

# V 型三能级原子玻色-爱因斯坦凝聚体与双模压缩光场相互作用系统中光场的压缩特性\*

周 明 黄春佳

(长沙电力学院物理与信息工程系,长沙 410077)  
(2001 年 12 月 25 日收到 2002 年 4 月 29 日收到修改稿)

研究了 V 型三能级原子的玻色-爱因斯坦凝聚体与双模压缩相干态光场相互作用系统中光场的压缩特性. 结果表明, 光场的两正交分量交替呈现周期性压缩现象, 其压缩时间和压缩深度与光场的初始压缩因子密切相关.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚体, V 型三能级原子, 双模压缩态光场, 光场正交压缩

PACC: 4250

## 1. 引 言

自爱因斯坦从理论上预言玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)之后 70 年, 1995 年美国科学家终于在实验室实现了中性原子的 BEC<sup>[1,2]</sup>. 这一物理学发展史上具有里程碑意义的重大进展, 开辟了一个全新的物理学研究领域. 随后不久, 理论物理学家就预言从超冷的原子 BEC 中可以发射类似于激光的相干原子束. 1997 年, Ketterle 小组和 Anderson 等人相继获得了“原子激光”<sup>[3,4]</sup>. 此后, 人们以极大的兴趣对原子 BEC 的产生及其独特性质以及原子 BEC 与光场的相互作用进行了大量的实验和理论研究, 取得了一系列重要成果<sup>[5-12]</sup>.

本文在建立双模压缩态光场与 V 型三能级原子 BEC 相互作用系统理论模型的基础上, 在 Bogoliubov 近似<sup>[13]</sup>下求解了光场-BEC 系统的动力学方程, 研究了系统中光场的正交压缩性质. 所得结果表明: 与 V 型三能级原子 BEC 相互作用的双模压缩态光场的两个正交分量均呈现周期性的压缩, 其压缩时间和压缩深度与光场的初始压缩因子密切相关.

## 2. 理论模型

考虑 V 型三能级原子的 BEC 与双模压缩态光场的相互作用系统. 在旋波近似下, 系统哈密顿量为

$$H = \omega_{01} b_2^+ b_2 + \omega_{02} b_3^+ b_3 + \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \epsilon'(a_1 b_1 b_2^+ + a_1^+ b_1^+ b_2 + a_2 b_1 b_3^+ + a_2^+ b_1^+ b_3), \quad (1)$$

式中  $b_i^+$  和  $b_i$  分别为第  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 个原子态的产生算符与湮没算符,  $a_i^+$  和  $a_i$  分别为第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 模光场的产生算符与湮没算符,  $\omega_i$  为第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 模光场的圆频率,  $\omega_{0i}$  为原子基态与第  $i$  ( $i = 1, 2$ ) 个激发态之间的本征跃迁频率,  $\epsilon'$  为原子与光场的耦合系数. 为简便起见, 只考虑双共振情形, 即设  $\omega_1 = \omega_{01}$ ,  $\omega_2 = \omega_{02}$ .

设初始时刻所有原子均处于基态并发生 BEC, 激发态为真空态, 系统的态矢可表示为

$$|\psi(0)\rangle = |\beta_1\rangle \otimes |\psi(0)\rangle_s, \quad (2)$$

式中  $|\beta_1\rangle$  表示在基态发生 BEC 的原子处于相干态<sup>[6]</sup>, 有  $b_1|\beta_1\rangle = \sqrt{N_c} e^{-i\theta} |\beta_1\rangle$ ,  $N_c$  为处于  $|\beta_1\rangle$  的平均原子数, 而  $|\psi(0)\rangle_s = |0_2\rangle \otimes |0_3\rangle \otimes |\xi\rangle$ , 其中  $|0_2\rangle$  和  $|0_3\rangle$  为原子的真空态,  $|\xi\rangle$  为双模光场的压缩相干态,  $|\xi\rangle$  可表示为<sup>[12]</sup>

$$|\xi\rangle = D_1(\alpha_1) D_2(\alpha_2) S_{12}(\xi) |0\rangle, \quad (3)$$

式中

$$D_1(\alpha_1) = \exp(\alpha_1 a_1^+ - \alpha_1^* a_1), \quad (4)$$

$$D_2(\alpha_2) = \exp(\alpha_2 a_2^+ - \alpha_2^* a_2), \quad (5)$$

$$S_{12}(\xi) = \exp(\xi^* a_1 a_2 - \xi a_1^+ a_2^+) \quad (\xi = r e^{-i\varphi}) \quad (6)$$

\* 湖南省教育厅基金(批准号 011040010128)资助的课题.

分别表示圆频率为  $\omega_1, \omega_2$  的光场的平移算符和双模压缩算符.

为了使体系的运动方程便于求解,我们采用 Bogoliubov 近似,即假定初始时刻处于 BEC 的原子数目很大,以至于在光场作用的过程中基态原子数的缓慢变化可以忽略不计,从而可以将体系哈密顿量中的  $b_1$  和  $b_1^+$  分别用  $\sqrt{N_c} e^{-i\theta}$  和  $\sqrt{N_c} e^{i\theta}$  替代.由此可得到关于  $a_1, a_2, b_2, b_3$  的海森堡方程的矩阵形

式为

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_3(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{01} & 0 & \varepsilon e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & \omega_{02} & 0 & \varepsilon e^{-i\theta} \\ \varepsilon e^{i\theta} & 0 & \omega_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon e^{i\theta} & 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_3(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

求解(7)式,所得结果为

$$\begin{pmatrix} b_2(t) \\ b_3(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon t) & 0 & -i \sin(\varepsilon t) e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & \cos(\varepsilon t) & 0 & -i \sin(\varepsilon t) e^{-i\theta} \\ -i \sin(\varepsilon t) e^{i\theta} & 0 & \cos(\varepsilon t) & 0 \\ 0 & -i \sin(\varepsilon t) e^{i\theta} & 0 & \cos(\varepsilon t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2(0) e^{-i\omega_1 t} \\ b_3(0) e^{-i\omega_2 t} \\ a_1(0) e^{-i\omega_1 t} \\ a_2(0) e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中  $\varepsilon = \varepsilon' \sqrt{N_c}$ .

### 3. 光场的压缩效应

为了研究光场的压缩效应,定义光场的两个缓变的正交分量算符<sup>[14]</sup>为

$$U_1 = (a_1 + a_1^+ + a_2 + a_2^+) 2^{\frac{3}{2}}, \quad (9)$$

$$U_2 = (a_1 - a_1^+ + a_2 - a_2^+) 2^{\frac{3}{2}} i, \quad (10)$$

$U_1, U_2$  满足下列对易关系:

$$[U_1, U_2] = i/2. \quad (11)$$

相应的不确定关系为

$$(\Delta U_1)(\Delta U_2) \geq 1/16. \quad (12)$$

引入

$$Q_i = (\Delta U_i)^2 - \frac{1}{4} \quad (i = 1, 2), \quad (13)$$

若在某一状态下,有  $Q_i < 0$  ( $i = 1$  或  $2$ ),则意味着光场的第  $i$  个正交分量的量子噪声被压缩.

当系统处于(2)式所描述的状态时,那么利用(3)–(8)式可得

$$a_1^+ a_1 = (|\alpha_1|^2 + \sinh^2 r) \cos^2(\varepsilon t), \quad (14)$$

$$a_2^+ a_2 = (|\alpha_2|^2 + \sinh^2 r) \cos^2(\varepsilon t), \quad (15)$$

$$a_1^+ a_2 = \alpha_1^* \alpha_2 \cos^2(\varepsilon t) e^{-(\omega_2 - \omega_1)t}, \quad (16)$$

$$a_2^+ a_1 = \alpha_2^* \alpha_1 \cos^2(\varepsilon t) e^{-(\omega_1 - \omega_2)t}, \quad (17)$$

$$a_1^2 = \alpha_1^2 \cos^2(\varepsilon t) e^{-2i\omega_1 t}, \quad (18)$$

$$a_2^2 = \alpha_2^2 \cos^2(\varepsilon t) e^{-2i\omega_2 t}, \quad (19)$$

$$a_1 a_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - e^{i\theta} \sinh r \cosh r) \cos^2(\varepsilon t) e^{-(\omega_1 + \omega_2)t}. \quad (20)$$

将(14)–(20)式代入(13)式,可得

$$Q_1(t) = \frac{1}{2} \cos^2(\varepsilon t) \{ \sinh^2 r - \sinh r \cosh r \times \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - \theta] \}, \quad (21)$$

$$Q_2(t) = \frac{1}{2} \cos^2(\varepsilon t) \{ \sinh^2 r - \sinh r \cosh r \times \cos[(\omega_1 + \omega_2)t - \theta + \pi] \}. \quad (22)$$

从(21)和(22)式不难看出,光场的两正交分量的涨落均随时间周期性地变化.当

$$\cos[(\omega_1 + \omega_2)t - \theta] > \tanh r \quad (23)$$

时,有  $Q_1 < 0$ ,即  $U_1$  分量被压缩.而当

$$\cos[(\omega_1 + \omega_2)t - \theta + \pi] > \tanh r \quad (24)$$

时,有  $Q_2 < 0$ ,即  $U_2$  分量被压缩.

从(21)和(22)式还可看出,  $Q_i(t)$  ( $i = 1, 2$ )中含有频率分别为  $(\omega_1 + \omega_2)$  和  $2\varepsilon$  的两种振荡,前者是由原子频繁发射和吸收光子造成的量子 Rabi 振荡,后者表征原子与光场相互作用所引起的崩塌-回复效应.

取  $\theta = 0$ ,由(23)式可知,  $Q_1$  的压缩时间为

$$\frac{2k\pi}{\omega_1 + \omega_2} - \tau_0 < t < \frac{2k\pi}{\omega_1 + \omega_2} + \tau_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (25)$$

每次压缩的持续时间为  $2\tau_0$ ,其中

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_1 + \omega_2} \arccos(\tanh r). \quad (26)$$

同样,可由(24)式求得  $Q_2$  的压缩时间为

$$\frac{(2k+1)\pi}{\omega_1 + \omega_2} - \tau_0 < t < \frac{(2k+1)\pi}{\omega_1 + \omega_2} + \tau_0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (27)$$

每次压缩的持续时间亦为  $2\tau_0$ .

由(21)式可知,  $Q_1$  的最佳压缩时间点  $t_{p1}$  在  $t_p = k\pi/\epsilon$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 附近, 且满足

$$t_{p1} = \frac{2k\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (k = \text{整数}). \quad (28)$$

同样, 由(22)式可知,  $Q_2$  的最佳压缩时间点  $t_{p2}$  在  $t_p = k\pi/\epsilon$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ) 附近, 且满足

$$t_{p2} = \frac{(2k+1)\pi}{\omega_1 + \omega_2} \quad (k = \text{整数}). \quad (29)$$

$Q_1$  和  $Q_2$  相应的最大压缩深度均为

$$Q_p = (\sinh^2 r - \sinh r \cosh r)/2. \quad (30)$$

(26)和(30)式表明, V型三能级原子的 BEC 与双模压缩态光场相互作用系统中光场两正交分量的压缩

持续时间依赖于光场的频率之和  $\omega_1 + \omega_2$ , 以及初始压缩因子  $r$ , 而压缩深度决定于光场的初始压缩因子  $r$ .

## 4. 结 论

本文运用全量子理论, 在旋波近似和 Bogoliubov 近似下, 求解了 V型三能级原子的 BEC 与双模压缩态光场相互作用系统的动力学方程, 研究了系统中光场的正交压缩性质. 结果表明, 光场的两正交分量的涨落可周期性地交替压缩, 其压缩持续时间依赖于光场的频率之和  $\omega_1 + \omega_2$ , 以及初始压缩因子  $r$ , 而压缩深度则由光场的初始压缩因子  $r$  决定.

- [1] Anderson M H *et al* 1995 *Science* **269** 198
- [2] Davis K B *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 3696
- [3] Mewes M O *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 582
- [4] Anderson B P and Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [5] Kuang L M and Zeng Z Y 1998 *Chin. Phys. Lett.* **15** 703
- [6] Sun C P *et al* 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 161
- [7] Dalfovo F *et al* 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 463
- [8] Huang H and Li S Q 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 9
- [9] Hao B L 1997 *Prog. Phys.* **17** 233 (in Chinese) 郝柏林 1997 物理学进展 **17** 233
- [10] Zhang S M and Ye F 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 977 (in Chinese)
- [张思溟、叶 飞 1999 物理学报 **48** 977]
- [11] Tan W H and Yan K Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1983 (in Chinese)
- [谭维翰、闫珂柱 1999 物理学报 **48** 1983]
- [12] Yan K Z and Tan W H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1909 (in Chinese)
- [闫珂柱、谭维翰 2000 物理学报 **49** 1909]
- [13] Jing H *et al* 2001 *Phys. Rev. A* **63** 15601
- [14] Bogoliubov N N 1947 *J. Phys. (USSR)* **11** 23
- [15] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics* (Beijing: Science Press) p185 (in Chinese) 彭金生、李高翔 1996 近代量子光学导论(北京: 科学出版社)第 185 页]

# Squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with Bose-Einstein condensate of V-type three-level atoms<sup>\*</sup>

Zhou Ming Huang Chun-Jia

(Department of Physics and Information Engineering, Changsha University of Electric Power, Changsha 410077, China)

(Received 25 December 2001; revised manuscript received 29 April 2002)

## Abstract

The squeezing properties of two-mode squeezed field interacting with Bose-Einstein condensate of V-type three-level atoms are studied. The results show that two quadrature components of light can be squeezed periodically and that both duration and maximum depth of squeezing are closely correlated to the initial squeezing parameter of light.

**Keywords:** Bose-Einstein condensate, V-type three-level atom, two-mode squeezed field, quadrature squeezing of light

**PACC:** 4250

<sup>\*</sup> Project supported by the Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 011040010128).