, \tag{14}$$

式中 $T(t_2, t_1) = U_2(t_2, 0)U_1^{+}(t_1, 0)$.

在空间坐标表象中，分别用$\langle \boldsymbol{r}_2|$和$|\boldsymbol{r}_1\rangle$左乘和右乘(14)式，可得

$$\boldsymbol{r}_2 K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1) = A\boldsymbol{r}_1 K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1) + iB\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1), \tag{15}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_2}K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1) = C\boldsymbol{r}_1 K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1) + iD\hbar\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}_1}K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1), \tag{16}$$

式中 $K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1) = \langle \boldsymbol{r}_2|T(t_2, t_1)|\boldsymbol{r}_1\rangle$为传播子：

$$\varphi_2(\boldsymbol{r}_2, t_2) = \int K(\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_1; t_2, t_1)\varphi_1(\boldsymbol{r}_1, t_1)\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1. \tag{17}$$

根据以上两式可以将传播子表示成 $ABCD$ 形式：

$$K(\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_1;t_2,t_1)=\left(-\frac{\mathrm{i}}{Bh}\right)^{\frac{d}{2}}$$

$$\times\exp\left[\mathrm{i}\frac{\pi}{Bh}(Ar_1^2-2\boldsymbol{r}_1\cdot\boldsymbol{r}_2+Dr_2^2)\right].\qquad(18)$$

根据(6)，(17)和(18)式，容易证明，如果用复数曲率半径将(1)式的解表达成如下形式：

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\frac{f(t)}{mq}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\hbar r^2}{2q}\right),\qquad(19)$$

解的形式在波束传输过程中将保持不变，例如，用于表征波束形状陡峭度的因子$\langle r^4\rangle/\langle r^2\rangle^2$ 为常数[11]. 由于 $M=1$，(19)式就是最小波包. 如果将束熵定义为 $S=-\langle\ln|\varphi(\boldsymbol{r},z)|^2\rangle/I$，根据(1)，(5)和(19)式，可得

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{d}{mR}.\qquad(20)$$

显然，束熵变化的符号与曲率半径变化符号一致，能够反映波束的聚焦或发散情况.(3)和(20)式表明，曲率半径不仅标度了束宽的演化，而且标度了束熵的演化.

从上面的讨论可知，本文通过引入波束传输参数，将品质因子守恒的量子系统含时 Schrödinger 方程的求解转化为一阶常微分方程(5)的求解，大大简化了问题的研究. $\mathrm{d}\Theta^2/\mathrm{d}W^2$ 可以根据$\langle H\rangle$的演化方程由(2)式求得. 势能为常数系统的 $ABCD$ 参数为($L=t_2-t_1$)，$A=D=1$，$B=L/m$，$C=0$. 谐振子系统的势能可以具有多种形式，势能不同，$ABCD$ 参数也会不同. 势能为 $V=m\beta^2r^2/2$ 的谐振子系统，$ABCD$ 参数为

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\beta L & \sin\beta L/(m\beta)\\ -m\beta\sin\beta L & \cos\beta L\end{pmatrix},\qquad(21)$$

势能为 $V=mf(t)\beta^2r^2/2$ 的谐振子系统，(5)式为

$$m\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}=1+m^2f(t)\beta^2q^2.\qquad(22)$$

例如，对于 $f(t)=\alpha+t$，$ABCD$ 参数可以表达成第一类修正的 Bessel 函数的形式. 限于篇幅，我们将在另文中详细讨论.

[1] Kleber M 1994 *Phys. Rep.* **236** 331

[2] Singh R and Deb B M 1999 *Phys. Rep.* **311** 47

[3] Kim S P and Page D N 2001 *Phys. Rev.* A **64** 012104-1

[4] Liu C Y, Guo H, Hu W and Deng X M 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 734

[5] Liu C Y, Guo H, Hu W and Deng X M 2000 *Sci. China* A **43** 312 (in Chinese) [刘承宜、郭　弘、胡　巍、邓锡铭 2000 中国科学 A **30** 54]

[6] Liu C Y, Deng D M, Hu W and Guo H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 524 (in Chinese) [刘承宜、邓冬梅、胡　巍、郭　弘 2002 物理学报 **51** 524]

[7] Liu C Y, Hu W, Lu G S and Guo H 2001 *Acta Opt. Sin.* **21** 1280 (in Chinese) [刘承宜、胡　巍、卢光山、郭　弘 2001 光学学报 **21** 1280]

[8] Bloch I, Kohl M, Greiner M, Hansch T W and Esslinger T 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 030401

[9] Dalfovo F, Giorgini S, Pitaevskii L P and Stringari S 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463

[10] Tovar A A and Casperson L W 1995 *J. Opt. Soc. Am.* A **12** 1522

[11] Martínez-Herrero R, Piquero G and Mejías P M 1995 *Opt. Commun.* **115** 225

ABCD formulation of propagator of a time-dependent quantum system *

Liu Cheng-Yi[1)2)] Liu Jiang[3)] Yin Jian-Ling[3)] Deng Dong-Mei[3)] Fan Guang-Han[3)]

[1)] (*Key Laboratory of Biomedical Photonics*, *Ministry of Education of China*, *Huazhong University of Science and Technology*, *Wuhan* 430074, *China*)

[2)] (*Laboratory of Laser Sport Medicine*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

[3)] (*School for Inforation and Optoelectronic Science and Engineering*, *South China Normal University*, *Guangzhou* 510631, *China*)

(Received 10 July 2001; revised manuscript received 28 March 2002)

Abstract

The evolution of states of a time-dependent quantum system can be supposed to be the propagation of a matter wave beam along the time coordinate. The beam width, divergence, curvature radius, quality factor and entropy were introduced to represent the matter wave beam. For a quantum system with a conservative beam-quality factor, the evolutions of position operator and momentum operator are linear, the propagator is of the *ABCD* formulation, and the formulation of the minimum wave packet, of which the quality factor is unity, is time-independent. The applications of these to quantum systems of constant potential and oscillators were also discussed.

Keywords: matter wave beam, light beam, oscillator

PACC: 0365

* Project supported by the Funds for Key Program of the Ministry of Science and Technology of China (Grant No. 2000-068), and the Team Project of the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 20003061).