第 51 卷 第 11 期 2002 年 11 月
1000-3290/2002/51(11)/2661-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.11,November,2002

直线加速运动动态黑洞的熵*

贺 晗　赵 峥
(北京师范大学物理系,北京 100875)
(2001 年 5 月 5 日收到;2002 年 4 月 23 日收到修改稿)

选取超前爱丁顿坐标,采用薄膜 brick-wall 模型,计算 Kinnersley 度规表述的直线加速运动动态黑洞的熵.通过此方法,可以给出视界面上每一点的温度和熵密度.这一结果表明,熵与视界面积成正比的结论,不仅适用于整个视界,也适用于视界面上的局部;不仅适用于稳态黑洞,也适用于动态黑洞.在薄膜趋于视界面时,其厚度也趋于零,薄膜本身成为视界面,黑洞熵就是视界面上量子态的熵.

关键词:熵,加速黑洞,薄膜 brick-wall 模型
PACC:9760L,0420

1. 引　　言

自从 Bekenstein 提出黑洞熵与黑洞面积成正比的建议以来,有关研究取得了很大进展[1—3].'t Hooft 的 brick-wall 模型对黑洞熵的起源给出了一种统计解释[4].最近的一些工作把 brick-wall 模型进一步发展为薄膜 brick-wall 模型[5,6].本文采用薄膜 brick-wall 模型计算加速直线运动动态黑洞的熵.

Kinnersley 讨论过作任意加速运动的点质量的时空[7].本文采用的度规是直线加速的简单情况,加速度的方向不变,但加速度的大小和黑洞的质量会随时间发生变化.由于黑洞的加速运动,时空具有轴对称性,轴向就是加速度的方向.与稳态黑洞不同,加速黑洞的时空是动态的,视界面上的不同点可能具有不同的温度.本文使用赵峥和戴宪新提出的方法[8],逐点给出了视界面上温度的表达式.在这种情况下,时空不再具有整体的热平衡,用常规 brick-wall 模型计算加速黑洞的熵遇到了困难.我们采用的薄膜 brick-wall 模型只需要局部的热平衡[5,6],克服了这一困难,得到了熵与视界面积成正比的结论.

2. 变加速直线运动黑洞的时空线元

Kinnersley 给出的作任意加速运动的点质量的时空线元为[7]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& \left[1-2ar\cos\theta-r^2(f^2+h^2\sin^2\theta)-2Mr^{-1}\right]\mathrm{d}u^2\\&+2\mathrm{d}u\mathrm{d}r+2r^2f\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta+2r^2h\sin^2\theta\mathrm{d}u\mathrm{d}\varphi\\&-r^2\mathrm{d}\theta^2-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned}\tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}f&=-a(u)\sin\theta+b(u)\sin\varphi+c(u)\cos\varphi,\\h&=b(u)\cot\theta\cos\varphi-c(u)\cot\theta\sin\varphi,\end{aligned}\tag{2}$$

a,b,c 和 M 均为滞后 Eddington 坐标 u 的任意函数,a 为加速度的大小,b 和 c 描述加速度方向的改变率.对于直线加速的情况,有 $b=c=0$.时空线元化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& (1-2ar\cos\theta-r^2f^2-2Mr^{-1})\mathrm{d}u^2\\&+2\mathrm{d}u\mathrm{d}r+2r^2f\mathrm{d}u\mathrm{d}\theta-r^2\mathrm{d}\theta^2-r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned}\tag{3}$$

其中

$$f=-a(u)\sin\theta.\tag{4}$$

用超前 Eddington 坐标 v 取代滞后 Eddington 坐标 u,并采用(−,+,+,+)号差,线元化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 =& -(1-2ar\cos\theta-r^2a^2\sin^2\theta-2Mr^{-1})\mathrm{d}v^2\\&+2\mathrm{d}v\mathrm{d}r-2r^2a\sin\theta\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned}\tag{5}$$

时空具有轴对称性,$\theta=0$ 指向加速度的方向.度规的行列式为

$$g=-r^4\sin^2\theta,\tag{6}$$

* 国家自然科学基金(批准号:10073002)和国家教育部博士点基金(批准号:96002701)资助的课题.

度规的非零逆变分量为

$$
\begin{aligned}
g^{01} &= g^{10} = 1,\\
g^{11} &= 1 - 2ar\cos\theta - 2Mr^{-1},\\
g^{12} &= g^{21} = a\sin\theta,\\
g^{22} &= r^{-2},\\
g^{33} &= r^{-2}\sin^{-2}\theta .
\end{aligned} \tag{7}
$$

现在来寻找由(5)式描述的时空的局部事件视界.考虑到时空的轴对称性,事件视界的曲面方程可以写成

$$
H = H(v,r,\theta) = 0 \qquad \text{或} \qquad r = r(v,\theta). \tag{8}
$$

(8)式应该满足零曲面条件

$$
g^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial H}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{9}
$$

把(7)式代入(9)式,得

$$
2\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial r} + \left(1 - 2ar\cos\theta - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2 + 2a\sin\theta\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)^2 = 0. \tag{10}
$$

从(8)式可得

$$
\frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial v} = 0. \tag{11}
$$

把(11)式代入(10)式,得

$$
-2\dot{r}_{\mathrm{H}} + \left(1 - 2ar_{\mathrm{H}}\cos\theta - \frac{2M}{r_{\mathrm{H}}}\right) - (2a\sin\theta)r'_{\mathrm{H}} + \frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{r^2_{\mathrm{H}}} = 0, \tag{12}
$$

其中

$$
\dot{r}_{\mathrm{H}} = \left(\frac{\partial r}{\partial v}\right)_{r=r_{\mathrm{H}}}, \quad r'_{\mathrm{H}} = \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)_{r=r_{\mathrm{H}}}. \tag{13}
$$

满足(12)式的曲面 r_{H} 就是变加速直线运动黑洞的事件视界.

3. 黑洞的温度

本文使用文献[8]提出的一种新方法来研究黑洞视界面上的温度.用这种方法研究黑洞的热效应,计算简单、精确,适用于各种动态黑洞,包括非球对称和非渐进平直黑洞.

这种计算温度的方法基于 Damour-Ruffini 的方案[9].该方法的关键是,在乌龟坐标下,粒子的 Klein-Gordon 方程的径向部分在视界附近均能化成波动方程的标准形式

$$
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2} + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial v \partial r_*} = 0. \tag{14}
$$

这意味着在乌龟坐标下,黑洞的二维线元在视界面附近显式共形于 Minkowski 时空.可以把参数 κ 作为未知量引入乌龟坐标,要求 Klein-Gordon 方程在视界面附近化成形如(14)式的标准形式,从而定出参数 κ.(14)式表明 κ 会在热谱中出现,并且正比于辐射的温度,这样就可以得出黑洞的温度.

由(12)式可知,视界位置 r_{H} 是 v 和 θ 的函数.乌龟坐标变换可以写成[8]

$$
\begin{aligned}
r_* &= r + \frac{1}{2\kappa(v_0,\theta_0)}\ln[r - r_{\mathrm{H}}(v,\theta)],\\
v_* &= v - v_0, \quad \theta_* = \theta - \theta_0,
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中 κ, v_0, θ_0 为任意固定参数,在乌龟坐标变换下不变.

从(15)式可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial}{\partial r_*},\\
\frac{\partial}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v_*} - \frac{\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial r_*},\\
\frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta_*} - \frac{r'_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial}{\partial r_*};
\end{aligned} \tag{16}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]^2\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} - \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*},\\
\frac{\partial^2}{\partial v \partial r} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial^2}{\partial v_* \partial r_*} - \frac{\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{\dot{r}_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*},\\
\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} &= \left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial^2}{\partial \theta_* \partial r_*} - \frac{r'_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\left[1 + \frac{1}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\right]\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{r'_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*},\\
\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} &= \frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{[2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})]^2}\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta_*^2} - \frac{2r'_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})}\frac{\partial^2}{\partial r_* \partial \theta_*} - \frac{r'^2_{\mathrm{H}} + r''_{\mathrm{H}}(r - r_{\mathrm{H}})}{2\kappa(r - r_{\mathrm{H}})^2}\frac{\partial}{\partial r_*}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

把(6)和(7)式,(16)和(17)式代入 Klein-Gordon 方程

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\nu}}\right) - \mu^2\Phi = 0, \tag{18}
$$

整理后得 $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_*^2}$ 项的系数为

$$\frac{\left\{-2\dot{r}_{\mathrm{H}}+\left(1-2ar\cos\theta-\frac{2M}{r}\right)[2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})+1]-(2a\sin\theta)r'_{\mathrm{H}}\right\}r^2[2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})+1]+r'^2_{\mathrm{H}}}{2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})[2\kappa(r-r_{\mathrm{H}})+1]r^2}. \tag{19}$$

如果要求 Klein-Gordon 方程在视界面附近化为(14)式的标准形式，则当 $r\to r_{\mathrm{H}}(v_0,\theta_0)$，$v\to v_0$ 和 $\theta\to\theta_0$ 时，(19)式的极限必为 1. 从而可以导出 κ 的表达式为

$$\kappa=\frac{1}{2r_{\mathrm{H}}}\frac{\frac{M}{r_{\mathrm{H}}^2}-a\cos\theta-\frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{r_{\mathrm{H}}^3}}{\frac{M}{r_{\mathrm{H}}^2}+a\cos\theta+\frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{2r_{\mathrm{H}}^3}}. \tag{20}$$

使用 Damour-Ruffini 的方法[9]，可以得到黑洞的辐射温度为

$$T=\frac{\kappa}{2\pi}\quad 或 \quad \beta=\frac{2\pi}{\kappa}. \tag{21}$$

从(21)式可以看出黑洞的温度依赖于时间 v 和极角 θ.

4. 变加速直线运动黑洞的熵

't Hooft 提出的 brick-wall 模型，通过计算视界外部量子场的熵来得到黑洞的熵，已经成功用于多种类型的黑洞，得到了理想的结果. 这个模型要求系统处于整体热平衡状态，显然，这个条件对于动态的加速黑洞无法满足. 为了处理非热平衡的情况，我们采用了薄膜 brick-wall 模型[5,6]. 由于事件视界是黑洞的特征曲面，已经证明，视界的存在普遍导致 Hawking 效应，黑洞熵的计算也应该只与它的视界有关. 基于这一观点以及量子态密度在视界附近发散的事实，自然地在计算黑洞熵时只需要考虑视界外一个薄膜内的量子场. 由于计算只在薄膜内进行，不要求系统有整体的热平衡，最初的 brick-wall 模型在动态情况下的困难就不存在.

由于视界面上的温度不唯一，计算中首先在视界面的局部求单位面积上的熵，即视界面上每一点的熵密度，然后通过积分得到总熵.

前面已经得到直线加速黑洞的线元(见(5)式). 黑洞的视界面方程为

$$-2\dot{r}_{\mathrm{H}}+\left(1-2ar_{\mathrm{H}}\cos\theta-\frac{2M}{r_{\mathrm{H}}}\right)-(2a\sin\theta)r'_{\mathrm{H}}+\frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{r_{\mathrm{H}}^2}=0, \tag{22}$$

可以看出黑洞的无限红移面与事件视界并不一致. 我们希望找到一个新的坐标系，使得两个面重合起来，从而方便计算.

首先引入坐标变换[10,11]

$$R=r-r_{\mathrm{H}}(v,\theta),\quad \mathrm{d}R=\mathrm{d}r-\dot{r}_{\mathrm{H}}\mathrm{d}v-r'_{\mathrm{H}}\mathrm{d}\theta, \tag{23}$$

线元变为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2=&-(-2\dot{r}_{\mathrm{H}}+1-2ar\cos\theta-r^2a^2\sin^2\theta\\&-2Mr^{-1})\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R-2(r^2a\sin\theta-r'_{\mathrm{H}})\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta\\&+r^2\mathrm{d}\theta^2+r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2.\end{aligned} \tag{24}$$

把线元改写为如下形式：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=g_{00}\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R+2g_{02}\mathrm{d}v\mathrm{d}\theta+g_{22}\mathrm{d}\theta^2+g_{33}\mathrm{d}\varphi^2\\&=\left(g_{00}-\frac{g_{02}^2}{g_{22}}\right)\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R\\&\quad+\frac{g_{02}^2}{g_{22}}\left(\frac{g_{22}}{g_{02}}\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}v\right)^2+g_{33}\mathrm{d}\varphi^2,\end{aligned} \tag{25}$$

其中

$$\begin{aligned}g_{00}-\frac{g_{02}^2}{g_{22}}=&-\left[-2\dot{r}_{\mathrm{H}}+\left(1-2ar\cos\theta-\frac{2M}{r}\right)\right.\\&\left.-(2a\sin\theta)r'_{\mathrm{H}}+\frac{r'^2_{\mathrm{H}}}{r^2}\right].\end{aligned} \tag{26}$$

再引入一个坐标变换

$$\mathrm{d}\Theta=\frac{g_{22}}{g_{02}}\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}v, \tag{27}$$

线元可以形式上写成

$$\mathrm{d}s^2=\hat{g}_{00}\mathrm{d}v^2+2\mathrm{d}v\mathrm{d}R+\hat{g}_{22}\mathrm{d}\Theta^2+\hat{g}_{33}\mathrm{d}\varphi^2, \tag{28}$$

其中

$$\hat{g}_{00}=g_{00}-\frac{g_{02}^2}{g_{22}},\quad \hat{g}_{22}=\frac{g_{02}{}^2}{g_{22}},\quad \hat{g}_{33}=g_{33}, \tag{29}$$

$\hat{g}_{00}=0$ 即为黑洞的视界面方程. 以下关于熵的计算便是基于这一度规.

把度规的行列式及其逆变分量代入描述质量为 μ 的标量粒子的 Klein-Gordon 方程

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\frac{\partial\Phi}{\partial x^\nu}\right)=\mu^2\Phi. \tag{30}$$

方程的解可以写成如下形式[12,13]：

$$\Phi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(Ev - m\varphi)} G(R,\Theta), \tag{31}$$

其中

$$G(R,\Theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}S(R,\Theta)}. \tag{32}$$

使用 Wentzel-Kramers-Brillouin 近似，整理后可得

$$\hat{g}^{11} k_R^2 - 2Ek_R + \hat{g}^{22} k_\Theta^2 + m^2 \hat{g}^{33} + \mu^2 = 0, \tag{33}$$

其中

$$k_R = \frac{\partial S}{\partial R}, \quad k_\Theta = \frac{\partial S}{\partial \Theta}. \tag{34}$$

从(33)式可以得到 k_R 和 k_Θ 的关系

$$k_R^+ = \frac{E}{\hat{g}^{11}} + \frac{\sqrt{E^2 - \hat{g}^{11}(\hat{g}^{22} k_\Theta^2 + m^2 \hat{g}^{33} + \mu^2)}}{\hat{g}^{11}}, \tag{35}$$

$$k_R^- = \frac{E}{\hat{g}^{11}} - \frac{\sqrt{E^2 - \hat{g}^{11}(\hat{g}^{22} {k_\Theta}^2 + m^2 \hat{g}^{33} + \mu^2)}}{\hat{g}^{11}}. \tag{36}$$

根据量子统计理论，系统的自由能可以表示为

$$F = -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}E \, \frac{\Gamma(E)}{e^{\beta E} - 1}, \tag{37}$$

其中 $\Gamma(E)$为能量小于等于 E 的微观态的数目. 根据半经典量子化条件和薄膜 brick-wall 模型方法，有[4—6,11—13]

$$\begin{aligned}\Gamma(E) &= \frac{1}{4\pi^3}\int \mathrm{d}m \int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \int \mathrm{d}k_\Theta \\ &\quad\times \left(\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} k_R^+ \mathrm{d}R + \int_{\varepsilon+\delta}^{\varepsilon} k_R^- \mathrm{d}R\right) \\ &= \frac{1}{2\pi^3}\int \mathrm{d}m \int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \int \mathrm{d}k_\Theta \int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} \hat{\kappa}_R \mathrm{d}R,\end{aligned} \tag{38}$$

其中

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_R &= \frac{\sqrt{E^2 - \hat{g}^{11}(\hat{g}^{22} k_\Theta^2 + m^2 \hat{g}^{33} + \mu^2)}}{\hat{g}^{11}} \\ &= \left(\frac{\hat{g}^{22}}{\hat{g}^{11}}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{(E^2/\hat{g}^{11}) - \mu^2 - \hat{g}^{33} m^2}{\hat{g}^{22}} - k_\Theta^2}.\end{aligned} \tag{39}$$

视界上自由能的面密度可以表示为

$$\sigma_F = -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}E \, \frac{\sigma_\Gamma}{\mathrm{e}^{\beta E} - 1}, \tag{40}$$

σ_F 和 σ_Γ 定义为

$$F = \int \sigma_F \mathrm{d}A, \quad \Gamma = \int \sigma_\Gamma \mathrm{d}A, \tag{41}$$

其中

$$\begin{aligned}\mathrm{d}A &= \sqrt{\hat{g}_{22}\hat{g}_{33}} \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \\ &= (r_{\mathrm{H}}^2 a \sin\theta - r'_{\mathrm{H}}) \sin\theta \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{42}$$

对(38)式中的 k_Θ 进行积分，考虑到(39)式中根号下的部分

$$\frac{(E^2/\hat{g}^{11}) - \mu^2 - \hat{g}^{33} m^2}{\hat{g}^{22}} - k_\Theta^2 \geqslant 0, \tag{43}$$

由此限定了 k_Θ 的积分上下限，积分结果为

$$\begin{aligned}\Gamma(E) &= \frac{1}{4\pi^2}\int \mathrm{d}m \int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}^{11}\hat{g}^{22})^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad\times \left(\frac{E^2}{\hat{g}^{11}} - \mu^2 - \hat{g}^{33} m^2\right) \mathrm{d}R.\end{aligned} \tag{44}$$

再对 m 进行积分，(43)式要求

$$\frac{E^2}{\hat{g}^{11}} - \mu^2 - \hat{g}^{33} m^2 \geqslant 0, \tag{45}$$

由此限定了 m 的积分上限，积分过程中采用小质量近似，结果为

$$\begin{aligned}\Gamma(E) &= \frac{E^3}{6\pi^2}\int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}^{11})^{-2} (\hat{g}^{22}\hat{g}^{33})^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}R \\ &= \frac{E^3}{6\pi^2}\int \mathrm{d}\Theta \mathrm{d}\varphi \int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} (\hat{g}_{22}\hat{g}_{33})^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}R \\ &\approx \frac{E^3}{6\pi^2}\int \mathrm{d}A \int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R \\ &= \int \mathrm{d}A \, \frac{E^3}{6\pi^2}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R.\end{aligned} \tag{46}$$

对比(41)式，得 $\Gamma(E)$的面密度为

$$\sigma_\Gamma = \frac{E^3}{6\pi^2}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R, \tag{47}$$

自由能的面密度为

$$\begin{aligned}\sigma_F &= -\frac{1}{6\pi^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{d}E \, \frac{E^3}{\mathrm{e}^{\beta E} - 1}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R \\ &= -\frac{\pi^2}{90\beta^4}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R.\end{aligned} \tag{48}$$

由

$$S = \beta^2 \left.\frac{\partial F}{\partial \beta}\right|_{\beta = \beta_H}, \tag{49}$$

可得熵的面密度为

$$\sigma_S = \frac{4\pi^2}{90\beta_H^3}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} (\hat{g}_{00})^{-2} \mathrm{d}R. \tag{50}$$

由于 $\hat{g}_{00} = 0$ 为视界面方程，可以把 $\hat{g}_{00}$ 表示为

$$\hat{g}_{00} = f(v, r, \theta)(r - r_{\mathrm{H}}). \tag{51}$$

把(51)式代入(50)式，完成对 R 的积分，

$$\begin{aligned}\sigma_S &= \frac{4\pi^2}{90\beta_{\mathrm{H}}^3}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} \frac{1}{f^2 (r - r_{\mathrm{H}})^2} \mathrm{d}R \\ &\approx \frac{4\pi^2}{90\beta_{\mathrm{H}}^3 f_{\mathrm{H}}^2}\int_\varepsilon^{\varepsilon+\delta} \frac{1}{R^2} \mathrm{d}R \\ &= \frac{4\pi^2}{90\beta_{\mathrm{H}}^3 f_{\mathrm{H}}^2} \frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon + \delta)},\end{aligned} \tag{52}$$

其中 $f_H = f|_{r \to r_{\mathrm{H}}}$.

下面寻找 f_{H} 与 κ 的关系. 由(51)式可得

$$\left.\frac{\partial\hat{g}_{00}}{\partial r}\right|_{r\to r_{\rm H}}=f_{\rm H}.\tag{53}$$

由

$$\hat{g}_{00}=-\left[-2\dot{r}_{\rm H}+\left(1-2ar\cos\theta-\frac{2M}{r}\right)-(2a\sin\theta)r'_{\rm H}+\frac{r_{\rm H}'^2}{r^2}\right],\tag{54}$$

可得

$$\left.\frac{\partial\hat{g}_{00}}{\partial r}\right|_{r\to r_{\rm H}}=-2\left(\frac{M}{r_{\rm H}^2}-a\cos\theta-\frac{r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^3}\right),\tag{55}$$

于是有

$$\begin{aligned}f_{\rm H}&=-2\left(\frac{M}{r_{\rm H}^2}-a\cos\theta-\frac{r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^3}\right)\\&=-2\kappa\left(\frac{2M}{r_{\rm H}}+2ar_{\rm H}\cos\theta+\frac{r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^2}\right)\\&=-2\kappa\left(1-2\dot{r}_{\rm H}-2ar'_{\rm H}\sin\theta+\frac{2r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^2}\right),\end{aligned}\tag{56}$$

其中用到了(20)和(12)式.

把(56)式代入(52)式,可得

$$\sigma_S=\frac{4\pi^2}{90\beta_H^3}\times\frac{1}{\left[\kappa\left(1-2\dot{r}_{\rm H}-2ar'_{\rm H}\sin\theta+\frac{2r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^2}\right)\right]^2}\times\frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon+\delta)}\frac{1}{4}.\tag{57}$$

把 $\beta_{\rm H}=\frac{2\pi}{\kappa}$ 代入(57)式,可得

$$\sigma_S=\frac{1}{90\beta_{\rm H}\left(1-2\dot{r}_{\rm H}-2ar'_{\rm H}\sin\theta+\frac{2r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^2}\right)^2}\times\frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon+\delta)}\frac{1}{4}.\tag{58}$$

选择合适的截断因子 ε 和薄膜的厚度 δ,使得满足

$$\frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon+\delta)}=90\beta_{\rm H}\left(1-2\dot{r}_{\rm H}-2ar'_{\rm H}\sin\theta+\frac{2r_{\rm H}'^2}{r_{\rm H}^2}\right)^2=P,\tag{59}$$

熵的面密度进一步化简为

$$\sigma_S=\frac{1}{4},\tag{60}$$

黑洞的总熵

$$S=\int\sigma_S\,{\rm d}A=\frac{1}{4}A_{\rm H}.\tag{61}$$

5. 结论与讨论

本文采用薄膜 brick-wall 模型,研究了变加速直线运动黑洞的熵.通过简化 Kinnersley 的线元,得到了以超前 Eddington 坐标描述的直线加速运动黑洞的度规.黑洞的加速度方向不变,但加速度的大小以及黑洞的质量都随时间变化.由于黑洞作加速运动,视界面不再是球面,但具有轴对称性.我们采用一种新的方法得出了黑洞视界面上每一点的温度,温度是 θ 的函数,并且会随时间发生变化.由于整体的热平衡不再满足,我们采用改进后的薄膜 brick-wall 模型计算黑洞的熵,使用这一模型只需要局部的热平衡.首先计算出视界上每一点的熵密度,然后通过面积分得到系统的总熵.得到的每一点的熵密度为 1/4.这一结果表明,黑洞熵与面积成正比的结论,不仅适用于整个视界,也适用于视界面上的局部;不仅适用于稳态黑洞,也适用于动态黑洞.

我们认为,黑洞熵就是视界面上的量子态的熵[14],从薄膜 brick-wall 模型很容易理解这一点.由(59)式可得

$$\delta=\frac{P\varepsilon^2}{1-P\varepsilon}.\tag{62}$$

这表明只要薄膜厚度 δ 与薄膜到视界的距离 ε 满足上述关系,都可以得到(60)式.利用(62)式不难得出

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\delta}{\varepsilon(\varepsilon+\delta)}&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\frac{P\varepsilon^2}{1-P\varepsilon}}{\varepsilon\left[\varepsilon+\frac{P\varepsilon^2}{1-P\varepsilon}\right]}\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\frac{P}{1-P\varepsilon}}{1+\frac{P\varepsilon}{1-P\varepsilon}}=P.\end{aligned}\tag{63}$$

这表明只要适当选择薄膜厚度 δ 与距离 ε 的关系,就可以在薄膜趋于视界面时,使其厚度趋于零,同时得到(60)式所示的熵密度.薄膜本身成为了视界面,薄膜的熵就是视界面的熵.由此可知,黑洞熵的确可以看作视界面上量子态的熵.

[1] Bekenstein J D 1973 *Phys*. *Rev*. D **7** 2333

[2] Hawking S W 1975 *Commun*. *Math*. *Phys*. **43** 199

[3] Gibbons G W and Hawking S W 1977 *Phys. Rev.* D **15** 2752
[4] 't Hooft G 1985 *Nucl. Phys.* B **256** 727
[5] Li X and Zhao Z 2000 *Int. J. Theor. Phys.* **39** 2079
[6] Liu W B and Zhao Z 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 310
[7] Kinnersley W 1969 *Phys. Rev.* **186** 1335
[8] Zhao Z and Dai X X 1992 *Mod. Phys. Lett.* A **7** 1771
[9] Damour T and Ruffini R 1976 *Phys. Rev.* D **14** 332
[10] Li Z H and Zhao Z 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1273 (in Chinese) [黎忠恒、赵 峥 1997 物理学报 **46** 1273]
[11] Li X and Zhao Z 2000 *Phys. Rev.* D **62** 104001
[12] Lee M H and Kim J K 1996 *Phys. Rev.* D **54** 3904
[13] Ho J, Kim W T, Park Y J and Shin H 1997 *Class. Quantum Grav.* **14** 2617
[14] Li X and Zhao Z 2000 *Mod. Phys. Lett.* A **15** 1739

Entropy of the straightly accelerating non-stationary black hole*

He Han Zhao Zheng
(*Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing* 100875, *China*)
(Received 5 May 2001; revised manuscript received 23 April 2002)

Abstract

Selecting the advanced Eddington coordinates and adopting the thin film brick-wall model, we calculate the entropy of the straightly accelerating non-stationary black hole expressed by Kinnersley metric. The approach used in this paper can give temperature and the surface density of entropy at every point on the horizon. This result indicates that the conclusion that black hole entropy is proportional to its area can be applied to horizon not only globally, but also locally. The above conclusion is valid not only for stationary black holes, but also for non-stationary black holes. When the thin film approaches the horizon, the thickness of it also becomes zero and itself becomes the horizon. The black hole entropy is just identified with the entropy of the quantum field on the event horizon.

Keywords: entropy, accelerating black hole, thin film brick-wall model
PACC: 9760L, 0420

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10073002), and the Doctorate Foundation of the Ministry of Education of China (Grant No. 96002701).