第 51 卷 第 11 期 2002 年 11 月
1000-3290/2002/51(11)/2435-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.11, November, 2002
©2002 Chin. Phys. Soc.

具有一维 Coulomb 型对称势 Dirac 方程的精确解

冉扬强[1)†] 薛立徽[2)] 胡嗣柱[2)]

[1)] (西南师范大学物理系，重庆 400715)

[2)] (复旦大学物理系，上海 200433)

(2001 年 12 月 28 日收到；2002 年 4 月 19 日收到修改稿)

在标量势大于矢量势的情况下，一维 Dirac 方程的束缚态能级是二重简并的. 任意两个不同能量本征值的波函数和同一能量本征值的两个波函数都是相互正交的. 对于纯标量场，存在零能量束缚态，存在分数电荷.

关键词：Coulomb 型对称势，Dirac 方程，束缚态，分数电荷

PACC：0365，7135，0290

1. 引 言

近年来，一维 Schrödinger 方程在 Coulomb 型势场下的解受到理论工作者的广泛关注[1—12]. 研究的范围包括对称势 $-Ze^2/|x|$ 和反对称势 $-Ze^2/x$. 一维氢原子势 $-Ze^2/|x|$ 多个不同领域有着广泛的应用，包括高温超导中的激子[2]、半导体[3,4]、聚合物[5,6]、液氦表面和 Wigner 晶体中一维电子气[7,8]等. 另一方面，对于一维氢原子的定态本征函数问题，长期以来一直存在不同的意见. 由于势场的对称性，一维氢原子的本征函数必然有确定的宇称，然而对于奇宇称的本征函数和偶宇称的本征函数是否都对应真实的束缚态依然存在争论. Flugge 和 Marschall[9] 认为只有奇宇称的束缚态解，Loudon[10] 则认为也存在偶宇称的束缚态. Andrews[11] 对 Loudon 基态的存在提出质疑. 戴显熹[12] 则提出偶宇称的本征态不存在，并提出正交性判据. 我们在文献[1]中对 $-Ze^2/x$ 型反对称势做了详细的讨论.

由于考虑了强耦合情况下运动粒子的相对论效应，Dirac 方程具有比 Schrödinger 方程更加普遍的意义，一维 Dirac 方程束缚态解的讨论对于进一步了解以上问题有重要意义. 而与对 Schrödinger 方程的大量讨论相反，一维情况下的 Dirac 方程还没有被详细讨论过，一维 Dirac 方程的束缚态解仍然是一个亟待解决的问题.

本文将给出具有一维标量 Coulomb 型对称势 $S(x) = -K/|x|$ 和一维矢量 Coulomb 型对称势 $V(x) = -Ze^2/|x|$ 的 Dirac 方程束缚态的精确解. 所得到的解表明在标量势大于矢量势的情况下，一维 Dirac 方程的束缚态能级是二重简并的，即存在不同宇称的两组本征函数. 进一步证明了对应于不同能量本征值的本征函数之间，以及对应于同一能量本征值的两个本征函数之间相互正交. 最后，由于对纯标量场的情况体系具有零能束缚态，结合分数电荷的概念对这一点进行了讨论.

2. 一维 Coulomb 型对称势下 Dirac 方程的束缚态解

具有一维标量 Coulomb 型对称势

$$S(x) = -\frac{K}{|x|} \tag{1}$$

(其中 $K>0$ 为标量耦合常数)和一维矢量 Coulomb 型对称势

$$V(x) = -\frac{Ze^2}{|x|} = -\frac{\gamma}{|x|} \tag{2}$$

($\gamma \equiv Ze^2$)的 Dirac 方程(取 $\hbar = c = 1$)为

$$\left\{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \beta\left[M - \frac{K}{|x|}\right]\right\}\psi(x, y, z)$$

† 通讯联系人. E-mail: zrl66@swnu.edu.cn

$$= \left[E + \frac{\gamma}{|x|} \right] \psi(x,y,z), \tag{3}$$

其中

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$\boldsymbol{\sigma}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$为 Pauli 矩阵,

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{5}$$

I 为 2×2 单位矩阵.

取旋量波函数为

$$\psi = \psi(x) \exp(\mathrm{i}(p_2 y + p_3 z)), \tag{6}$$

p_2, p_3 为常动量,

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

仅为 x 的函数而与 y, z 无关,则 ψ_i($i=1,2,3,4$)满足的方程为(取 $p_2 = p_3 = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{i}\left[-\frac{K-\gamma}{|x|} + (M+E) \right] \psi_4, \\ \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{i}\left[-\frac{K-\gamma}{|x|} + (M+E) \right] \psi_3, \\ \frac{\mathrm{d}\psi_3}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{i}\left[\frac{K+\gamma}{|x|} - (M-E) \right] \psi_2, \\ \frac{\mathrm{d}\psi_4}{\mathrm{d}x} &= \mathrm{i}\left[\frac{K+\gamma}{|x|} - (M-E) \right] \psi_1. \end{aligned} \tag{8}$$

把 $-\mathrm{i}\psi_1$ 或 $-\mathrm{i}\psi_2$ 记为 u,把 ψ_4 或 ψ_3 记为 v,则方程(8)可合并为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{K-\gamma}{|x|} v + (M+E) v, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{K+\gamma}{|x|} u + (M-E) u.$$

为求出禁闭的束缚态解,不仅需满足 $|E| < M$,而且须满足 $K > \gamma$[13],记

$$\alpha_1 = M + E, \quad \alpha_2 = M - E, \tag{10}$$

并作变量代换

$$\rho = 2\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}\, x, \tag{11}$$

则方程(9)成为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} &= -\frac{K-\gamma}{|\rho|} v + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}\, v, \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\rho} &= -\frac{K+\gamma}{|\rho|} u + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\, u. \end{aligned} \tag{12}$$

由于 $\rho = 0$ 是势场的奇点,波函数在这一点连续,而波函数的导数则不一定连续[14].为了避免能量发散,波函数必须满足 $\psi(0) = 0$.因此可以把问题分为 $\rho > 0$ 和 $\rho < 0$ 两个区域来解.先在区域 $\rho > 0$ 解方程(12),为此作函数代换

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\alpha_1}\,[f(\rho) + g(\rho)]\,\rho^{\delta} \mathrm{e}^{-\rho/2}, \\ v &= \sqrt{\alpha_2}\,[f(\rho) - g(\rho)]\,\rho^{\delta} \mathrm{e}^{-\rho/2}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中

$$\delta = \sqrt{K^2 - \gamma^2}, \tag{14}$$

则由方程(12)可得

$$\begin{aligned} \rho \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\rho} + (\delta + \lambda - \rho) f &= -\eta g, \\ \rho \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\rho} + (\delta - \lambda) g &= \eta f, \end{aligned} \tag{15}$$

其中

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}\left[(K+\gamma)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} + (K-\gamma)\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right] \\ &= \frac{KM + \gamma E}{\sqrt{M^2 - E^2}}. \\ \eta &= \frac{1}{2}\left[(K+\gamma)\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}} - (K-\gamma)\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} \right] \\ &= \frac{KE + \gamma M}{\sqrt{M^2 - E^2}}. \end{aligned} \tag{16}$$

由方程(15)得到 $f(\rho)$ 的合流超几何方程

$$\begin{aligned} &\rho f''(\rho) + (2\delta + 1 - \rho) f'(\rho) \\ &- (\delta - \lambda + 1) f(\rho) = 0, \end{aligned} \tag{17}$$

其中“ ′ ”表示对 ρ 求导.它满足 $f|_{\rho\to 0} \neq \infty$ 的解为

$$f(\rho) = C_1 \mathrm{F}(\delta - \lambda + 1, 2\delta + 1; \rho), \tag{18}$$

其中 F 为合流超几何函数,C_1 为待定归一化常数.同理由方程(15)得到 $g(\rho)$ 的合流超几何方程为

$$\begin{aligned} &\rho g''(\rho) + (2\delta + 1 - \rho) g'(\rho) - (\delta - \lambda) \\ &\times g(\rho) = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

它满足 $g|_{\rho\to 0} \neq \infty$ 的解为

$$g(\rho) = C_2 \mathrm{F}(\delta - \lambda, 2\delta + 1; \rho), \tag{20}$$

其中 C_2 为待定归一化常数.将(18)和(20)式代入(13)式,注意到 $\mathrm{F}(a, c; \rho) \approx \mathrm{e}^{\rho}$(当 $\rho \gg 1$),为满足 $u|_{\rho\to+\infty} = 0$ 和 $v|_{\rho\to+\infty} = 0$,必须同时有

$$\begin{aligned} \delta - \lambda + 1 &= -n_1 \qquad (n_1 = 0,1,2,3,\cdots), \\ \delta - \lambda &= -n_2 \qquad (n_2 = 0,1,2,3,\cdots), \end{aligned} \tag{21}$$

因此

$$\delta - \lambda = -n \qquad (n = 0,1,2,3,\cdots). \tag{22}$$

当 $n \neq 0$ 时,将(18),(20)和(22)式代入方程(15),可得 $C_1 = -\frac{n}{\eta} C_2$,且 $\eta \neq 0$.把 C_2 记为 C,则由(18)和

(20)式,有

$$f(\rho) = -C\frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;\rho),\quad g(\rho) = C\mathrm{F}(-n,2\delta+1;\rho). \tag{23}$$

代入(13)式,得

$$\begin{aligned} u(\rho) &= C\sqrt{\alpha_1}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;\rho) - \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;\rho)\Big]\rho^{\delta}\mathrm{e}^{-\rho/2},\\ v(\rho) &= -C\sqrt{\alpha_2}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;\rho) + \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;\rho)\Big]\rho^{\delta}\mathrm{e}^{-\rho/2}. \end{aligned} \tag{24}$$

当 $n=0$ 时,如果 $\eta=0$,则方程(15)有解 $f=0$,$g=C$,C 为任意常数.代入(13)式,得

$$u(\rho) = C\sqrt{\alpha_1}\rho^{\delta}\mathrm{e}^{-\rho/2},\quad v(\rho) = -C\sqrt{\alpha_2}\rho^{\delta}\mathrm{e}^{-\rho/2}. \tag{25}$$

再在区域 $\rho<0$ 解方程(12).这时方程(12)成为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}|\rho|} &= -\frac{K-\gamma}{|\rho|}v - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}v,\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}|\rho|} &= \frac{K+\gamma}{|\rho|}u - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}u. \end{aligned} \tag{26}$$

作函数代换,$u_1=u$,$v_1=-v$ 或 $u_2=-u$,$v_2=v$,方程(26)成为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}|\rho|} &= -\frac{K-\gamma}{|\rho|}v_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}v_i,\\ \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}|\rho|} &= -\frac{K+\gamma}{|\rho|}u_i + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}u_i, \end{aligned} \tag{27}$$

其中 $i=1,2$.这就是以 $|\rho|$ 为自变量的方程(12),因此方程(26)也即方程(12),当 $n\neq 0$ 时的解为

$$\begin{aligned} u(\rho) &= C\sqrt{\alpha_1}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;|\rho|) - \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;|\rho|)\Big]|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2},\\ v(\rho) &= C\sqrt{\alpha_2}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;|\rho|) + \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;|\rho|)\Big]|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2} \end{aligned} \tag{28}$$

或者

$$\begin{aligned} u(\rho) &= -C\sqrt{\alpha_1}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;|\rho|) - \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;|\rho|)\Big]|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2},\\ v(\rho) &= -C\sqrt{\alpha_2}\Big[\mathrm{F}(-n,2\delta+1;|\rho|) + \frac{n}{\eta}\mathrm{F}(1-n,2\delta+1;|\rho|)\Big]|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2}. \end{aligned} \tag{29}$$

而当 $n=0$ 时,方程(12)在 $\rho<0$ 区域的解则为

$$u(\rho) = C\sqrt{\alpha_1}|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2},\quad v(\rho) = C\sqrt{\alpha_2}|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2} \tag{30}$$

或者

$$u(\rho) = -C\sqrt{\alpha_1}|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2},\quad v(\rho) = -C\sqrt{\alpha_2}|\rho|^{\delta}\mathrm{e}^{-|\rho|/2}. \tag{31}$$

将(14)和(16)式的第一式代入(22)式,得到束缚态的能量为

$$E_n = M\left\{\frac{-\gamma K}{\gamma^2+(n+\sqrt{K^2-\gamma^2})^2} \pm \sqrt{\left[\frac{\gamma K}{\gamma^2+(n+\sqrt{K^2-\gamma^2})^2}\right]^2 - \frac{K^2-(n+\sqrt{K^2-\gamma^2})^2}{\gamma^2+(n+\sqrt{K^2-\gamma^2})^2}}\right\}. \tag{32}$$

此式对 $n=0$ 也适用.

3.解的正交性问题

上节所解得的旋量波函数为

$$\psi = \begin{pmatrix} \mathrm{i}u \\ \mathrm{i}u \\ v \\ v \end{pmatrix}. \tag{33}$$

由合流超几何函数 $\mathrm{F}(-n,2\delta+1;\rho)$ 的正交性(或一般拉盖尔多项式的正交性),当 $n\neq m$ 时,有

$$\int_0^{\infty}\mathrm{F}(-n,2\delta+1;\rho)\mathrm{F}(-m,2\delta+1;\rho)\times\rho^{2\delta}\mathrm{e}^{-\rho}\mathrm{d}\rho = 0. \tag{34}$$

因此,对应于不同能量本征值的本征函数 $\psi_n(\rho)$ 和 $\psi_m(\rho)$ 之间相互正交.

对于同一能量本征值 E_n,存在两个态,波函数分别记为 $\psi_1(\rho)$ 和 $\psi_2(\rho)$.由一般的正交关系,如果 $\psi_1(\rho)$ 和 $\psi_2(\rho)$ 正交,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{+}(\rho)\psi_2(\rho)\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}(-\mathrm{i}u_{\mathrm{even}}^{*} - \mathrm{i}u_{\mathrm{even}}^{*}v_{\mathrm{odd}}^{*}v_{\mathrm{odd}}^{*})$$

$$\times\begin{pmatrix} \mathrm{i}u_{\mathrm{odd}} \\ \mathrm{i}u_{\mathrm{odd}} \\ v_{\mathrm{even}} \\ v_{\mathrm{even}} \end{pmatrix}\mathrm{d}\rho$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}(u_{\mathrm{even}}^{*}u_{\mathrm{odd}} + v_{\mathrm{odd}}^{*}v_{\mathrm{even}})\mathrm{d}\rho$$

$$= 0. \tag{35}$$

由于 u_{even}^{*} 为 ρ 的偶函数,u_{odd} 为 ρ 的奇函数,$u_{\mathrm{even}}^{*}u_{\mathrm{odd}}$ 为 ρ 的奇函数,同理 $v_{\mathrm{odd}}^{*}v_{\mathrm{even}}$ 亦为 ρ 的奇函数.因此 $u_{\mathrm{even}}^{*}u_{\mathrm{odd}} + v_{\mathrm{odd}}^{*}v_{\mathrm{even}}$ 为 ρ 的奇函数,所以有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1^{+}(\rho)\psi_2(\rho)\mathrm{d}\rho = 0, \tag{36}$$

即对于同一能量本征值,两组解相互正交.以上讨论对 $n=0$ 也适用.

4. 结论与讨论

综上所述,我们在条件 $K>\gamma$ 下严格地求得了 Dirac 方程(3)的束缚态能级(32)式和相应的波函数(24),(28)式($n\neq 0$ 时)和(25),(30)式($n=0$ 时),或者(24)和(29)式($n\neq 0$ 时)和(25),(31)式($n=0$ 时)所有的能级都是二重简并的,即对于同一能级存在两个态,一个态 $u(\rho)$是偶宇称的,$v(\rho)$是奇宇称的,另一个态 $u(\rho)$是奇宇称的,$v(\rho)$是偶宇称的.对应于不同能量本征值的本征函数之间和同一能量本征值的两个本征函数相互正交.

对于纯标量场的情况(即 $\gamma=0$,$K>0$),当 $n=0$ 时由(32)式可知束缚态能量 $E_0=0$,而零能量态的存在将导致分数电荷的存在,其理由如下[15]:

此时,二次量子化算符 $\hat{\psi}$ 可以展开为

$$\hat{\psi} = \hat{a}_0\psi_0(x) + \sum_{n\geqslant 1}[\hat{a}_n\psi_n(x)e^{-\mathrm{i}E_nt} + \hat{b}_n^{+}\sigma_3\psi_n^{*}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}E_nt}], \tag{37}$$

其中算符 $\hat{a}_n^{+}$($\hat{a}_n$)和 $\hat{b}_n^{+}$($\hat{b}_n$)分别为电子和正电子的产生(湮没)算符.在所选的表象中,电荷共轭由 σ_3 矩阵实现.ψ_0 是两个能量简并($E_0=0$)而宇称不同的态,$\hat{a}_0$ 作用到其中一个态上得到另一个态,可以把这两个态标记为$|0_{\pm}\rangle$[16].将电子的产生和湮没算符作用到这两个态上,得

$$\begin{aligned}\hat{a}_0|0_{+}\rangle &= |0_{-}\rangle,\\ \hat{a}_0^{+}|0_{-}\rangle &= |0_{+}\rangle,\\ \hat{a}_0|0_{-}\rangle &= 0,\\ \hat{a}_0^{+}|0_{+}\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{38}$$

粒子数算符 $\hat{N}$ 的定义为

$$\hat{N} = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x :\hat{\psi}^{+}(x)\hat{\psi}(x):, \tag{39}$$

将(37)式代入(39)式,得

$$\hat{N} = \hat{a}_0^{+}\hat{a}_0 - \frac{1}{2} + \sum_{n\geqslant 1}[\hat{a}_n^{+}\hat{a}_n - \hat{b}_n^{+}\hat{b}_n], \tag{40}$$

因此

$$\langle 0_{\pm}|\hat{N}|0_{\pm}\rangle = \pm\frac{1}{2}. \tag{41}$$

这说明两个简并的零能态各携带 1/2 单位的电荷.

感谢复旦大学物理系苏汝铿教授的有益讨论.

[1] Ran Y, Xue L, Hu S and Su R K 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** 9265
[2] Ginzburg V L 1992 *Contemp. Phys.* **33** 15
[3] Brown J W and Spector H N 1987 *Phys. Rev.* B **35** 3009
[4] Reyes J A and del Castillo-Mussot M 1998 *Phys. Rev.* B **57** 1690
[5] Heeger A J, Kivelson S, Schrieffer J R and Su W P 1988 *Rev. Mod. Phys.* **60** 731
[6] Abe S and Su W P 1991 *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **194** 357
[7] Wigner E P 1938 *Trans. Faraday. Soc.* **34** 678
[8] Carr W J Jr 1961 *Phys. Rev.* **122** 1437
[9] Flugge S and Marschall H 1952 *Rechenmethoden der Quanten-Theorie* (Berlin: Springer) p69
[10] Loudon R 1959 *Am. J. Phys.* **27** 649
[11] Andrews M 1966 *Am. J. Phys.* **34** 1194
[12] Dai X, Dai J and Dai J 1997 *Phys. Rev.* A **55** 2617
[13] Su R K and Ma Z Q 1996 *J. Phys.* A **19** 1739
[14] Landau L D and Lifshitz E M 1976 *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory* (New York: Pergamon) chap 18
[15] Ni G J and Su R K 1984 *Phys. Lett.* B **143** 437
[16] Jackiw R and Schrieffer J R 1981 *Nucl. Phys.* B **190** 253

Exact solutions for Dirac equation with one-dimensional symmetric Coulomb-type potentials

Ran Yang-Qiang[1)] Xue Li-Hui[2)] Hu Si-Zhu[2)]

[1)] (*Department of Physics*, *Southwest Normal University*, *Chongqing* 400715, *China*)

[2)] (*Department of Physics*, *Fudan University*, *Shanghai* 200433, *China*)

(Received 28 December 2001; revised manuscript received 19 April 2002)

Abstract

The energy levels of bound states for one-dimensional Dirac equation are doubly degenerate provided that the scalar-like potential is greater than the vector-like potential. Arbitrary two wave functions with different eigenenergies and two wave functions with the same eigenenergy are orthogonal to each other. For a pure scalar potential the zero energy bound state does exist, and the fractional charge does exist.

Keywords: symmetric Coulomb-type potential, Dirac equation, bound state, fractional charge

PACC: 0365, 7135, 0290