

一种新的奇偶非线性相干态及其量子统计性质^{*}

王继锁¹⁾²⁾ 冯 健¹⁾²⁾ 刘堂昆¹⁾³⁾ 詹明生¹⁾

¹⁾中国科学院武汉物理与数学研究所波谱与原子分子物理国家重点实验室, 武汉 430071)

²⁾聊城大学物理系, 聊城 252059)

³⁾湖北师范学院物理系, 黄石 435002)

(2001 年 11 月 29 日收到, 2002 年 2 月 20 日收到修改稿)

定义了一种新的奇偶非线性相干态即算符 B^2 [$B = a/f(N)$] 的两个正交归一本征态, 利用数值计算方法研究了它们的量子统计性质. 结果表明, 与通常的奇偶相干态不同, 在参数 $|\beta|$ 变化的某些范围内, 只有偶非线性相干态可以存在压缩效应, 而振幅平方压缩和反聚束效应在这两个态中均可以呈现.

关键词: 新的奇偶非线性相干态, 压缩, 振幅平方压缩, 反聚束效应

PACC: 4250, 0365

1. 引 言

1963 年, Glauber 相干态的提出^[1], 大大促进了量子光学的发展, 目前相干态理论及其应用研究已成为物理学研究的一个重要领域^[2-5]. 我们知道, 由于单模电磁场可等效于一个标准的辐射谐振子, 因而相干态是简谐振子湮没算符 a 的本征态; 在此基础上人们提出了奇偶相干态^[6-8], 奇偶相干态是相干态的反对称(对称)组合, 它们都是简谐振子湮没算符平方即 a^2 的本征态, 且奇相干态不呈现压缩但呈现反聚束效应, 偶相干态则呈现压缩效应但不呈现反聚束效应^[8].

近几年来, 人们对被称之为 f 相干态^[9] 的非线性相干态给予了极大关注^[10,11], 非线性相干态是 f 振子湮没算符 $af(n)$ 的 $f(n)$ 为数算符 $n = a^+ a$ 的函数本征态, 且具有压缩和“自劈裂”(self-splitting) 性质, 在此基础上人们构造出了一种奇偶非线性相干态, 它们是算符 $af(n)$ 的平方, 即算符 $(af(n))^2$ 的两个正交归一本征态, 并且研究了它们的非经典效应^[12,13]. 众所周知, 研究非经典态的一种重要且行之有效的途径, 就是尽可能多地构造一些量子力学所允许的态矢量, 然后研究它们的量子统计性质, 从而有可能发现新的非经典效应, 并找到各种非经典效应之间的联系^[14]. 最近, Roy 等人^[15,16] 定义了一种新

的非线性相干态, 并研究了它们的非经典特性. 本文在此基础上首先引入一种新的奇偶非线性相干态, 然后研究它们的压缩、振幅平方压缩和反聚束效应等量子统计性质. 研究结果表明, 与通常的奇偶相干态不同, 在参数 $|\beta|$ 的某些取值范围内, 只有偶非线性相干态可以存在压缩效应, 而在参数 $|\beta|$ 的不同取值范围内, 振幅平方压缩和反聚束效应在这两个态中均可以呈现.

2. 新的奇偶非线性相干态的定义

为了下面行文和完备性起见, 本节先来回顾有关非线性相干态^[9] (即 f 相干态) 和新的非线性相干态^[15] 的一些结果.

f 振子的产生和湮没算符分别定义为

$$A^+ = f(N)a^+, \quad A = af(N), \quad (1)$$

式中 a^+ 和 a 分别为通常简谐振子的产生和湮没算符, f 为数算符 $N = a^+ a$ 的非负函数, 且有

$$[N, A] = -A, \quad [N, A^+] = A^+, \quad (2)$$

$$[A, A^+] = f^2(N)(N+1) - f^2(N-1)N. \quad (3)$$

非线性相干态(即 f 相干态) $|\alpha, f\rangle$ 定义为算符 A 的本征态, 即

$$A|\alpha, f\rangle = \alpha|\alpha, f\rangle, \quad (4)$$

在粒子数表象中, 非线性相干态 $|\alpha, f\rangle$ 表示为

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10074072)及山东省自然科学基金(批准号: Q99A03)资助的课题.

$$|\alpha, f\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!} \mathcal{F}(n)!} |n\rangle, \quad (5)$$

$$C = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n! [\mathcal{F}(n)!]^2} \right\}^{-1/2},$$

式中 α 为复参数,

$$\mathcal{F}(n)! = \mathcal{F}(n)\mathcal{F}(n-1)\dots\mathcal{F}(1)\mathcal{F}(0), \quad \mathcal{F}(0) = 1.$$

2000 年, Roy 等人^[15,16] 引入了 f 振子的一种新的湮没和产生算符:

$$B = a \frac{1}{\mathcal{F}(N)}, \quad B^+ = \frac{1}{\mathcal{F}(N)} a^+, \quad (6)$$

算符 A 和 B 满足

$$[A, B^+] = 1, \quad [B, A^+] = 1. \quad (7)$$

与非线性相干态 $|\alpha, f\rangle$ 的定义相类似, 他们定义了一种新的非线性相干态 $|\beta, f\rangle$, 即湮没算符 B 的本征态; 在粒子数表象中这种新的非线性相干态 $|\beta, f\rangle$ 表示成为^[15,16]

$$|\beta, f\rangle = N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n \mathcal{F}(n)!}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (8)$$

$$N_f = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{2n} [\mathcal{F}(n)!]^2}{n!} \right\}^{-1/2}, \quad (9)$$

式中 β 为复参数.

与奇偶非线性相干态(即算符 A^2 的两个正交归一本征态)的定义^[12]相类似, 我们定义一种新的奇偶非线性相干态(即算符 B^2 的两个正交归一本征态):

$$|\beta, f_{\pm}\rangle = N_{\pm} (|\beta, f\rangle \pm |-\beta, f\rangle), \quad (10)$$

式中“+”号对应新的偶非线性相干态, “-”号对应新的奇非线性相干态(下同), N_{\pm} 为归一化系数. 利用归一化条件 $\langle \beta, f | \beta, f_{\pm} \rangle = 1$, 可以求出归一化系数为

$$N_{\pm} = \left\{ 2 \pm 2N_f^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-|\beta|^2)^n [\mathcal{F}(n)!]^2}{n!} \right\}^{-1/2}. \quad (11)$$

易于证明, 由(10)式所定义的这两个态确实是算符 B^2 的两个正交归一本征态, 即

$$B^2 |\beta, f_{\pm}\rangle = \beta^2 |\beta, f_{\pm}\rangle. \quad (12)$$

由(8)–(10)式可以得到新的奇偶非线性相干态在粒子数表象中的表示为

$$|\beta, f_{\pm}\rangle = N_{\pm} N_f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\beta^{\pm} \pm (-\beta)^n] \mathcal{F}(n)!}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (13)$$

易见, 在(13)式中若选取不同的函数 $\mathcal{F}(n)$, 新的奇偶非线性相干态将有不同的表现形式, 这里选取函

数 $\mathcal{F}(n)$ 具有在描述囚禁离子运动时已使用过^[17] 的下列形式(下同):

$$\mathcal{F}(n) = L_n^1(\eta^2) [L_n^0(\eta^2)]^{-1}, \quad (14)$$

式中 η 为 Lamb-Dicke 参数, $L_n^m(x)$ 为缔合 Laguerre 多项式^[18]. 显然, 当 $\eta = 0$ 时, $\mathcal{F}(n) = 1$, 这时新的奇偶非线性相干态(即(13)式)分别变成为通常的奇偶相干态.

3. 新的奇偶非线性相干态的非经典特性

下面分别研究由(13)式所定义的新的奇偶非线性相干态的压缩、振幅平方压缩和反聚束效应等非经典特性.

3.1. 压缩特性

定义光场复振幅算符的两个正交分量即两个厄米算符

$$X_1 = (a^+ + a)/2, \quad X_2 = (a^+ - a)/2, \quad (15)$$

它们满足对易关系 $[X_1, X_2] = \frac{i}{2}$ 和测不准关系 $\langle (\Delta X_1)^2 \rangle \langle (\Delta X_2)^2 \rangle \geq 1/16$; 如果场的某个正交分量的均方差满足

$$\langle (\Delta X_i)^2 \rangle < \frac{1}{4} \quad (i = 1, 2), \quad (16)$$

则称光场在 X_i ($i = 1, 2$) 分量上存在二阶压缩效应(即通常所谓压缩效应). 为了表征这种压缩的程度, 可定义其压缩度为

$$D_i(1) = 4 \langle (\Delta X_i)^2 \rangle - 1 \quad (i = 1, 2), \quad (17)$$

即

$$D_1(1) = 2 \langle a^+ a \rangle + \langle a^{+2} + a^2 \rangle - \langle a^+ + a \rangle^2, \quad (18)$$

$$D_2(1) = 2 \langle a^+ a \rangle - \langle a^{+2} + a^2 \rangle + \langle a^+ - a \rangle^2,$$

式中 $-1 \leq D_i(1) < 0$ 表示光场在 X_i 分量上存在压缩效应; $D_i(1)$ 的大小反映其被压缩的程度, 当 $D_i(1) = -1$ 时表示光场在 X_i 分量上 100% 被压缩. 下面讨论由(13)式所定义的这种新的奇偶非线性相干态的压缩特性.

由(13)式可以求得下列算符在新的奇偶非线性相干态中的态平均值分别为

$$\langle a^+ a \rangle_{\pm} = N_{\pm}^2 N_f^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta^{n+1} \pm (-\beta)^{n+1}|^2 [\mathcal{F}(n+1)!]^2}{n!}, \quad (19)$$

$$\langle a \rangle_{\pm} = 0, \quad \langle a^+ \rangle_{\pm} = 0, \quad (20)$$

$$\beta^{-2} \langle a^2 \rangle_{\pm} = \beta^{*-2} \langle a^{+2} \rangle_{\pm} \\ = N_{\pm}^2 N_f^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta^n \pm (-\beta)^n|^2 \mathcal{K}(n)! (n+2)!}{n!}. \quad (21)$$

将(14)和(19)~(21)式代入(18)式,并注意到(9)和(11)式,在 Lamb-Dicke 参数 η 取某一固定值时,借助于数值计算,可以分别得到新的奇偶非线性相干态的压缩度 $D_1(1)$ 或 $D_2(1)$ 随复参数 β 的变化曲线.例如当 $\eta = 0.7$ 和选取 β 的复角等于零时,其变化曲线如图 1 所示.

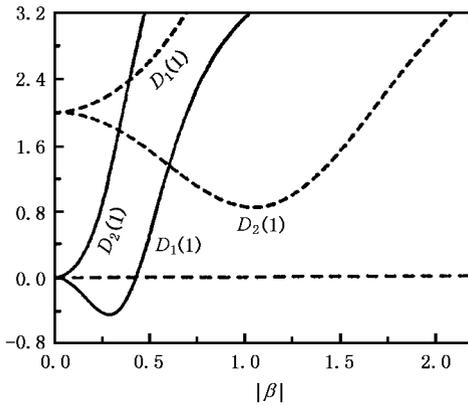


图 1 当 $\eta = 0.7$ 时新的偶(实线)和奇(虚线)非线性相干态的压缩度 $D_1(1)$ 和 $D_2(1)$ 随 $|\beta|$ 的变化曲线

由图 1 可以看出,对于 Lamb-Dicke 参数 η 的某一给定值,在 $|\beta|$ 的某些取值范围内,只有新的偶非线性相干态在 X_1 分量上可呈现压缩效应.例如当 $\eta = 0.7$ 时新的偶非线性相干态只在 $0 < |\beta| < 0.4323$ 范围内才可呈现压缩效应,而在 $|\beta|$ 的其他取值范围内不存在压缩效应.我们知道,通常的偶相干态总可呈现压缩效应^[8].由此可见,由(13)式所定义的这种新的偶非线性相干态与通常的偶相干态在压缩特性上的表现不同.

3.2. 振幅平方压缩

定义两个可测量即两个厄米算符

$$Y_1 = (a^{+2} + a^2)/2, \quad Y_2 = (a^{+2} - a^2)/2, \quad (22)$$

它们分别表示光场复振幅平方的实部和虚部.容易证明,算符 Y_1 和 Y_2 满足如下的对易关系和测不准关系:

$$[Y_1, Y_2] = \frac{i}{2} [a^2, a^{+2}]$$

$$= i(2N + 1) \quad (N = a^+ a), \quad (23)$$

$$\langle (\Delta Y_1)^2 \rangle \langle (\Delta Y_2)^2 \rangle \geq |\langle N + 1/2 \rangle|^2. \quad (24)$$

如果

$$\langle (\Delta Y_i)^2 \rangle < |\langle N + 1/2 \rangle| \quad (i = 1, 2) \quad (25)$$

成立,则称光场存在振幅平方压缩^[7].另外,为了表征光场振幅平方压缩的程度,可定义振幅平方压缩的压缩度为

$$D_i(2) = \frac{\langle (\Delta Y_i)^2 \rangle - \frac{1}{4} \langle [a^2, a^{+2}] \rangle}{\frac{1}{4} \langle [a^2, a^{+2}] \rangle} \quad (i = 1, 2), \quad (26)$$

即

$$D_1(2) = \frac{2 \langle a^{+2} a^2 \rangle + \langle a^{+4} + a^4 \rangle - \langle a^{+2} + a^2 \rangle^2}{\langle a^2 a^{+2} \rangle - \langle a^{+2} a^2 \rangle}, \quad (27a)$$

$$D_2(2) = \frac{2 \langle a^{+2} a^2 \rangle - \langle a^{+4} + a^4 \rangle + \langle a^{+2} - a^2 \rangle^2}{\langle a^2 a^{+2} \rangle - \langle a^{+2} a^2 \rangle}, \quad (27b)$$

式中 $-1 \leq D_i(2) < 0$ 表示光场在 Y_i 分量上存在振幅平方压缩, $D_i(2)$ 的大小反映其被压缩的程度,当 $D_i(2) = -1$ 时表示光场在 Y_i 分量上 100% 被压缩.下面讨论由(13)式所定义的这种新的奇偶非线性相干态的振幅平方压缩特性.

由(13)式可以求得下列算符在新的奇偶非线性相干态中的态平均值分别为

$$\langle a^{+2} a^2 \rangle_{\pm} = N_{\pm}^2 N_f^2 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta^{n+2} \pm (-\beta)^{n+2}|^2 [\mathcal{K}(n+2)]!}{n!}, \quad (28)$$

$$\beta^{-4} \langle a^4 \rangle_{\pm} = \beta^{*-4} \langle a^{+4} \rangle_{\pm} \\ = N_{\pm}^2 N_f^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta^n \pm (-\beta)^n|^2 \mathcal{K}(n)! (n+4)!}{n!}, \quad (29)$$

$$\langle a^2 a^{+2} \rangle_{\pm} = N_{\pm}^2 N_f^2 \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta^n \pm (-\beta)^n|^2 [\mathcal{K}(n)]!}{n!} (n+1)(n+2). \quad (30)$$

将(14)、(21)和(28)~(30)式代入(27)式,并注意到(9)和(11)式,在 Lamb-Dicke 参数 η 取某一固定值时,借助于数值计算,可以分别得到新的奇偶非线性相干态的振幅平方压缩的压缩度 $D_1(2)$ 或 $D_2(2)$ 随

复参数 β 的变化曲线. 例如当 $\eta = 0.7$ 和选取 β 的复角等于零时, 其变化曲线如图 2 所示.

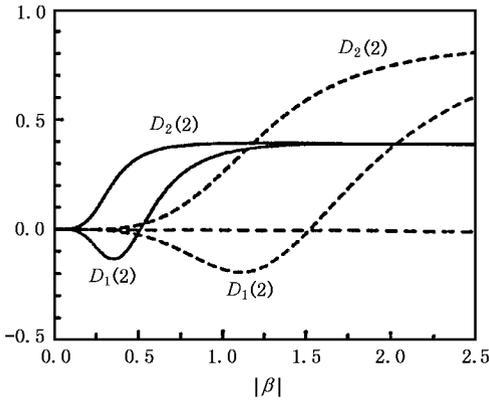


图 2 当 $\eta = 0.7$ 时新的偶(实线)和奇(虚线)非线性相干态的振幅平方压缩度 $D_1(2)$ 和 $D_2(2)$ 随 $|\beta|$ 的变化曲线

由图 2 可以看出, 对 Lamb-Dicke 参数 η 的某一给定值, 在 $|\beta|$ 的某些不同取值范围内, 新的奇偶非线性相干态在 Y_1 分量上均可呈现振幅平方压缩效应. 例如当 $\eta = 0.7$ 时, 新的偶非线性相干态在 $0 < |\beta| < 0.5135$ 范围内可呈现振幅平方压缩效应, 新的奇非线性相干态在 $0 < |\beta| < 1.5196$ 范围内也可呈现振幅平方压缩效应. 我们知道, 通常的奇偶相干态均不会存在振幅平方压缩效应^[8,19]. 由此可见, 由(13)式所定义的这种新的奇偶非线性相干态, 表现出与通常的奇偶相干态截然不同的振幅平方压缩特性.

3.3. 光子反聚束效应

对于单模光场, 其二阶相干度 $g^{(2)}(0)$ 可表示为

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a^2 \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2}. \quad (31)$$

若 $g^{(2)}(0) < 1$, 则光子是反聚束的^[20], 即光场呈现非经典效应. 对于由(13)式所定义的这种新的奇偶非线性相干态, 将(19)和(28)式代入(31)式, 可以得到其二阶相干度分别为

$$g_{\pm}^{(2)}(0) = \frac{\pm \langle \beta f | a^+ a^2 | \beta f \rangle_{\pm}}{\pm \langle \beta f | a^+ a | \beta f \rangle_{\pm}^2} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{n+2} \pm (-\beta)^{n+2} [f(n+2)!]}{n!}}{N_{\pm}^2 N_f^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\beta|^{n+1} \pm (-\beta)^{n+1} [f(n+1)!]}{n!} \right)^2}. \quad (32)$$

将(9)和(11)式代入(32)式, 并借助于数值计算方法, 可以分别得到在 Lamb-Dicke 参数 η 取某一固定值时这种新的奇偶非线性相干态的二阶相干度 $g_{\pm}^{(2)}(0)$ 随复参数 β 的变化曲线. 例如当 $\eta = 0.7$ 和选取 β 的复角等于零时, 其变化曲线如图 3 所示.

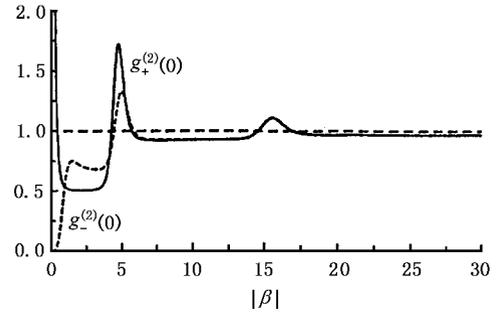


图 3 当 $\eta = 0.7$ 时新的偶(实线)和奇(虚线)非线性相干态的二阶相干度 $g_{\pm}^{(2)}(0)$ 随 $|\beta|$ 的变化曲线

由图 3 可以看出, 对于 Lamb-Dicke 参数 η 的某一给定值, 在 $|\beta|$ 的某些不同取值范围内, 新的偶非线性相干态可以呈现反聚束效应, 而新的奇非线性相干态并不呈现反聚束效应. 例如当 $\eta = 0.7$ 时, 新的偶非线性相干态除在 $4.3250 < |\beta| < 5.7799$ 和 $14.3362 < |\beta| < 17.0509$ 范围外, 在 $|\beta|$ 取值的较大范围内, 均可呈现反聚束效应, 而新的奇非线性相干态在 $4.5133 < |\beta| < 5.9436$ 和 $14.6557 < |\beta| < 17.0561$ 范围内不存在反聚束效应. 我们知道, 通常的偶相干态总是聚束的, 而通常的奇相干态总是反聚束的^[8]. 由此可见, 由(13)式所定义的这种新的奇偶非线性相干态在其光子反聚束效应的表现上, 与通常的奇偶相干态也截然不同.

4. 结 论

本文在文献[15]的基础上, 引入了一种新的奇偶非线性相干态, 研究了它们的压缩、振幅平方压缩和光子反聚束等量子统计性质. 结果表明, 这种新的奇偶非线性相干态在这些非经典效应上的表现, 与通常的奇偶相干态相比截然不同. 对于 Lamb-Dicke 参数 η 的某一给定值, 在参数 $|\beta|$ 变化的某些范围内, 只有偶非线性相干态可以呈现压缩效应, 在参数 $|\beta|$ 变化的不同取值范围内, 它们均可以呈现振幅平方压缩效应, 且新的偶非线性相干态可以呈现反聚束效应, 而在参数 $|\beta|$ 的某些取值范围内, 新的奇非线性相干态并不存在反聚束效应.

显然,当 $\langle n \rangle \rightarrow 1$ 时本文所定义的这种新的奇偶非线性相干态即(13)式就会分别变成为人们通

常所说的奇偶相干态,因此,通常的奇偶相干态可视为是本文当 $\langle n \rangle \rightarrow 1$ 时的一个特例.

- [1] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766
- [2] Klauder J R and Skagerstam B S 1985 *Coherent States*(Singapore : World Scientific)
- [3] Perelomov A 1986 *Generalized Coherent States and Their Applications* (Berlin Springer)
- [4] Zhang W M , Feng D H and Gilmore R 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 867
- [5] Ali S T , Antoine J P and Gazeau J P 2000 *Coherent States , Wavelets and Their Generalizations* (New York : Springer)
- [6] Dodonov V V , Malkin I A and Man 'ko V I 1974 *Physica* **72** 597
- [7] Hillery M 1987 *Phys. Rev. A* **36** 3796
- [8] Xia Y J and Guo G C 1989 *Phys. Lett. A* **136** 281
- [9] Man 'ko V I *et al* 1997 *Phys. Scr.* **55** 528
- [10] Roy B and Roy P 1999 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **1** 341
- [11] Sivakumar S 2000 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** R61
- [12] Mancini S 1997 *Phys. Lett. A* **233** 291
- [13] Sivakumar S 1998 *Phys. Lett. A* **250** 257
- [14] Peng S A and Guo G C 1990 *Acta Phys. Sin.* **39** 51 (in Chinese) [彭石安、郭光灿 1990 物理学报 **39** 51]
- [15] Roy B and Roy P 2000 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** 65
- [16] Roy B and Roy P 2000 *J. Opt. B : Quantum Semiclass. Opt.* **2** 505
- [17] de Matos Filho R L and Vogel W 1996 *Phys. Rev. A* **54** 4560
- [18] Abramowitz M and Stegun I A (eds) 1972 *Handbook of Mathematical Functions*(New York :Dover)
- [19] Sun J Z , Wang J S and Wang C K 1992 *Chin. J. Quantum Electron.* **9** 397 (in Chinese) [孙金祚、王继锁、王传奎 1992 量子电子学报 **9** 397]
- [20] Walls D F 1983 *Nature* **306** 141

A new kind of even and odd nonlinear coherent states and their quantum statistical properties^{*}

Wang Ji-Suo^{1,2)} Feng Jian^{1,2)} Liu Tang-Kun^{1,3)} Zhan Ming-Sheng¹⁾

¹⁾ State Key Laboratory of Magnetic Resonance and Atomic and Molecular Physics , Wuhan Institute of Physics and Mathematics , Chinese Academy of Sciences , Wuhan 430071 , China)

²⁾ Department of Physics , Liaocheng University , Liaocheng 252059 , China)

³⁾ Department of Physics , Hubei Normal University , Huangshi 435002 , China)

(Received 29 November 2001 ; revised manuscript received 20 February 2002)

Abstract

A new kind of even and odd nonlinear coherent states are defined. Using the numerical method ,we have studied quantum statistical properties of the new even and odd nonlinear coherent states. It is shown that quantum statistical properties of the new even and odd nonlinear coherent states are very different from those of the usual even and odd coherent states. It is found that , in some ranges of $|\beta|$, the squeezing only exists in the new even nonlinear coherent state , and the amplitude-squared squeezing and antibunching effect appear for both new even and odd nonlinear coherent states.

Keywords : new even and odd nonlinear coherent states , squeezing , amplitude-squared squeezing , antibunching effect

PACC : 4250 , 0365

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 10074072) and the Natural Science Foundation of Shandong Province , China(Grant No. Q99A03).