第 51 卷 第 12 期 2002 年 12 月
1000-3290/2002/51(12)/2683-07

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.12, December, 2002

相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性*

傅景礼[1)2)] 陈立群[1)] 薛 纭[1)] 罗绍凯[3)]

[1)] (上海大学上海市应用数学和力学研究所，上海 200072)

[2)] (商丘师范学院数学力学和数学物理研究所，商丘 476000)

[3)] (长沙大学数学力学和数学物理研究所，长沙 410003)

(2002 年 4 月 6 日收到；2002 年 5 月 7 日收到修改稿)

研究相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性.给出相对论 Birkhoff 自治系统、半自治系统和非自治系统的平衡方程、受扰运动方程和一次近似方程;给出判定平衡稳定性的一次近似方法及其判据;讨论相对论 Birkhoff 系统平衡稳定性和经典 Birkhoff 系统平衡稳定性的关系.给出实例以说明方法的应用.

关键词：相对论，Birkhoff 系统，平衡稳定性，一次近似方法

PACC：0316，0412

1. 引 言

Birkhoff 系统动力学的研究始于 Birkhoff 的工作[1]，Santilli 考虑时间变量，给出了 Birkhoff 方程的一般形式，成功的研究了完整系统的动力学问题[2]，梅凤翔应用 Birkhoff 方程系统地研究了非完整系统的动力学问题，构筑了 Birkhoff 系统动力学的理论框架[3]，使 Birkhoff 系统动力学的研究取得了一系列重要结果[4—9].近年来相对论分析力学[10—12]、转动相对论力学[13—16]和转动相对论分析力学[17—20]的研究，使爱因斯坦建立的相对论力学取得了进展.文献[21—29]已将 Birkhoff 系统动力学的研究从经典研究领域推广到高速运动的相对论研究领域，给出了相对论 Birkhoff 系统的 Pfaff-Birkhoff 原理，Birkhoff 方程，代数结构，Poisson 理论以及对称性理论.本文研究相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性.

2. 相对论 Birkhoff 系统的运动方程

利用相对论性 Pfaff-Birkhoff 原理[9]可得到相对论性 Birkhoff 方程的一般形式为

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\left(\frac{\partial \tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\mu}}{\partial t}\right)=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{1}$$

式中

$$\tilde{B}^{\cdot}=\tilde{B}^{\cdot}(t,\boldsymbol{a})=\tilde{B}^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})$$

$$\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}=\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}(t,\boldsymbol{a})=\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n;i=1,\cdots,N),\tag{2}$$

称为相对论性 Birkhoff 函数和相对论性 Birkhoff 函数组，而 $(m_i(t,\boldsymbol{a})=m_{0i}/\sqrt{1-(\dot{r}_i)^2(t,\boldsymbol{a})/c^2}$ 称为相对论性质量，则有

$$\frac{\partial \tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}=\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\mu}},$$

$$\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\nu}}{\partial a^{\mu}}=\frac{\partial R^{\cdot}_{\nu}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R^{\cdot}_{\nu}}{\partial a^{\mu}},$$

$$\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\nu}}{\partial t}=\frac{\partial R^{\cdot}_{\nu}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}+\frac{\partial R^{\cdot}_{\nu}}{\partial t},\tag{3}$$

我们称用方程(1)描述运动的力学系统或描述状态的物理系统为相对论 Birkhoff 系统.如果 $\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}(\nu=1,\cdots,2n)$ 不显含时间 t，则方程(1)成为

$$\left(\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial \tilde{R}^{\cdot}_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial \tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{4}$$

称为相对论 Birkhoff 半自治系统.如果 $\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}(\nu=1,$

* 河南省自然科学基金(批准号：98405300)资助的课题.

$\cdots,2n$)和 $\tilde{B}^{\cdot}$ 都不显含时间 t,则方程(1)成为

$$\left(\frac{\partial\tilde{R}_{\nu}^{\cdot}(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial\tilde{R}_{\mu}^{\cdot}(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}\right)\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{5}$$

称为相对论 Birkhoff 自治系统.方程(1),(4),(5)记作形式

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^{\cdot}(t,\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu}-\left(\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial\tilde{R}_{\mu}^{\cdot}(t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\right)=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{6}$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^{\cdot}(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}(t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{7}$$

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^{\cdot}(\boldsymbol{a})\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}(\boldsymbol{a})}{\partial a^{\mu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{8}$$

式中

$$\tilde{\omega}_{\mu\nu}^{\cdot}=\left(\frac{\partial\tilde{R}_{\nu}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial\tilde{R}_{\mu}^{\cdot}}{\partial a^{\nu}}\right)$$

$$=\frac{\partial R_{\nu}^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial R_{\nu}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\nu}}-\frac{\partial R_{\mu}^{\cdot}}{\partial a^{\nu}}\tag{9}$$

称为相对论性 Birkhoff 协变张量,有

$$\det(\tilde{\omega}_{\mu\nu}^{\cdot})\neq 0.\tag{10}$$

方程(6),(7)和(8)可表成如下逆变形式:

$$\dot{a}^{\mu}-\omega^{\cdot\mu\nu}(m_i(t,\boldsymbol{a})t,\boldsymbol{a})\Bigg(\frac{\partial B^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}$$

$$+\frac{\partial R_{\nu}^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})}{\partial t}\Bigg)=0\qquad(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{11}$$

$$\dot{a}^{\mu}-\omega^{\cdot\mu\nu}(m_i(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})\frac{\partial B^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{12}$$

$$\dot{a}^{\mu}-\omega^{\cdot\mu\nu}(m_i(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})\frac{\partial B^{\cdot}(m_i(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})}{\partial a^{\nu}}=0$$

$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{13}$$

式中

$$\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu}=(|\tilde{\omega}_{\alpha\beta}^{\cdot}|^{-1})^{\mu\nu}=\left(\left|\frac{\partial\tilde{R}_{\beta}^{\cdot}}{\partial a^{\alpha}}-\frac{\partial\tilde{R}_{\alpha}^{\cdot}}{\partial a^{\nu}}\right|^{-1}\right)^{\mu\nu},\tag{14}$$

$$\det(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})\neq 0\qquad(\alpha,\beta,\mu,\nu=1,\cdots,2n),$$

称为相对论性 Birkhoff 逆变张量.

3.相对论 Birkhoff 系统的平衡方程和平衡位置

假设相对论 Birkhoff 系统的平衡位置为

$$a^{\nu}=a_0^{\nu}=\text{const},\qquad \dot{a}_0^{\nu}=0\qquad(\nu=1,\cdots,2n).\tag{15}$$

将(15)式代入方程(6)和(11),得到相对论 Birkhoff 非自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0+\left(\frac{\partial\tilde{R}_{\mu}^{\cdot}}{\partial t}\right)_0$$

$$=\left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0+\left(\frac{\partial R_{\mu}^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}+\frac{\partial R_{\mu}^{\cdot}}{\partial t}\right)_0=0$$

$$(\mu=1,\cdots,2n),\tag{16}$$

式中下标 0 表示其中的 a^{ν} 用 a_0^{ν} 替代的结果,将(15)式代入方程(7)或(12),得到相对论 Birkhoff 半自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0=\left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0=0,$$

$$\tilde{B}^{\cdot}=B^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\boldsymbol{a})\qquad(\mu=1,\cdots,2n).\tag{17}$$

将(15)式代入方程(8)或(13),得到相对论 Birkhoff 自治系统的平衡方程

$$\left(\frac{\partial\tilde{B}^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0=\left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}}+\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_0=0,$$

$$\tilde{B}^{\cdot}=B^{\cdot}(m_i(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{a})\qquad(\mu=1,\cdots,2n).\tag{18}$$

如果平衡方程(16)或(17)或(18)有解,则相应的系统存在平衡位置.如果对于方程组(16)或(17)或(18)的 $2n$ 个方程是彼此独立的,则平衡位置是孤立的 如果这 $2n$ 个方程不是彼此独立的,则平衡位置组成流形.

例 1 二阶相对论 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组为

$$\tilde{B}^{\cdot}=m((a^1)^2+(a^2)^2),\tag{a}$$

$$\tilde{R}_1^{\cdot}=0,\ \tilde{R}_2^{\cdot}=m(t+1)a^1\qquad(t\geqslant 0),\tag{b}$$

式中 $m=m_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/c^2}$,试写出系统的平衡方程,并求出系统的平衡位置.

平衡方程(16)给出为

$$\frac{a_0^1((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}{c^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+2a_0^1=0,\tag{c}$$

$$\frac{a_0^2((a_0^1)^2+(t+1)(a_0^2)^2)}{c^2-((a_0^1)^2+(a_0^2)^2)}+2(t+1)(a_0^2)^2+a_0^1=0, \tag{d}$$

(c)和(d)式有如下 3 组解：

$$a_0^1=0,\qquad a_0^2=0,$$

$$a_0^1=\frac{2\left(-\frac{2\sqrt{2}ct^2}{(1-t+4t^2)^{3/2}}-\frac{\sqrt{2}ct}{\sqrt{1-t+4t^2}}\right)}{1+\frac{2t}{1-t+4t^2}},$$

$$a_0^2=\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{1-t+4t^2}},$$

$$a_O^1=\frac{2\left(-\frac{2\sqrt{2}ct^2}{(1-t+4t^2)^{3/2}}+\frac{\sqrt{2}ct}{\sqrt{1-t+4t^2}}\right)}{1+\frac{2t}{1-t+4t^2}},$$

$$a_0^2=-\frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{1-t+4t^2}}. \tag{e}$$

4. 相对论 Birkhoff 系统的受扰运动方程和一次近似方程

4.1. 相对论 Birkhoff 非自治系统的受扰运动方程和一次近似方程

设 $a^\nu=a_0^\nu(\nu=1,\cdots,2n)$ 为系统的孤立平衡位置，令

$$a^\nu=a_0^\nu+\xi^\nu\quad(\nu=1,\cdots,2n), \tag{19}$$

将(19)式代入(6)和(11)式得到相对论 Birkhoff 非自治系统的受扰运动方程

$$(\tilde{\omega}^\cdot_{\mu\nu})_1\dot{\xi}^\nu-\left(\frac{\partial\tilde{B}^\cdot}{\partial a^\mu}\right)_1-\left(\frac{\partial\tilde{R}^\cdot_\mu}{\partial t}\right)_1=0$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{20}$$

和

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})\left[\left(\frac{\partial\tilde{B}^\cdot}{\partial a^\nu}\right)_1+\left(\frac{\partial\tilde{R}^\cdot_\nu}{\partial t}\right)\right]=0$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n), \tag{21}$$

式中下标 1 表示其中的 a^ν 用 $a_0^\nu+\xi^\nu$ 替代的结果．将$()_1$ 等在平衡位置附近展成 Taylor 级数

$$(\tilde{\omega}^\cdot_{\mu\nu})_1=(\tilde{\omega}^\cdot_{\mu\nu})_0+\left(\frac{\partial\omega^\cdot_{\mu\nu}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\rho}+\frac{\partial\omega^\cdot_{\mu\nu}}{\partial a^\rho}\right)_0\xi^\rho+\cdots,$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{B}^\cdot}{\partial a^\mu}\right)_1=\left(\frac{\partial B^\cdot}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\mu}+\frac{\partial B^\cdot}{\partial a^\mu}\right)_0$$
$$+\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial B^\cdot}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^\cdot}{\partial a^\nu}\right)_0\xi^\nu+\cdots,$$

$$\left(\frac{\partial\tilde{R}^\cdot}{\partial t}\right)_1=\left(\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}+\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial t}\right)_0$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial a^\nu}\right)_0\xi^\nu+\cdots,$$

$$(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_1=(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_0+\left(\frac{\partial\omega^{\cdot\mu\nu}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\rho}+\frac{\partial\omega^{\cdot\mu\nu}}{\partial a^\rho}\right)_0\xi^\rho, \tag{22}$$

式中未写出项为 ξ^ν 的二阶项和更高阶小项．将(22)式代入方程(20)和(21)，并注意到(16)式，得到受扰方程的另一种形式为

$$(\tilde{\omega}^\cdot_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-\left\{\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial B^\cdot}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^\cdot}{\partial a^\nu}\right)_0+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial a^\nu}\right)_0\right\}\xi^\nu$$
$$=\Lambda_\mu(m_i(\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu,t),\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu,t)$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{23}$$

和

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_0\left\{\frac{\partial}{\partial a^\nu}\left(\frac{\partial B^\cdot}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\rho}+\frac{\partial B^\cdot}{\partial a^\rho}\right)_0+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^\cdot_\nu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\rho}+\frac{\partial R^\cdot_\nu}{\partial a^\rho}\right)_0\right\}\xi^\rho$$
$$=\bar{\Lambda}_\mu(m_i(\xi^\nu,t),\xi^\nu,t)$$
$$(\mu,\nu,\rho=1,\cdots,2n), \tag{24}$$

式中 $\Lambda_\mu,\bar{\Lambda}_\mu$ 为 $\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu,t$ 的二阶和更高价项．由方程(23)和(24)得到其一次近似方程为

$$(\tilde{\omega}^\cdot_{\mu\nu})_0\dot{\xi}^\nu-(\tilde{\Omega}^\cdot_{\mu\nu})_0\xi^\nu=0\qquad(\mu,\nu=1,\cdots,2n) \tag{25}$$

和

$$\dot{\xi}^\mu-(\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_0(\tilde{\Omega}^\cdot_{\mu\nu})_0\xi^\rho=0\qquad(\mu,\nu,\rho=0), \tag{26}$$

式中

$$\tilde{\Omega}^\cdot_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial B^\cdot}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial B^\cdot}{\partial a^\nu}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R^\cdot_\mu}{\partial a^\nu}\right) \tag{27}$$

为 $2n$ 阶矩阵．可知 $\tilde{\Omega}^\cdot_{\mu\nu}$ 是对称矩阵，而 ω^{-1} 是反对称矩阵．

4.2. 相对论 Birkhoff 自治系统的受扰运动方程和一次近似方程

将(19)式代入(8)和(13)式，得到相对论 Birkhoff 自治系统的受扰运动方程

$$(\tilde{\omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_1 \dot{\xi}^{\nu} - \left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\mu}} + \frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\mu}}\right)_1 = 0$$
$$(\mu,\nu = 1,\cdots,2n) \qquad (28)$$

和

$$\dot{\xi}^{\mu} - (\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_1\left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\nu}}\right)_1 = 0$$
$$(\mu,\nu = 1,\cdots,2n). \qquad (29)$$

将$()_1$ 等在平衡位置附近展成 Taylor 级数,并利用平衡方程(18),得到受扰运动方程的另一种形式

$$(\tilde{\omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0 \dot{\xi}^{\nu} - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0 \xi^{\nu} = \Lambda_{\mu}(m_i(\xi^{\nu},\dot{\xi}^{\nu}),\xi^{\nu},\dot{\xi}^{\nu})$$
$$(\mu,\nu = 1,\cdots,2n) \qquad (30)$$

和

$$\dot{\xi}^{\mu} - (\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_0(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\rho})_0\xi^{\rho} = \bar{\Lambda}_{\mu}(m_i(\xi^{\nu}),\xi^{\nu})$$
$$(\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \qquad (31)$$

式中

$$\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\frac{\partial B^{\cdot}}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^{\nu}} + \frac{\partial B^{\cdot}}{\partial a^{\nu}}\right), \qquad (32)$$

式中 Λ_{μ},$\bar{\Lambda}_{\mu}$ 为 ξ^{ν},$\dot{\xi}^{\nu}$ 的二阶和更高价项.由方程(30)和(31)得到受扰运动方程的一次近似方程

$$(\tilde{\omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0 \dot{\xi}^{\nu} - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0 \xi^{\nu} = 0$$
$$(\mu,\nu = 1,\cdots,2n), \qquad (33)$$

$$\dot{\xi}^{\mu} - (\tilde{\omega}^{\cdot\mu\nu})_0(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0\xi^{\rho} = 0$$
$$(\mu,\nu,\rho = 1,\cdots,2n). \qquad (34)$$

4.3. 相对论 Birkhoff 半自治系统的受扰运动方程和一次近似方程

对于相对论 Birkhoff 半自治系统,$\tilde{R}^{\cdot}_{\nu}$ 不显含 t,类似于自治系统的讨论,可以得到形式如(28)和(34)的各式,式中 $\Lambda_{\mu}(m_i(\xi^{\nu},\dot{\xi}^{\nu},t),\xi^{\nu},\dot{\xi}^{\nu},t)$,$\bar{\Lambda}_{\mu}(m_i(\xi^{\nu},t),\xi^{\nu},t)$.

5. 相对论 Birkhoff 系统平衡稳定性的一次近似方法

5.1. 相对论 Birkhoff 自治系统平衡稳定性的一次近似方法

自治系统一次近似方程(33)的特征方程

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -(\tilde{\omega}^{\cdot}_{11})_0 & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{12})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{12})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{12n})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{12n})_0 \\ (\tilde{\omega}^{\cdot}_{21})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{21})_0 & -(\tilde{\omega}^{\cdot}_{22})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{22n})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{22n})_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\tilde{\omega}^{\cdot}_{2n1})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{2n1})_0 & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{2n2})_0\lambda - (\tilde{\Omega}^{\cdot}_{22n})_0 & \cdots & -(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{2n2n})_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (35)$$

令与行列式(35)相应的矩阵记作 $A(\lambda)$,注意到 $\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu}$ 的对称性和 $\tilde{\omega}^{\cdot}_{\mu\nu}$ 的反对称性,则有

$$A(\lambda) = [A(-\lambda)]^{T}. \qquad (36)$$

由矩阵理论知,矩阵转置后其形式不变,有

$$\Delta(\lambda) = \Delta(-\lambda). \qquad (37)$$

这表明方程(35)中,λ 的奇次方项为零.因此特征方程可写成

$$b_0\lambda^{2n} + b_1\lambda^{2n-2} + \cdots + b_{n-1}\lambda^2 + b_n = 0, \qquad (38)$$

式中系数 $b_0,b_1,\cdots,b_n$ 都是实数,方程(38)的根必然成对互为相反符号.于是有如下命题:

命题 1 相对论 Birkhoff 自治系统一次近似方程(35)的根总是成对互为反号出现,如有根 λ,则必有根$(-\lambda)$.

命题 2 如果相对论 Birkhoff 自治系统一次近似的特征方程有实部不为零的根,则平衡是不稳定的.

可见这种近似方法不能给出平衡稳定性的判据,只能给出不稳定的充分条件.

例 2 设二阶相对论 Birkhoff 系统为

$$\tilde{B}^{\cdot} = m\{b_{11}(a^1)^2 + 2b_{12}a^1a^2 + b_{22}(a^2)^2\},$$
$$\tilde{R}^{\cdot}_1 = 0, \tilde{R}^{\cdot}_2 = m\left(\frac{1}{2}(a^1)^2 + a^1\right), \qquad (f)$$

式中 $m = m_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/c^2}$ 为相对论性质量,试研究系统的平衡稳定性.

该系统为相对论 Birkhoff 自治系统,(8)式给出为

$$m\left\{\frac{\frac{1}{2}(a^1)^3 + (a^1)^2}{c^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2} + (a^1+1)\right\}\dot{a}^2$$
$$- m\left\{\frac{b_{11}(a^1)^3 + 2b_{12}(a^1)^2a^2 + b_{22}a^1(a^2)^2}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}\right.$$
$$\left. + 2b_{11}a^1 + 2b_{12}a^2\right\} = 0, \qquad (g)$$

$$- m\left\{\frac{\frac{1}{2}(a^1)^3+(a^1)^2}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}+(a^1+1)\right\}\dot{a}^1$$

$$- m\left\{\frac{b_{11}(a^1)^2a^2+2b_{12}a^1(a^2)^2+b_{22}(a^2)^3}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}\right.$$

$$\left.+2b_{12}a^1+2b_{22}a^2\right\}=0, \tag{h}$$

由此得到平衡方程

$$\frac{b_{11}(a_0{}^1)^3+2b_{12}(a_0{}^1)^2a_0{}^2+b_{22}a_0{}^1(a_0{}^2)^2}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)}$$

$$+2b_{11}a_0{}^1+2b_{12}a_0{}^2=0,$$

$$\frac{b_{11}(a_0{}^1)^2a_0{}^2+2b_{12}a_0{}^1(a_0{}^2)^2+b_{22}(a_0{}^2)^3}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)}$$

$$+2b_{12}a_0{}^1+2b_{22}a_0{}^2=0. \tag{i}$$

方程有解

$$a_0^1=a_0^2=0. \tag{j}$$

方程(h)的一次近似方程为

$$\dot{\xi}^2-(b_{11}\xi^1+b_{12}\xi^2)=0,$$

$$-\dot{\xi}^1-(b_{12}\xi^1+b_{22}\xi^2)=0, \tag{k}$$

其特征方程为

$$\Delta\lambda=\begin{vmatrix}-b_{11} & \lambda-b_{12}\\ -\lambda-b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}=0, \tag{l}$$

由此得到

$$\lambda^2=b_{12}^2-b_{11}b_{12}.$$

由命题 2 知,当

$$b_{12}^2-b_{11}b_{12}>0 \tag{m}$$

时,特征方程有一正实根和一负实根,平衡是不稳定的. 当

$$b_{12}^2-b_{11}b_{12}<0 \tag{n}$$

时,特征方程有一对纯虚根,由命题 2 不能判断平衡是否稳定,而当

$$b_{12}^2-b_{11}b_{12}=0 \tag{o}$$

时,平衡位置不是孤立的.

5.2. 相对论 Birkhoff 非自治系统的一次近似方法

一般而言,相对论 Birkhoff 非自治系统的受扰运动方程(23)明显包含时间 t,利用一次近似方法研究系统的平衡稳定性是非常困难的. 我们考虑方程(23)不显含时间 t 的情况,即假设

$$(\tilde{\omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0=\mathrm{const},\qquad(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu})_0=\mathrm{const},$$

$$\Lambda_\mu=\Lambda_\mu(m_i(\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu),\xi^\nu,\dot{\xi}^\nu), \tag{39}$$

此时一次近似方程的特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix}-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{11})_0 & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{12})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{12})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{12})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{12n})_0\\ (\tilde{\omega}^{\cdot}_{21})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{21})_0 & -(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{22})_0 & \cdots & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{22n})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{22n})_0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\tilde{\omega}^{\cdot}_{2n1})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{2n1})_0 & (\tilde{\omega}^{\cdot}_{2n2})_0\lambda-(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{2n2})_0 & \cdots & -(\tilde{\Omega}^{\cdot}_{2n2n})_0\end{vmatrix}=0. \tag{40}$$

如果满足条件

$$\left\{\frac{\partial}{\partial a^\nu}\left(\frac{\partial R^{\cdot}_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial t}+\frac{\partial R^{\cdot}_\mu}{\partial t}\right)\right\}_0=\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial R^{\cdot}_\mu}{\partial m_i}\frac{\partial m_i}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R^{\cdot}_\mu}{\partial a^\nu}\right)\right\}_0 \tag{41}$$

时,即 $\tilde{\Omega}^{\cdot}_{\mu\nu}$ 是对称的,于是有

命题 3　满足条件(39)和(41)式的相对论 Birkhoff 非自治系统的一次近似方程的特征方程的根总是成对互为反号出现的,如有根 λ,则必有根 $-\lambda$.

命题 4　满足条件(39)和(41)的相对论 Birkhoff 非自治系统,如果特征方程(40)有实部不为零的根,则其平衡位置是不稳定的.

例 3　相对论二阶 Birkhoff 系统为

$$\tilde{B}^{\cdot}=m((a^1)^2+(a^2)^2),$$

$$\tilde{R}^{\cdot}_1=0,\qquad\tilde{R}^{\cdot}_2=m(a^1+t), \tag{p}$$

式中 $m=m_0/\sqrt{1-((a^1)^2+(a^2)^2)/c^2}$,试研究其平衡稳定性.

相对论性 Birkhoff 方程(6)给出为

$$m\left(\frac{(a^1)^2+a^1t}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}+1\right)\dot{a}^2$$

$$-\frac{(a^1)^3-a^1(a^2)^2}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}-2a^1=0,$$

$$-m\left(\frac{(a^1)^2+a^1t}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}+1\right)\dot{a}^1$$

$$+\frac{a^2(a^1)^2-(a^2)^3}{c^2-(a^1)^2-(a^2)^2}+2a^2-1=0. \tag{q}$$

由此得到平衡方程为

$$\left(-\frac{(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}-2\right)a_0{}^1=0,$$

$$\frac{a_0{}^2(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^3}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}+2a_0{}^2-1=0. \tag{r}$$

由此而得到孤立平衡位置

$$a_0^1=0,\ \frac{(a_0^2)^3}{c^2-(a_0^2)^2}+2a_0^2-1=0 \tag{s}$$

和

$$\frac{(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}+2=0,$$

$$\frac{a_0{}^2(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^3}{c^2-(a_0{}^1)^2-(a_0{}^2)^2}+2a_0{}^2-1=0. \tag{t}$$

(s)式在 $a_0^2<<c$ 的情况下,给出相应的经典 Birkhoff 系统的平衡位置为

$$a_0^1=0,\ a_0^2=\frac{1}{2}; \tag{u}$$

(s)式在 $a_0^1>>0$ 的相对论情况下可得到该 Birkhoff 系统的平衡位置为

$$a_0^1=0,\ a_0^2=\sqrt{2}c, \tag{v}$$

$$a_0^1=0,\ a_0^2=-\sqrt{2}c, \tag{w}$$

$a_0^2=\pm\sqrt{2}c$ 不满足最大光速为 c 这一基本原理,因此,(v)和(w)式不合题意,即在相对论情况下没有平衡稳定性.

对于平衡位置(u)式,方程(q)的一次近似方程为

$$\dot{\xi}^2-2\xi^1=0,\ -\dot{\xi}^1+2\xi^2=0, \tag{x}$$

其特征方程的根为

$$\lambda=\pm 2. \tag{y}$$

由命题4知,平衡位置是不稳定的.对于方程(t),其解形式非常复杂,不再作进一步的讨论.

6. 相对论 Birkhoff 系统的平衡稳定性与经典 Birkhoff 系统的平衡稳定性的关系

在$(\dot{r}_i)<<c$ 的经典近似下,取$\sqrt{1-(\dot{r}_i)^2/c^2}$关于$(\dot{r}_i)^2/c^2$ 的幂级数展开式的前两项,则相对论性动能函数为 $T_r^{\cdot}\approx m_{0i}c^2-m_{0i}c^2(1-(\dot{r}_i)^2/2c^2)=\frac{1}{2}m_{0i}(\dot{r}_i)^2=T_r$,相对论性质量 $m_i=m_{0i}\times(1-(\dot{r}_i)^2c^{-2})^{-1/2}\approx m_{0i}$,相对论性 Birkhoff 函数 $\tilde{B}^{\cdot}=B^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\mathbf{a})\approx B(t,a)$相对论性 Birkhoff 函数组 $\tilde{R}_\nu^{\cdot}=R_\nu^{\cdot}(m_i(t,\boldsymbol{a}),t,\mathbf{a})=R_\nu(t,\boldsymbol{a})$本文给出经典 Birkhoff 系统的平衡稳定性[4].

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (New York :AMS College Publ. Providence R I)

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretics Mechanics* Ⅱ (New York :Spring-Verlag)

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Wu H B 1996 *Dynamical of Birkhoffian Systems* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学(北京 北京理工大学出版社)]

[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F and Zhu H P 1997 *Stability of Motion of Constrained Mechanical Systems* (Beijing :Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌、张永发、朱海平 1997 约束力学系统的运动稳定性(北京 北京理工大学出版社)]

[5] Mei F X and Shi R C 1993 *J. Beijing Institute of Technology* **13**(2) 266 (in Chinese) [梅凤翔、史荣昌 1993 北京理工大学学报 **13**(2) 266]

[6] Mei F X 1993 *Sci. Chin.* A **23**(7) 709 (in Chinese) [梅凤翔 1993 中国科学(A辑) **23**(7) 709]

[7] Shi R C, Mei F X and Zhu H P 1994 *Mech. Res. Commun.* **21**(3) 269

[8] Mei F X 1998 *Sci. Bull.* **38**(4) 31 (in Chinese) [梅凤翔 1998 科学通报 **38**(4) 31]

[9] Zhang H B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1837 (in Chinese) [张宏彬 2001 物理学报 **50** 1837]

[10] Luo S K 1987 *Tech. Mater. Commun.* (5) 31 (in Chinese) [罗绍凯 1987 教材通讯 (5) 31]

[11] Luo S K 1991 *Shanghai J. Mech.* **12**(1) 67 (in Chinese) [罗绍凯 1991 上海力学 **12**(1) 67]

[12] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683

[13] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15**(2) 175

[14] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15**(3) 889

[15] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15**(10) 1019

[16] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25**(1) 89

[17] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45

[18] Fu J L, Chen X W and Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20**(11) 1266

[19] Fu J L, Chen X W and Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** (5) 549

[20] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]

[21] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023 (in Chinese) [傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[22] Fu J L, Chen X W and Luo S K 2001 *Acta Mech. Sol. Sin.* **22** 263 (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 2001 固体力学学报 **22** 263]

[23] Fu J L 2001 *Acta Math. Phys. Sci.* **21** 70 (in Chinese) [傅景礼 2001 数学物理学报 **21** 70]

[24] Fu J L, Chen L Q, Chen X W *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、陈向炜等 2001 物理学报 **50** 2289]

[25] Fu J L and Zheng S W 2000 *J Yunnan Universilg* **23**(3) 194 (in Chinese) [傅景礼、郑世旺 2000 云南大学学报 **23**(3) 194]

[26] Luo S K, Fu J L and Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]

[27] Luo S K, Chen X W and Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271

[28] Luo S K, Guo Y X, Chen X W and Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]

[29] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q *et al* 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周 强等 2002 物理学报 **51** 1913]

Stability of the equilibrium state in relativistic Birkhoff systems*

Fu Jing-Li[1)2)] Chen Li-Qun[1)] Xue Yun[1)] Luo Shao-Kai[3)]

[1)] (*Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai University, Shanghai* 200072, *China*)

[2)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Shangqiu Teachers College, Shangqiu* 476000, *China*)

[3)] (*Institute of Mathematical Mechanics and Mathematical Physics, Changsha University, Changsha* 410003, *China*)

(Received 6 April 2002; revised manuscript received 7 May 2002)

Abstract

The stabilities of the equilibrium state in relativistic Birkhoff autonomous systems, relativistic Birkhoff semi-autonomous systems and relativistic Birkhoff non-autonomous systems are studied. The equilibrium state equations are given. The disturbance equation and the first approximate equation are established. The stability criteria for the equilibrium state are obtained. The relationship between the stabilities of the equilibrium state in relativistic Birkhoff systems and classical Birkhoff systems is discussed. Several examples are presented to illustrate the results.

Keywords: relativity, Birkhoff systems, stability of the equilibrium state, the first approximate

PACC: 0316, 0412

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 98405300).