

两种实用的相空间重构方法^{*}

杨绍清^{1,2)} 贾传荧¹⁾

¹⁾ (大连海事大学航海动态仿真与控制实验室,大连 116001)

²⁾ (海军大连舰艇学院二系,大连 116018)

(2001 年 6 月 22 日收到,2002 年 4 月 2 日收到修改稿)

研究了目前流行的几种相空间重构技术,分析了它们存在的不足,在此基础上提出了两种适合于不同情况下的重构方法,并初步分析了它们重构的质量.在仿真实验中,由于两种方法都运用了小波降噪技术而具有一定的降噪能力,同时还可以看出第一种方法比第二种方法好.因此,在通常情况下,可以用第一种方法对信号进行重构.而在工程应用中,如需要重构的嵌入维较小时,可用第二种方法来对信号进行重构.

关键词:混沌,相空间重构,最大李雅普诺夫指数

PACC: 0545

1. 引言

混沌是一种低阶确定性的非线性动力系统所表现出来的非常复杂的行为,它对现代科学具有广泛而深远的影响,几乎覆盖了一切学科领域,尤其是在物理学、天体力学、数学、生物学、经济学等方面得到了广泛的应用.在对混沌时间序列的各种分析中,如混沌预测(prediction of chaos)、动力学不变量(dynamical invariants)的估计、混沌信号的诊断(detection of chaos)等,所要进行的第一步工作是要对混沌信号进行相空间重构.1981 年 Takens^[1]提出了相空间重构的延时坐标法,奠定了相空间重构技术的基础,这种方法用单一的标量时间序列来重构相空间,包括吸引子、动态特性和相空间的拓扑结构.现已成为最主要、最基本的相空间重构方法.

Takens 的嵌入定理叙述如下:

设 M 是 u 维紧流形.对于变换对 (X, y) , X 是一个光滑的 (C^2) 矢量场, y 是 M 上的光滑函数,则 $\Phi_{X,y}: M \rightarrow R^{2u+1}$ 是一个嵌入.这里 $\Phi_{X,y}(x) = (y(x), y(\phi_1(x)), \dots, y(\phi_{2u}(x)))$, 而 ϕ_i 是 x 的一个流.

此定理很容易与实际问题的对应. X 对应于一动力系统的系统方程, M 对应于该系统的吸引子.

而 y 则对应于系统状态与测量数据之间的函数关系.因此,在对时间序列进行重构时,可以用下列方法来应用 Takens 嵌入定理.

设一 N 点标量时间序列为 $\{x(t_0 + k \cdot \Delta t) : k = 0, 1, \dots, N-1\}$, 重构的相空间为 R^m , 则重构轨迹为

$$X_i = (x(t_i), x(t_i + p \cdot \Delta t), \dots, x(t_i + (m-1) \cdot p \cdot \Delta t)), \\ i = 1, 2, 3, \dots, M,$$

$x(t_r) = x(t_0 + (r-1) \cdot \Delta t)$, $r = 1, 2, \dots, N$, 式中 X_i 为重构相空间 R^m 中 M 点重构轨迹中的第 i 个点, 而 $M = N - (m-1) \cdot p$, m 是嵌入维, $\tau = p \cdot \Delta t$ 是时间延迟, $\tau_w = (m-1)\tau$ 是时间窗, 其中 Δt 为采样周期.可见,在重构相空间时只要选择 m, τ 和 τ_w 中的任意两个参数即可,另一个参数可由 $\tau_w = (m-1)\tau$ 直接求得.

Takens 定理隐含着^[2-4]:如果原动力系统的吸引子是 u 维的,则当 $m \geq 2u + 1$ 时,由重构轨迹构成的系统与原动力系统有一个嵌入.所以 Takens 定理仅要求 m 要足够大,而对 p 和 τ_w 没有特殊的要求.但 Takens 定理认为数据是不受噪声影响且是无限长的,而这一要求在实际问题中做不到.同时由于重构之前并不能很好地得到 u 的大小,因此在解决实际实际问题时通常还要运用一些具体的重构方法.

* 辽宁省博士启动基金(批准号 2001102095)资助的课题.

本文研究了目前比较流行的相空间重构技术,分析了它们存在的不足,并且在此基础上提出了两种适合于不同情况的相空间重构方法,并初步分析了它们之间的一些关系.在仿真实验中,本文采用了小波降噪技术,使得两种方法都具有一定的降噪能力.通过将两种方法运用于同一算法去解决同一问题时,结果发现第一种方法要比第二种方法好.因此,第一种方法的重构质量比较高,在通常情况下,可以用此方法对信号进行重构;而当要求重构的嵌入维较小时,可用第二种方法来对信号进行重构,第二种方法是一种可行而实用的方法.

2. 相空间重构的主要方法

相空间重构主要有三种方法:伪最近邻点法、奇异值分解法及自相关和互信息法.这三种方法的基本原理和存在问题如下:

2.1. 伪最近邻点法

假设

$$X_k = (x(t_k), x(t_k + p \cdot \Delta t), \dots, x(t_k + (m-1) \cdot p \cdot \Delta t))$$

和

$$X_k^m = (x^m(t_k), x^m(t_k + p \cdot \Delta t), \dots, x^m(t_k + (m-1) \cdot p \cdot \Delta t))$$

是相空间中的两个点,它们之间的距离为 $D_m(k)$,若嵌入维由 m 变为 $m+1$ 时,则它们之间的距离由 $D_m(k)$ 变为 $D_{m+1}(k)$:

$$D_{m+1}^2(k) = D_m^2(k) + [x(t_k + m \cdot p \cdot \Delta t) - x^m(t_k + m \cdot p \cdot \Delta t)]^2.$$

如果 $D_m(k)$ 较小,而 $D_{m+1}(k)$ 很大,那么就可以认为这两个点的最近邻关系是由于从较高维的吸引子投影到较低维的空间上造成的.此时, X_k 和 X_k^m 就是一对伪最近邻点.给定与伪最近邻点距离有关的阈值,就可以计算伪最近邻点数,当伪最近邻点数的百分比低于某一阈值时,则 m 就是要求的嵌入维^[5-7].

不难看出,伪最近邻点法的结果会受到两个阈值的影响.另外,当 $D_{m+1}(k) = D_m(k)$ 时,并不意味着 X_k 与 X_k^m 就是最近邻.

2.2. 奇异值分解法

用奇异值分解(SVD)法确定嵌入维 m 时,首先

要假定一个 s 维超空间,然后找出最小的能近似给出吸引子边界的超平面,这个超平面是由样本协方差矩阵的若干个最大的奇异值扩展而来的.但是,这种方法的结果依赖于 s 的选择,也即依赖于 τ_w 的选择^[7].利用 SVD 法确定的 m 不仅可能会随着 s 的不同而不同,而且可能会随着数据长度 N 的不同而不同.SVD 法的另一个缺点就是很难对确定 m 时的阈值作出客观的选择^[8].

2.3. 自相关和互信息法

对 τ_w 的选择通常不能太大或太小,太小会因相空间被压缩而存在冗余,太大会使重构轨迹之间失去必要的联系而丢失系统的原始信息.因此,可以用信号的自相关函数 $R_{xx}(\tau_w)$ 和互信息 $I(\tau_w)$ 来求取最佳的 τ_w ,即选取取自相关函数和互信息第一次达到某一值或最小值时的 τ_w .

这种方法具有计算量小等优点,但计算结果具有不一致性,亦即相同的标准应用于不同的系统中时,结果的好坏程度不一样.另外,有些系统可能没有最小值或达不到规定的值.如对 Lorenz-1 系统(1),在对数据不加任何处理时,自相关函数的最小值始终大于它的自相关函数初始值的 $1/e$ 倍^[9](通常的要求),见图 1.图 2 为 Lorenz-1 系统 1000 个点的 x 坐标,这些数据是通过 4 阶 Runge-Kutta 法求解相应的微分方程(1)获得的,其中步长为 $\Delta t = 0.01$.求解方程的初值选在吸引子的附近,并抛弃所有过渡点.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(8/3)x + yz, \\ \dot{y} = -10y + 10z, \\ \dot{z} = -yx + 28y - z. \end{cases} \quad (1)$$

以上是相空间重构最常用的三种基本方法.还有其他一些方法,如小窗口解(small-window solution)法和充填因子(fill factor)法等,它们都具有以上类似的一些问题^[10].

3. 两种实用的相空间重构方法

针对上述方法的不足,本文提出两种适合于不同情况的相空间重构方法.这两种方法的计算结果都具有较好的一致性.

3.1. 第一种可行的相空间重构方法

研究中发现,选择原始时间序列的平均峰值时

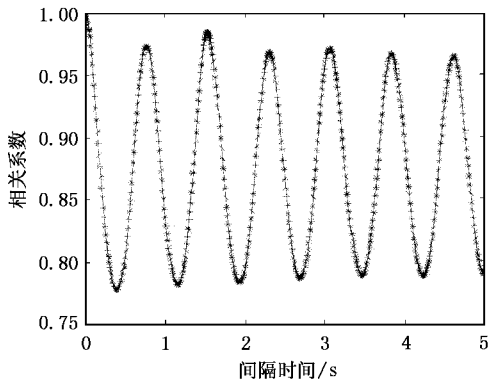


图 1 Lorenz-1 系统的相关函数

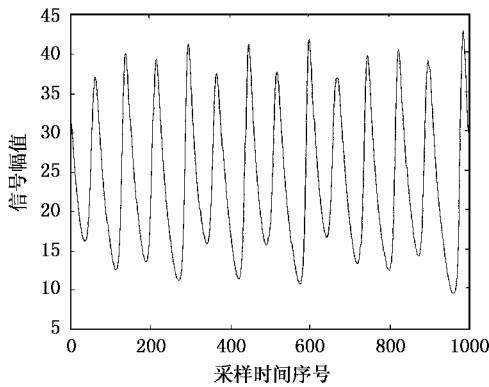


图 2 Lorenz-1 系统的 1000 点 x 坐标

间 $(m\tau_w)$ 作为 τ_w , 是一个很有实际意义的思想, 体现了把一个周期行为作为一个单位, 来研究信号长期行为的思想. 通常 τ_w 的大小有一个范围, τ_w 必须满足 $\tau_{w\min} < \tau_w < \tau_{w\max}$, 否则重构会变坏, 其中 $\tau_{w\min}$ 可用公式 $\tau_{w\min} = (12)^2 \sigma(x) \sigma(dx/dt)$ 来估计, 式中 $\sigma(\cdot)$ 为均方差, 对 Lorenz-1 系统而言, $\tau_{w\min} \approx 0.67$. 不难推断出 $m\tau_w = 4\sigma(x) \sigma(dx/dt)$, 因此 $m\tau_w$ 是始终大于 $\tau_{w\min}$ 的. 对 Lorenz-1 系统而言, 本文选择 $\tau_w = 0.78$, 此结果与上述分析完全一致. 在选择 τ_w 以后, 还要对 τ 或 m 作出选择^[8].

由于 τ 的大小与信号自身的相关程度有关, 相关程度越低, τ 就应越小, 因此对带有噪声的信号重构时, τ 不能太大. 文献 [4, 9] 都给出了 τ 的上限公式:

$$\tau_{\max} < \frac{(2\log_2 M - 1 - 4D_2)(m - D_2)}{m^2 K_2 \Delta t \log_2 e}$$

式中 D_2 为系统的相关维, K_2 为 2 阶熵. 从式中可以看出, 随着 m 的增大, τ 的上限必然要下降, 因此在

m 足够大时, τ 可以取得很小, 此时也必须取得很小. 然而, 理论上和实际中 τ 的确存在下限, 但这个下限的确定, 必须在确定对连续系统的采样周期时就应该考虑. 现行许多脱离采样周期来研究 τ 的方法, 似乎存在一定的局限性. 在选择 Δt 时, 为了使信号能有效地恢复, 信号自身的相关程度下降越快, 即信号的频率越高, Δt 就越小, 这与 τ 的选择原则一致. 可见有效的采样周期, 已经很好地解决了信号自身的相关问题.

另一方面, 从 Takens 定理的要求来看, 要想使重构系统与原系统有一个嵌入, 那么 m 应足够大. 因此, 本文在确定了 τ_w 的情况下, 选择最大的 m , 得到最小的 τ , 即 $\tau = \Delta t, p = 1$. 在本文工作基本完成时, 注意到 Schouten 等人^[11] 在估计带有噪声的吸引子分形维时也采用了这种重构方法, 但他们在求取 $m\tau_w$ 的具体方法上与本文有区别.

综上所述, 本文提出的相空间重构的第一种方法为: 1) 求取原始时间序列的 $m\tau_w$, 让 $\tau_w = m\tau_w$ (可以让 τ_w 稍大于 $m\tau_w$). 带有噪声的时间序列可经滤波后再求取 $m\tau_w$. 求取原始时间序列的 $m\tau_w$ 可以采用快速傅里叶变换 (FFT) 来提取信号的主要频率 f 的方法获得, $m\tau_w = 1/f$, 而对信号的滤波可以采用小波滤波方法, 因为小波比较适合于对非线性信号的滤波; 2) 选择 $p = 1$, 即 $\tau = \Delta t$; 3) $m = \tau_w / \tau + 1$.

用上述 Lorenz-1 系统的 x 坐标来检验本算法的有效性, 图 3 示出该系统的平均峰值时间. 从图 3 很容易看出: 当横轴为 78 时, 功率谱最大, 因此, 78 所对应的信号周期即为要求的 $m\tau_w$.

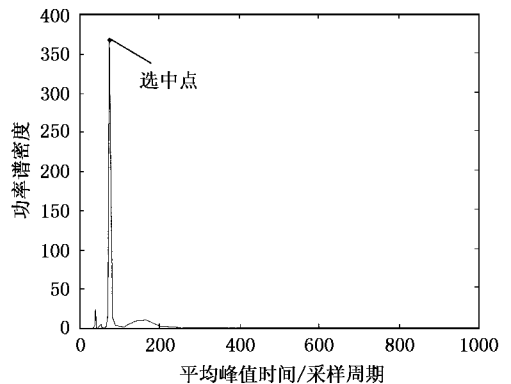


图 3 Lorenz-1 系统的平均峰值时间

在用 FFT 求取 $m\tau_w$ 时, 并不是以功率谱的大小作为选择 $m\tau_w$ 的惟一条件, 除了功率谱的大小作为选择 $m\tau_w$ 的一个条件外, 还应结合下列两个条件:

1) 提取的 $mtbp$ 应尽量小, 只有这样才能较好地描述信号中全部成分, 不至于丢掉信号中变化较快的成分 2) $mtbp$ 所对应的谱线应尽可能地接近离散谱线, 这样保证了 $mtbp$ 所对应的成分是信号中周期性较强的成分. 因此 $mtbp$ 的确定需要在上述三个条件中进行均衡.

对带有噪声的信号进行重构时, 可以先用小波对信号进行滤波, 然后再用 FFT 求取 $mtbp$. 小波滤波的基本原理^[12]是首先选择合适的小波母函数, 对信号进行小波变换, 然后应用一种依赖于信号时间及小波系数大小的软阈值, 重新选择小波系数, 最后再用小波逆变换对信号进行重构, 这样就可以得到经过滤波的信号. 具体步骤如下:

设 f_i 为有噪声信号, g_i 为原始信号, ϵ_i 为噪声, 则

$$f_i = g_i + \epsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

再设 $f = \{f_i\}, g = \{g_i\}, W$ 和 W^{-1} 分别为离散小波变换和逆变换算子, F, G 分别为 $\{f_i\}, \{g_i\}$ 的离散小波变换, \hat{G} 为从 F 中对 G 的估计, 则可以通过以下三步获得原始信号的估计 \hat{g} :

- 1) 求 $F = Wf$;
- 2) $\hat{G} = \begin{cases} \text{sig}(F \setminus (|F| - T)), & |F| - T \geq 0, \\ 0, & |F| - T < 0, \end{cases}$

其中

$$T = \sqrt{2 \log(N)};$$

- 3) $\hat{g} = W^{-1} \hat{G}$.

对上述 Lorenz-1 的 1000 点 x 坐标, 按 $SNR = -10$ 叠加白噪声, 得到图 4 所示的噪声信号, 该噪声信号经过小波滤波后得到图 5 所示的去噪后的信号, 对去噪后的信号提取的 $mtbp$ 仍然为 0.78, 参见图 6.

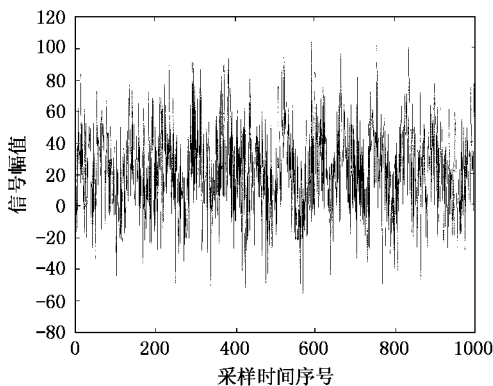


图 4 SNR = -10 时的噪声信号

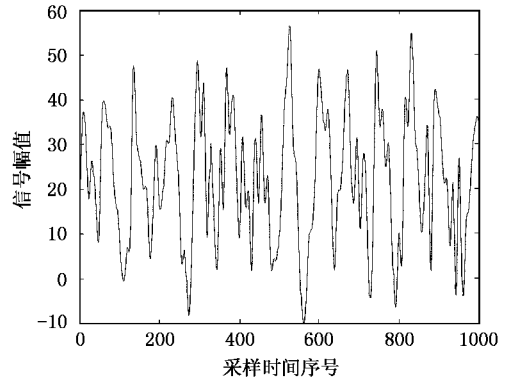


图 5 经过小波滤波后的信号

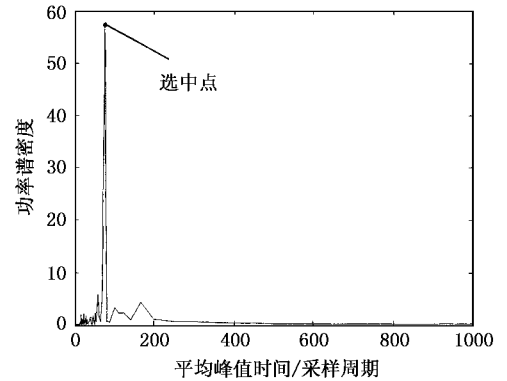


图 6 噪声信号的平均峰值时间

3.2. 另一种可行的相空间重构方法

在许多情况下, 由于工程应用方面的限制, 需要降低嵌入维. 上述重构方法虽然是一种较好的方法, 但也存在嵌入维较大的缺点, 因此, 还需要有一种能够降低嵌入维的重构方法.

由前面分析可知 SVD 法确定嵌入维的主要缺点是其结果依赖于 s 的选择, 而 s 应该选择信号的平均峰值时间 τ_w , 自然我们就想到了以下重构方法: 1) 由第一种方法求出 τ_w ; 2) 由 SVD 法求出嵌入维; 3) 由 $\tau = \tau_w (m - 1)$ 直接求得 τ .

为了能与文献[3]的结果进行比较, 在此采用 Lorenz-2 (见(2)式)来进行算法的有效性检验. 图 7 为 Lorenz-2 的 1000 点 x 坐标. 图 8 为用 FFT 提取的 $mtbp$. 为将图 8 中的情况显示清楚, 将图 8 中前 200 点示于图 9. 图 10 给出用 SVD 法求取嵌入维的情况. 图 11 为 Lorenz-2 在 $SNR = -10$ 时的噪声信号. 图 12 为去噪后的信号. 对噪声信号的 $mtbp$ 和嵌入维的计算结果示于图 13 和图 14. 从图中可以看出,

在所有情况下都能得到 $\tau_w = 0.48$,当选择 $m = 3$ 时 ,
 则有 $p = 24$,这一结果与文献 [3] 的结果完全一致 ,
 这证明了本方法的有效性 .

$$\begin{cases} \dot{x} = 16.0(y - z), \\ \dot{y} = x(45.92 - z) - y, \\ \dot{z} = -xy - 4.0z. \end{cases} \quad (2)$$

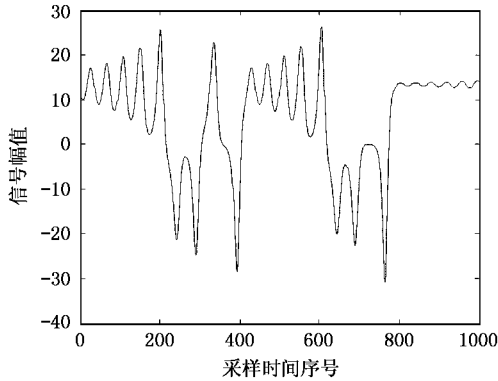


图 7 Lorenz-2 系统的 1000 点 x 坐标

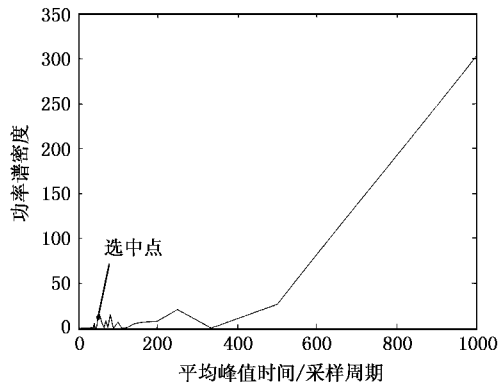


图 8 Lorenz-2 系统的平均峰值时间

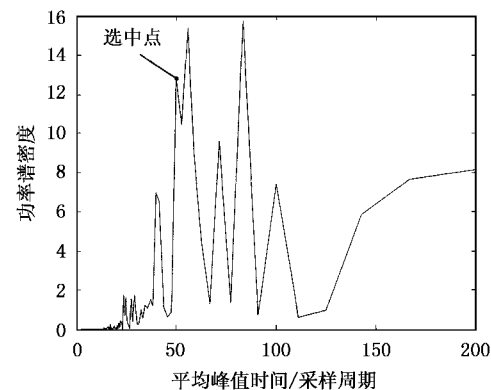


图 9 Lorenz-2 系统的平均峰值时间

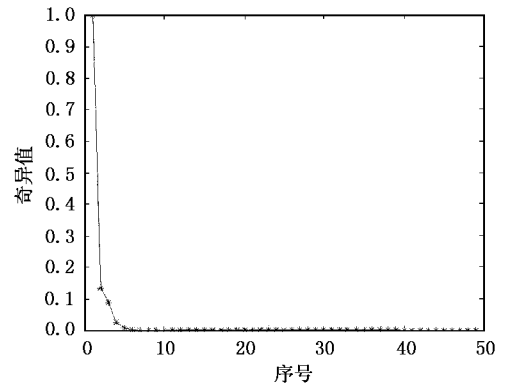


图 10 Lorenz-2 系统的奇异谱

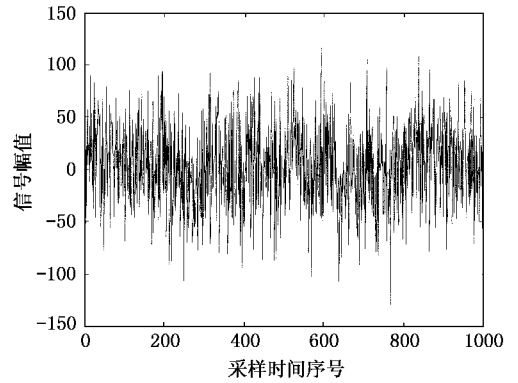


图 11 SNR = -10 的噪声信号

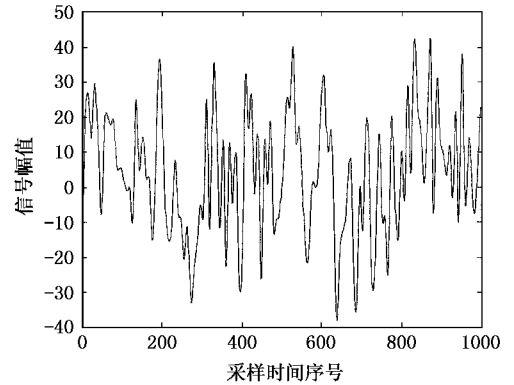


图 12 经过小波滤波后的信号

3.3. 两种方法比较

从上述两种方法的求解过程可以看出 ,对同一系统分别运用两种方法进行重构时所得到的重构参数不一样 ,那么用这样不同的重构参数使用相同的算法进行系统不变量的提取时是否一样呢 ?为了研究这一问题我们用这两种方法对多个混沌信号进行

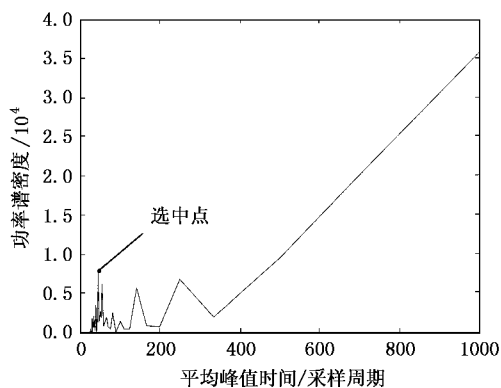


图 13 平均峰值时间的求取

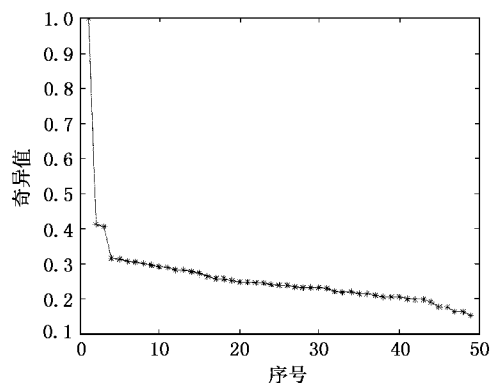


图 14 Lorenz-2 系统的奇异谱

重构,并用文献[8]的方法来求取系统的最大李雅普诺夫指数 λ_1 ,结果第一种方法的效果比较好,第二种方法没有第一种方法的效果好.用第二种方法,在 $\text{SNR} = 100$ 时能够得到比较令人满意的结果,但几乎

在 $\text{SNR} = 10$ 时,其结果与理论值就相差很大,而用第一种方法时在 $\text{SNR} = -40$ 时还能够给出有意义的结果.表 1 给出用两种重构方法分别求取 Lorenz-1 和 Lorenz-2 系统 λ_1 的结果,计算中采用的数据同文献[8],但所取的数据长度为 2000 点.可见,在抗噪能力方面,第二种方法比第一种方法差.这一结果说明,两种重构方法并不完全等价.然而两种方法的有效性都得到了证实^[8,13].

表 1 不同重构方法时求取 λ_1 的结果

重构方法	重构参数		最大李雅普诺夫指数 λ_1							
	Lorenz-1	Lorenz-2	Lorenz-1 (理论值 = 2.06)		Lorenz-2 (理论值 = 1.50)					
	τ	τ_w	m	τ	τ_w	m	SNR = 100	SNR = 10	SNR = 100	SNR = 10
方法 1	1	78	79	1	48	49	2.11	2.15	1.48	1.55
方法 2	39	78	3	24	48	3	2.99	8.02	1.04	7.65

4. 结 语

本文提出了两种适合于不同情况下的相空间重构方法,第一种重构方法是一种比较客观的方法,第二种重构方法则是一种适合于工程应用的方法.需要指出的是,在用两种方法进行重构时,所得到的参数作为同一种算法的输入时,并不能得到相同的结果.可见在解决实际问题时,各种重构方法需要具有与其相对应的算法配合,才能得到比较好的效果.我们认为第一种方法是一种重构质量较高的方法,而第二种方法则是从工程应用出发的一种实用的方法.

[1] Takens F 1981 *Lecture Notes Math.* **898** 366[2] Potapov A 1997 *Physica D* **101** 207[3] Yuan J et al 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1291 [in Chinese] 袁 坚等 1997 物理学报 **46** 1291][4] Lai Y C et al 1996 *Phys. Lett. A* **218** 30[5] Kennel M B et al 1992 *Phys. Rev. A* **45** 3402[6] Abarbanel H D I et al 1993 *Rev. Mod. Phys.* **65** 1331[7] Kugiumtzis D 1996 *Physica D* **95** 13[8] Yang S Q et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 [in Chinese] 杨绍清等 2000 物理学报 **49** 636][9] Lai Y C et al 1998 *Physica D* **115** 1[10] Rosenstein M T et al 1994 *Physica D* **73** 82[11] Schouten J C et al 1994 *Phys. Rev. E* **50** 1851[12] Weiss L G et al 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **101** 377[13] Yang S Q et al 2001 *Acta Acoust. Sin.* **26** 212 [in Chinese] 杨绍清等 2001 声学学报 **26** 212]

Two practical methods of phase space reconstruction^{*}

Yang Shao-Qing^{1,2)} Jia Chuan-Ying¹⁾

¹⁾(*Navigation Dynamic Simulation and Control Laboratory ,Dalian Maritime University , Dalian 116001 , China*)

²⁾(*Department No.2 ,Dalian Naval Academy , Dalian 116018 , China*)

(Received 22 June 2001 ; revised manuscript received 2 April 2002)

Abstract

In this paper , several prevalent methods of phase space reconstruction are studied and their disadvantages are discussed. Based on the previous work , two practical methods of phase space reconstruction under different conditions are presented and the qualities of reconstruction are analyzed. In simulation , by using wavelet denoising approach , the two methods have good results in phase space reconstruction from noisy signals and the first method is better than the second. But the second method is suitable to solve the engineering problems .

Keywords : chaos , phase space reconstruction , largest Lyapunov exponent

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Doctorate Foundation of Liaoning Province , China (Grant No.2001102095).