# 低杂波电流驱动的数值模拟\*

丁伯江 匡光力 刘岳修 沈慰慈 俞家文 石跃江

(中国科学院等离子体物理研究所,合肥 230031)

(2001年12月18日收到2002年1月27日收到修改稿)

通过求解二维 Fokker-Planck 方程,得到了 HT-7 托卡马克低杂波驱动电流随时间的演化关系及其空间分布,理论值与实验结果基本符合,为 HT-7 托卡马克实验提供了理论依据.通过解电流扩散方程,考虑了快电子的径向扩散效应对驱动电流的影响.

关键词:低杂波电流驱动,数值模拟,径向扩散 PACC:5250,5265,5240D

### 1.引 言

利用低杂波实现驱动电流已经成为托卡马克装 置上实现稳态运行的一种有效辅助手段.为了更好 地为实验提供理论依据 求解驱动电流的数值模拟 十分重要.传统的方法有两种:一种是使用一维Fokker-Planck 方程求解电子的分布函数 而忽略了垂直 方向速度的变化;另一种是即使使用了二维速度空 间的 Fokker-Planck 方程求解电子的速度分布函数, 但是假设射频波导致的电子的准线性扩散系数在一 定的速度空间内是一个常数 这显然不合理.本文在 原有低杂波电流驱动(LHCD)数值模拟的基础上<sup>[1]</sup>, 通过低杂波在等离子体中的传播吸收,求得准线性 扩散系数,以此为纽带,利用二维Fokker-Planck方 程<sup>[2]</sup>计算低杂波驱动电流,得到了 HT-7 托卡马克低 杂波驱动电流随时间的演化关系及其空间分布 ,理 论值与实验结果基本符合,为HT-7托卡马克实验 提供了理论依据,此方法与传统的方法相比,有其独 特的优点.

另外 理论和实验研究表明 ,托卡马克等离子体 的约束主要取决于反常的输运过程<sup>[3,4]</sup>.携带电流的 超热电子横越磁场的径向输运将使驱动电流的分布 展宽 ,并使驱动电流减小.我们知道 ,由于反常的输 运机理<sup>[3]</sup>将会加快快电子的径向扩散 ,因此 ,在 LH-CD 实验中 ,低杂波驱动的快电子存在沿径向扩散和 碰撞两个过程,二者相互作用的结果决定驱动电流 的剖面形状及大小.其特征时间分别为快电子的约 束时间<sub>τ</sub>,和动量弛豫时间<sub>τ</sub>,可由下式求出<sup>[5]</sup>:

$$\tau_{\rm d} \approx \frac{a^2}{D_{\rm fast}} ,$$
(1)

 $\tau_{s} = [4\pi \ln(\Lambda) n_{e} r_{e}^{2} c]^{-1} , \qquad (2)$ 

式中 a 为托卡马克小环的半径 , $D_{\text{fast}}$  为快电子沿半 径方向的扩散系数 , $\ln(\Lambda)$ 为碰撞库仑对数 , $n_e$  为电 子密度 , $r_e$  为经典电子半径 ,c 为光速.若  $\tau_s \gg \tau_d$  , 则电子间的碰撞慢化过程可忽略 ;相反 ,若  $\tau_s \ll \tau_d$  , 则快电子的径向扩散过程可忽略 .事实上 ,在 HT-7 托卡马克装置上 , $\tau_s$  和  $\tau_d$  的差别不是太大 ,故两种 物理过程均应考虑 .

由于碰撞慢化和径向扩散之间的作用,由低杂 波在位置为半径r<sup>/</sup>处激发的快电子的径向扩散会引 起驱动电流在位置空间扩散,其关系式为<sup>[5]</sup>

$$J(r) = \int \eta(r, r') W_a(r') dr', \qquad (3)$$

式中 r(r, r')为与非局域驱动效率相关的核函数,  $W_a(r')$ 为低杂波在半径r'处沉积的能量.(3)式可 以定性说明:由于朗道阻尼作用,低杂波的功率沉积 在某一位置 r',于是在该位置驱动一定数量的快电 子,但是由于快电子的径向扩散作用,部分快电子会 扩散到别的位置 r,从而在功率沉积以外的位置 r处 形成一定的等离子体电流.

考虑快电子的径向扩散时,我们采用一种简化

<sup>\*</sup>国家自然科学基金(批准号:19985005)资助的课题.

#### 2. 准线性扩散系数

由于波与粒子的相互作用,射频波的存在导致 粒子分布在速度空间扩散,从而引起电子的分布函 数发生变化.求解二维 Fokker-Planck 方程,要考虑波 对分布函数的改变,必须先求出射频波引起的准线 性扩散系数.为简单起见,忽略 Shafranov 位移,仅以 r表示磁通面.考虑在 $n_{\parallel}^{0}$ 和 $n_{\parallel}^{0} + \Delta n_{\parallel}^{0}$ ( $n_{\perp} = 0$ )区 间内( $n_{\parallel}^{0}$ 为初始平行折射率, $\Delta n_{\parallel}^{0}$ 为平行折射率的 变化量, $n_{\perp}$ 为垂直折射率),一定数量的波功率  $\Delta P$ ( $n_{\parallel}^{0}$ ),在横截面为 $\sigma$ 的管内,以变化的群速度  $V_{g}$ 传 播.在这个管子里,总的传播的能量密度 $\Delta W(n_{\parallel})$  $=\Delta P(n_{\parallel})$ [ $\sigma V_{g}$ ]可以表示为与振荡等离子体相干 运动相关的静电能量密度和动能密度的总和,其结 果为<sup>[6]</sup>

$$\Delta W(n_{\parallel}) = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega d_0) |\Delta E(\mathbf{r}, n_{\parallel}, t)|^2 ,$$
(4)

式中  $d_0 = D_0(\mathbf{r}, n_{//}, \omega)(n_{\perp}^2 + n_{//}^2)$ 为介电常量,  $D_0$  为色散关系的实部 ,  $\omega$  为波的角频率  $\frac{1}{8\pi} |\Delta E(\mathbf{r}, n_{//}, t)|^2$  为静电能量密度.

存在强磁场时, 管子里某一点 r 处的平行扩散 系数可以表示为<sup>[7]</sup>

$$\Delta D_{\mathrm{rf}}(\mathbf{r} \ \nu_{//} \ \mathbf{n}_{//}^{0}) = \frac{8\pi^{2} e^{2}}{m_{\mathrm{e}}^{2}} \frac{k_{//}^{2}}{k^{2}} \frac{\Delta W(n_{//})}{\Im(\omega d_{0}) \Im \omega} \Im(\omega - k_{//} \ \nu_{//}).$$
(5)

考虑一个差分体积  $\Delta V(r)$ ,其所在位置为 r, 假设波包能流沿射线是无扩散的,则由该束低杂波 引起的  $\Delta V(r)$ 内一个普通电子在速度空间的准线 性扩散系数为

 $\Delta D_{\rm n} (r \, \nu_{//} \, n_{//}^0)$ 

$$=\frac{8\pi^{2}e^{2}}{m_{e}^{2}}\frac{1}{\Delta W(r)}\sum_{n}\int_{l_{n}}^{l_{n}+\Delta l_{n}}\delta(\omega-k_{//}^{n}\upsilon_{//})\frac{k_{//}^{2}}{k^{2}}\frac{\Delta P_{n}}{\partial(\omega d_{0})_{n}/\partial\omega}dt,$$
(6)

式中积分利用射线方程的数值解<sup>11</sup>,每个波束从边 缘入射时的能量由 Brambilla 谱决定.(6)式是某个 波束对准线性扩散系数的贡献.由于在计算射线轨 迹时,将整个波谱分割成若干个波束,因此,在求解 整个波谱对准线性扩散系数的贡献时,必须将所有 波束的贡献进行代数求和<sup>7</sup>(忽略波束之间的相互 影响).于是,得到低杂波引起的电子在速度空间的 准线性扩散系数为

$$D_{\mathbf{n}}(\mathbf{r} v_{\parallel}) = \sum_{k} \Delta \boldsymbol{D}_{\mathbf{n}}(\mathbf{r} v_{\parallel} n_{\parallel}^{0}). \quad (7)$$

将计算得到的准线性扩散系数代入二维 Fokker-Planek 方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left( D_{\rm rf} \frac{\partial}{\partial v} f \right) + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\rm c} , \qquad (8)$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_c$ 为 Fokker-Planck 碰撞项.

### 3. 二维 Fokker-Planck 方程的计算

为了求解电子的分布函数,球坐标系下的 Fokker-Planck 方程可写为<sup>[28]</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} = n_0 \Gamma \left\{ \frac{2}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( Af + B \frac{\partial f}{\partial v} + C \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{v^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( Df + E \frac{\partial f}{\partial v} + F \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \right\} , (9)$$

式中  $\Gamma = 4\pi Z^4 e^4 / m^2$ , Z 为核电荷数, e 为电子的电量, m 为粒子的质量系数A, B, C, D, E, F 包括碰撞项和射频项的贡献. 对(8)式中的射频项进行坐标变换,并运用待定系数法,得到准线性扩散效应对各系数的贡献分别为

$$\begin{aligned} A'_{\alpha} &= D'_{\alpha} &= 0 , \\ B'_{\alpha} &= D_{r} (r \, \nu \mu \,) \nu^2 \cos^2 \theta , \\ C'_{\alpha} &= - \, D_{r} (r \, \nu \mu \,) \nu \sin \theta \cos \theta , \\ E'_{\alpha} &= - \, D_{r} (r \, \nu \mu \,) \nu \sin^2 \theta \cos \theta , \\ F'_{\alpha} &= - \, D_{r} (r \, \nu \mu \,) \sin^3 \theta . \end{aligned}$$

求解得到电子的分布函数 ƒ( υ ,θ ,t ) 经过变换后得 到 ƒ( υ<sub>//</sub> ,r ,t ) 根据

$$J_{\mathbf{r}}(\mathbf{r},\mathbf{t}) = - e n_{e} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v}_{\parallel},\mathbf{r},\mathbf{t}) \mathbf{v}_{\parallel} \, \mathrm{d}\mathbf{v}_{\parallel} / \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{v}_{\parallel},\mathbf{r},\mathbf{t}) \mathrm{d}\mathbf{v}_{\parallel} , \qquad (10)$$

可以得到驱动电流的大小.

### 4. 计算结果与分析

运用上述方法,在 HT-7 典型的等离子体和低杂 波的参数下,

$$\begin{split} R &= 122 {\rm cm} , \quad a &= 28.5 {\rm cm} , \\ I_{\rm p} &= 150 {\rm kA} , \quad B_t &= 2.0 {\rm T} , \\ n_{e0} &= 1.5 \times 10^{13} {\rm cm}^{-3} , \quad n_{ea} &= 0.5 \times 10^{12} {\rm cm}^{-3} , \\ T_{e0} &= 1.0 {\rm keV} , \quad T_{ea} &= 60 {\rm eV} , \\ T_{10} &= 0.8 {\rm keV} , \quad T_{ia} &= 40 {\rm eV} , \\ P_{\rm rf} &= 350 {\rm kW} , \quad f &= 2.45 {\rm GHz} , \end{split}$$

式中 R 和 a 分别为托卡马克大半径和小半径  $,I_p$  为 等离子体电流  $,B_1$  为纵场  $,n_o$ 和  $n_a$ 分别为中心和边 缘的等离子体密度  $,T_o$ 和  $T_a$ 分别为中心和边缘的 电子温度  $,T_0$ 和  $T_i$ 分别为中心和边缘的离子温度 ,  $P_{t}$ 为低杂波功率 ,f 为低杂波频率 . 计算得到一定平 行折射率情况下的低杂波射线轨迹(图 1 )和平行折 射率沿径向的变化(图 2 ).



图 1 低杂波射线轨迹( $n_{//}^0 = 2.9$ ) r为径向位置,a为托卡马 克小半径



图 2 平行折射率沿径向的变化( $n_{M}^{0}$  = 2.9) r 为径向位置,  $N_{//}$ 为波束传播过程中的平行折射率, $n_{c0}$  = 1.5×10<sup>13</sup> cm<sup>-3</sup>, $T_{c0}$  = 1.0keV, $B_{1}$  = 2.0T

图 3 和图 4 分别给出不同子波导间相位差时的 低杂波功率沉积分布和驱动电流分布.从计算结果 可以看出,当子波导间的相位差在 ΔΦ = 130°左右 时,低杂波驱动电流的效率(η<sub>CD</sub>)最高,实验结果(图 5)也证实了这一结论,这主要是由于波的可近性条 件和波的相速度的大小决定的.在一定的纵向磁场、 等离子体密度、电子温度下,低杂波的传播及吸收主 要由平行折射率的大小决定的,而平行折射率的大 小与低杂波天馈系统子波导的相位差密切相关.如 果平行折射率太小,不满足波的可近性条件,波就不 能到达等离子体中心.如果平行折射率太大,则由于 与外围的电子发生作用而将能量沉积在外围,从而 使得平行折射率在一定的范围内驱动效果最好.



图 3 不同相位角时的功率沉积分布 r 为径向位置, P<sub>rf</sub> = 350kW, 其余参量同图 2



图 4 不同相位角时的驱动电流分布 r 为径向位置  $,I_{rf}$ 为波 驱动的等离子体电流  $P_{rf} = 350 \text{kW}$ ,其余参量同图 2

驱动电流的分布以及总的驱动电流的大小随时 间的演化关系分别如图 6 和图 7 所示.从驱动电流 随时间的演化关系可以看到,在低杂波投入以后,驱



图 5 驱动效率与相位角之间的关系(HT-7 实验结果 )  $n_e$  为 弦平均等离子体密度  $n_e = 1.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  ( ■ )  $2.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ ( ● )  $2.5 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  ( ▲ )

动电流开始增加很快,随后逐渐减小,约经过 150ms 以后,驱动电流达到饱和.在低杂波驱动实验过程 中,驱动电流的变化由快电子分布的变化引起,硬 x 射线随时间的演化关系即反映了快电子的分布随时 间的演化关系,如果硬 x 射线达到饱和,则说明快电 子的分布达到一种稳态,即驱动电流到达最大值.图 8 给出 HT-7 托卡马克 LHCD 实验过程中硬 x 射线 (中心道硬 x 射线强度与所有道硬 x 射线强度总和 之比,随时间的演化关系.由图 8 发现,当  $\Delta \Phi = 110^{\circ}$ (炮号 39095)时 约经过 120ms 以后,硬 x 射线辐射 几乎达到饱和状态,即快电子的分布趋于稳定;当  $\Delta \Phi = 150^{\circ}$ (炮号 39097)时,约经过 200ms 以后才达 到饱和状态.由此可见,模拟计算得到的驱动电流随 时间的演化关系与实验上的趋势基本一致.



图 6 驱动电流分布随时间的演化关系



图 7 驱动电流的大小随时间的演化关系  $P_{\rm rf} = 350 {\rm kW}$ , 其余参量同图 2



图 8 LHCD 过程中硬 x 射线强度随时间的演化关系( HT-7 实验结果 ) 硬 x 射线强度因子是指中心道硬 x 射线强度与所有 道硬 x 射线强度总和之比

#### 5. 快电子的径向扩散

以上讨论了不考虑快电子的径向扩散效应时的 低杂波驱动电流,本节将给出快电子的径向扩散效 应对驱动电流的影响.

低杂波与等离子体中的电子发生朗道共振阻尼 作用以后,波驱动出快电子,而这些快电子在碰撞慢 化的同时,还存在径向扩散,从而引起驱动电流的径 向扩散.

考虑快电子的径向扩散后,根据方程(8),电子 分布函数的 Fokker-Planck 方程可写成<sup>[9]</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v} \left( D_{\rm rf} \frac{\partial}{\partial v} f \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( vvf \right) \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rD_{\rm fast} \frac{\partial f}{\partial r} \right) , \qquad (11)$$

式中等号右边第一项为准线性射频源,第二项

 $\frac{\partial}{\partial v}(vvf) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{e}$ 即碰撞慢化项, v为电子碰撞频 率, 第三项为径向扩散项.

由于快电子的径向扩散系数对电子速度很不敏 感,故可假设 D<sub>fast</sub>与速度无关<sup>[9]</sup>,在方程(11)等号两 边同时乘以(-ev),并对速度积分,则得到

$$\frac{\partial J}{\partial t} = -e \int D_{\rm rf} \frac{\partial f}{\partial v} dv - e \int v v f dv + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D_{\rm fast} \frac{\partial J}{\partial r} \right).$$
(12)

既然模拟计算时间远大于慢化时间,考虑到驱动电 流的动态平衡,则可令 ∂J/∂t = 0.由于波驱动的携 带电流的快电子速度变化范围不大,则近似认为 ν 与速度无关,于是

$$- e \int v \upsilon f \mathrm{d}\upsilon = - e \nu \int \upsilon f \mathrm{d}\upsilon = - \nu J. \qquad (13)$$

至于射频源项,其单位为(电流密度/时间),据此,可 令

$$- e \int D_{\rm ff} \frac{\partial f}{\partial v} dv = \nu' J_0 , \qquad (14)$$

式中  $\nu'$ 为时间因子(待定), $J_0$ 为未考虑径向扩散时 波驱动的电流密度.若不存在径向扩散时(即 $D_{fast} = 0$ )则 $J = J_0$ ,而由方程(12),得

$$\nu' J_0 - \nu J_0 = 0$$
, (15)  
可得到  $\nu' = \nu$ ,于是方程(12)可写成电流的扩散  
程<sup>10]</sup>

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r D_{\text{fast}} \frac{\partial J}{\partial r} \right) + \mathcal{I} \left( J_0 - J \right) = 0 , \quad (16)$$

式中

即

方

$$\nu = \nu (r) = \ln \lambda \frac{n_{\rm e} (r) e^4}{4\pi \varepsilon_0^2 m_{\rm e}^2 c^3} \times n_{\rm H}^3$$
,

 $ln\lambda$  为库仑势,  $ε_0$  为自由空间的介电常量.为方便起 见 取  $n_e(r)$ 为抛物线分布,  $n_{//}$ 取功率谱峰值在功 率沉积最大处对应的平行折射率, 根据粒子约束时 间与径向扩散系数之间的关系, 假设  $D_{fast} = a^2$  (5.8 ×  $τ_d$ ), 即  $D_{fast}$ 与位置 r 无关, 于是方程(16)便可写 成

$$D_{\text{fast}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial J}{\partial r} \right) + \nu \left( J_0 - J \right) = 0. \quad (17)$$

用数值法解微分方程(17),并取边界条件:

$$\frac{\partial J}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 ,$$

$$J \mid_{r=a} = 0 , \qquad (18)$$

即可得到扩散后驱动电流的分布.

## 6. 考虑径向扩散前后计算结果的比较

为了说明径向扩散效应对驱动电流分布的影响 在考虑扩散前后对 HT-7 低杂波驱动电流进行了 模拟计算(HT-7 典型的等离子体参数和低杂波参数 如前).

根据 HT-7 的实验结果,可估算快电子的约束时 间为  $\tau_{d} \approx 30 \text{ms} \cong \Delta \Phi = 130^{\circ}$ 时,其功率沉积分布如 图 9 所示 扩散前后的驱动电流分布如图 10 所示. 扩散前的驱动电流为 136kA,扩散后的驱动电流为 105kA.

比较图 9 和图 10,可看出未考虑快电子的径向 扩散时,驱动电流和功率沉积的位置一一对应,即只 有在功率沉积的地方才会有驱动电流,这种驱动电 流是局域性的.但是,考虑快电子的径向扩散后,驱 动电流变成非局域性的,电流密度的分布展宽变平, 驱动电流减小,驱动效率降低.



图 9 功率沉积分布 r 为径向位置, I<sub>p</sub> = 150kA, P<sub>rf</sub> = 350kW, 其余参量同图 2



图 10 扩散前后的驱动电流分布 r 为径向位置, I<sub>rt</sub>为波 驱动的等离子体电流 驱动电流的减小可以用简单的物理图像来描述.对于典型的密度和温度分布,携带电流的高能电子向外扩散的数目将比向内扩散的多,由于电子与离子的库仑碰撞正比于 n<sub>e</sub>/T<sup>3/2</sup><sub>e</sub>,一个以速度 v 向外 漂移的电子将运动到一个碰撞增多的区域而迅速慢 化,从而导致驱动效率下降.同时,横越边界的损失 也将使驱动电流减小,高能电子的扩散使得无电流 (直接由波驱动的快电子)的区域得到一定的电流, 从而将整个区域的电流分布拉平.

#### 7.结 论

通过数值模拟计算,得到了 HT-7 托卡马克低杂 波驱动电流的空间分布及其随时间的演化,当子波 导间的相位差在 130°左右时,低杂波驱动效果最好; 从驱动电流随时间的演化关系可以看到,在低杂波 投入以后,驱动电流开始增加很快,随后逐渐减小, 直至驱动电流达到饱和.模拟结果与实验结果基本 一致,模拟结果为解释实验结果提供了有力的佐证, 为 HT-7 低杂波实验提供了一定的理论指导.同时, 考虑扩散以后,驱动电流变成非局域性的,电流密度 的分布展宽变平,驱动电流减小,驱动效率降低.所 以在实验中应尽量优化有关实验参数,如尽可能地 控制磁场的涨落,以减小快电子的径向扩散效应,从 而提高低杂波的驱动效率.

感谢方瑜德研究员的有益讨论.

- [1] Xiang N and Yu G Y 1993 Acta Phys. Sin. 42 679(in Chinese)
   [项 农、俞国扬 1993 物理学报 42 679]
- [2] McCoy M G et al 1981 Comput. Phys. Commun. 24 37
- [3] Mynick H E et al 1981 Phys. Fluids 24 695
- [4] O'Brien M R et al 1991 Nucl. Fusion 31 583
- [5] Rax J M et al 1989 Nucl. Fusion 29 1751
- [6] Stix T H 1962 The Theory of Plasma Waves (New York : McGraw Hill )
- [7] Bonoli P T et al 1986 Phys. Fluids 29 2937

- [8] Zhu X G et al 1998 Acta Phys. Sin. 47 1137 in Chinese [] 朱学光 等 1998 物理学报 47 1137 ]
- [9] Ignat D W et al 1994 Nucl. Fusion 34 837
- [10] Ignat D W et al Rep. PPPL-3158/UC-420
- [11] Xu J L et al 1981 Plasma Physics (Beijing: Atomic Energy Press) p580 (in Chinese) [徐家鸾等 1981 等离子体物理学(北京:原 子能出版社)第 580页]
- [12] Press W H et al 1989 Numerical Recipes in Fortran (Cambridge: Cambridge University Press) p40

## Simulation of lower hybrid current drive\*

Ding Bo-Jiang Kuang Guang-Li Liu Yue-Xiu Shen Wei-Ci Yu Jia-Wen Shi Yue-Jiang

(Institute of Plasma Physics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China)

(Received 18 December 2001; revised manuscript received 27 January 2002)

#### Abstract

Resolving the two-dimensional Fokker-Planck equation, evolutions of the driven current and its profile on HT-7 tokamak are obtained. The simulated results are nearly in agreement with the experimental data, which supplies a theoretical guidance for lower hybrid current drive (LHCD) experiments on HT-7 tokamak. In addition, the effect of radial diffusion of fast electrons on the driven current during LHCD is considered by means of solving the current diffusion equation.

Keywords : LHCD , simulation , radial diffusion PACC : 5250 , 5265 , 5240D

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China, Grant No. 19985005 ).