第 51 卷 第 12 期 2002 年 12 月
1000-3290/2002/51(12)/2690-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.12, December, 2002

Landau 系统四类规范不变的升降算符

陈昌巨[1)]　田　旭[2)†]

[1)](武汉理工大学自动化学院,武汉　430070)

[2)](武汉理工大学理学院,武汉　430070)

(2002 年 4 月 8 日收到;2002 年 5 月 21 日收到修改稿)

借助圆心坐标算符和初机械动量算符,给出 Landau 系统(带电粒子在垂直于均匀磁场平面内的运动)的四类升降算符,并讨论相应的选择定则和守恒量子数

关键词:Landau 系统, 升降算符

PACC:0365, 4250, 0520

1. 引　　言

Landau 系统是一有价值的二维量子力学系统. 迴旋加速器、质谱仪、霍耳效应及　旋共振测量等都与这个系统有关,虽然 Landau 系统的能级结构与二维各向同性谐振子的能级结构类似,但 Landau 系统(Osc(1)对称性)有着与二维各向同性谐振子(SU_2 对称性)不同的代数、几何和物理内容[1—5]. 一般量子力学文献大多借助正则动量或正则角动量给出 Landau 系统的描述[6—12],但是正则动量和正则角动量都不具有规范不变性. 文献[13,14]引入具有规范不变性的圆心坐标算符和初机械动量算符,得到了 Landau 系统的耦合压缩态和非耦合压缩态. 本文将借助圆心坐标算符和初机械动量算符,找出 Landau 系统具有规范不变性的四类升降算符,并讨论相应的选择定则和守恒量子数.

2. 四类升降算符

令均匀磁场沿 z 轴方向,磁感应强度为 B,则带电粒子的机械动量算符和哈密顿量分别为

$$\pi_x = p_x - qA_x,\ \pi_y = p_y - qA_y, \tag{1}$$

$$H = \frac{1}{2\mu}\pi_x^2 + \frac{1}{2\mu}\pi_y^2, \tag{2}$$

式中 μ 和 q 分别为带电粒子的质量和电荷;矢势 $A = (A_x, A_y)$ 满足关系 $\partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y = B$. x, y, π_x 和 π_y 之间有下列对易关系:

$$[x, \pi_x] = [y, \pi_y] = \mathrm{i}\hbar, \tag{3}$$

$$[x, \pi_y] = [y, \pi_x] = 0, \tag{4}$$

$$[\pi_x, \pi_y] = \mathrm{i}\hbar qB. \tag{5}$$

带电粒子的海森伯方程

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(x, H) = \dfrac{1}{\mu}\pi_x, \\ \dfrac{\mathrm{d}\pi_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(\pi_x, H) = \omega\pi_y, \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(y, H) = \dfrac{1}{\mu}\pi_y, \\ \dfrac{\mathrm{d}\pi_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{\mathrm{i}\hbar}(\pi_y, H) = -\omega\pi_x \end{cases} \tag{6}$$

的解可写为[11]

$$\begin{cases} x = x_c - \dfrac{1}{qB}\pi_{y0}\cos\omega t + \dfrac{1}{qB}\pi_{x0}\sin\omega t, \\ y = y_c - \dfrac{1}{qB}\pi_{x0}\cos\omega t + \dfrac{1}{qB}\pi_{yY0}\sin\omega t, \\ \pi_x = \pi_{xX0}\cos\omega t + \pi_{y0}\sin\omega t, \\ \pi_{yY} = \pi_{yY0}\cos\omega t - \pi_{x0}\sin\omega t, \end{cases} \tag{7}$$

式中 $\omega = qB/\mu$;x_c 和 y_c 为粒子的圆心坐标算符;π_{x0} 和 π_{y0} 为粒子的初机械动量算符. x_c, y_c, π_{x0} 和 π_{y0} 都是 Landau 系统的具有规范不变性的守恒量.

经过计算,可得一些有用的对易关系

$$[x_c, y_c] = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{qB}, \tag{8}$$

† 联系人. E-mial:tx.59109@163.com

$$[\pi_{x0},\pi_{y0}] = \mathrm{i}\hbar qB, \tag{9}$$

$$[x_c,\pi_{x0}] = [x_c,\pi_{y0}] = [y_c,\pi_{x0}] = [y_c,\pi_{y0}] = 0. \tag{10}$$

借助圆心坐标算符和初机械动量算符，可以引入下列算符：

$$\begin{aligned} a_1^+ &= \left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\left(\pi_{x0} - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}\pi_{y0}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|t}\left[p_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y\right. \\ &\quad \left. - qA_x + \mathrm{i}\,|q|\,A_y\right], \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\left(\pi_{x0} + \mathrm{i}\frac{q}{|q|}\pi_{y0}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega|t}\left[p_x + \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y\right. \\ &\quad \left. - qA_x - \mathrm{i}\,|q|\,A_y\right], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a_2^+ &= \left(\frac{|q|\,B}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(y_c - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}x_c\right) \\ &= -\frac{q}{|q|}\left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\left[p_x + \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y\right. \\ &\quad \left. + qA_x + \mathrm{i}\,|q|\,A_y\right], \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \left(\frac{|q|\,B}{2\hbar}\right)^{1/2}\left(y_c + \mathrm{i}\frac{q}{|q|}x_c\right) \\ &= -\frac{q}{|q|}\left(\frac{1}{2\hbar\,|q|\,B}\right)^{1/2}\left[p_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y\right. \\ &\quad \left. + qA_x - \mathrm{i}\,|q|\,A_y\right], \end{aligned} \tag{14}$$

它们满足关系

$$[a_1, a_1^+] = [a_2, a_2^+] = 1, \tag{15}$$

$$[a_1, a_2] = [a_1^+, a_2^+] = [a_1, a_2^+] = [a_1^+, a_2] = 0, \tag{16}$$

$$a_1^+ a_1 = N_1,\ a_2^+ a_2 = N, \tag{17}$$

式中 N_1 为本征值为 $n_1(n_1 = 0,1,2,\cdots)$ 的粒子数算符；N_2 为本征值为 $n_2(n_2 = 0,1,2,\cdots)$ 的粒子数算符. 而守恒量 H 和 $y_c^2 + y_c^2$ 则成为

$$H = \left(a_1{}^+ a_1 + \frac{1}{2}\right)\hbar\,|\omega|, \tag{18}$$

$$x_c^2 + y_c^2 = \left(a_2^+ a_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{2\hbar}{|q|\,B}. \tag{19}$$

它们的本征值分别为 $\left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\,|\omega|$ 和 $\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\frac{2\hbar}{|q|B}$. 在对称规范下，正则角动量第三分量

$$L_Z = \frac{qB}{2}(x_c^2 + y_c^2) - \frac{1}{\omega}H = (a_2^+ a_2 - a_1^+ a_1)\frac{q}{|q|}\hbar \tag{20}$$

亦为守恒量，其本征值为

$$m\hbar\left(m = (n_2 - n_1)\frac{q}{|q|} = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\right).$$

算符 a_1^+ 和 a_1 的作用分别在于使量子态的 n_1 增加和减少 1. 算符 a_1^+ 和 a_1 的作用分别在于使量子态的 n_2 增加和减少 1. 根据算符 a_1^+，a_1，a_2^+ 和 a_2 的这种性质，我们可以得到 Landau 系统的两类升降算符.

$$\begin{aligned} A(n_1\uparrow, n_2) &= (2\hbar\,|q|\,B)^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}|\omega|t}a_1^+ \\ &= p_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y \\ &\quad - qA_x + \mathrm{i}\,|q|\,A_y, \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} A(n_1\downarrow, n_2) &= (2\hbar\,|q|\,B)^{1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|t}a_1 \\ &= p_x + \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y \\ &\quad - qA_x - \mathrm{i}\,|q|\,A_y, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} B(n_1, n_2\uparrow) &= -\frac{q}{|q|}(2\hbar\,|q|\,B)^{1/2}a_2^+ \\ &= p_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y \\ &\quad + qA_x + \mathrm{i}\,|q|\,A_y, \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} B(n_1, n_2\downarrow) &= -\frac{q}{|q|}(2\hbar\,|q|\,B)^{1/2}a_2 \\ &= p_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_y \\ &\quad + qA_x - \mathrm{i}\,|q|\,A_y. \end{aligned} \tag{24}$$

分别将 $a_1^+ a_2^+$，$a_1 a_2$，$a_1^+ a_2$ 和 $a_1 a_2^+$ 对量子态 $|n_1, n_2\rangle$ 运算，可得到

$$a_1^+ a_2^+\,|n_1, n_2\rangle = \frac{\mathrm{i}q}{\hbar\,|q|\,B}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|t}\left[A_x p_y - A_y p_x - \mathrm{i}\,|q|\,(A_x^2 + A_y^2) + \frac{\mathrm{i}\hbar B}{2}(n_1 + n_2 + 2)\right]|n_1, n_2\rangle, \tag{25}$$

$$a_1 a_2\,|n_1, n_2\rangle = \frac{\mathrm{i}q}{\hbar qB}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|t}\left[A_y p_x - A_x p_y - \mathrm{i}\,|q|\,(A_x^2 + A_y^2) + \frac{\mathrm{i}\hbar B}{2}(n_1 + n_2)\right]|n_1, n_2\rangle, \tag{26}$$

$$a_1^+ a_2\,|n_1, n_2\rangle = \frac{-1}{\hbar qB}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|\omega|t}\left[p_x^2 - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}p_x p_y - q\left(A_x - \mathrm{i}\frac{q}{|q|}A_y\right)P_x - \frac{\hbar\,|q|\,B}{2}(3n_1 + n_2)\right]|n_1, n_2\rangle, \tag{27}$$

$$a_1 a_2^+ \mid n_1, n_2\rangle = \frac{-1}{\hbar q B} e^{-i|\omega|t}\left[p_x^2 - i\frac{q}{|q|}p_x p_y + q\left(A_x - i\frac{q}{|q|}A_y\right)P_x - \frac{\hbar |q| B}{2}(n_1 + 3n_2)\right] \mid n_1, n_2\rangle. \tag{28}$$

根据算符 a_1^+，a_1，a_2^+ 和 a_2 的物理意义，算符 $a_1^+ a_2^+$ 的作用是使 n_1 和 n_2 同时增加 1，算符 $a_1 a_2$ 的作用是使 n_1 和 n_2 同时减少 1，算符 $a_1^+ a_2$ 的作用是使 n_1 增加 1，n_2 减少 1，$a_1 a_2^+$ 的作用是使 n_1 减少 1，n_2 增加 1. 由此可得 Landau 系统的另外两类升降算符

$$C(n_1\uparrow, n_2\uparrow) = A_x p_y - A_y p_x - i|q|(A_x^2 + A_y^2) + \frac{i\hbar B}{2}(n_1 + n_2 + 2), \tag{29}$$

$$C(n_1\downarrow, n_2\downarrow) = A_y p_x - A_x p_y - i|q|(A_x^2 + A_y^2) + \frac{i\hbar B}{2}(n_1 + n_2), \tag{30}$$

$$D(n_1\uparrow, n_2\downarrow) = p_x^2 - i\frac{q}{|q|}p_x p_y - q\left(A_x - i\frac{q}{|q|}A_y\right)p_x - \frac{\hbar |q| B}{2}(3n_1 + n_2), \tag{31}$$

$$D(n_1\downarrow, n_2\uparrow) = p_x^2 - i\frac{q}{|q|}p_x p_y - q\left(A_x - i\frac{q}{|q|}A_y\right)p_x - \frac{\hbar |q| B}{2}(n_1 + 3n_2). \tag{32}$$

这样就找到了 Landau 体系的具有规范不变性的四类升降算符 A，B，C 和 D. 它们相应的选择定则和守恒量子数列于表 1 中.

表 1

升降算符	Δn_1	Δn_2	Δm	守恒量子数
$A(n_1\uparrow, n_2)$	1	0	$-\frac{q}{\mid q\mid}$	n_2
$A(n_1\downarrow, n_2)$	−1	0	$\frac{q}{\mid q\mid}$	
$B(n_1, n_2\uparrow)$	0	1	$\frac{q}{\mid q\mid}$	n_1
$B(n_1, n_2\downarrow)$	0	−1	$-\frac{q}{\mid q\mid}$	
$C(n_1\uparrow, n_2\uparrow)$	1	1	0	$n_1 - n_2, m$
$C(n_1\downarrow, n_2\downarrow)$	−1	−1	0	
$D(n_1\uparrow, n_2\downarrow)$	1	−1	$-2\frac{q}{\mid q\mid}$	$n_1 + n_2$
$D(n_1\downarrow, n_2\uparrow)$	−1	1	$2\frac{q}{\mid q\mid}$	

[1] Schumaker B L and Caves C M 1985 *Phys. Rev.* A **31** 3093

[2] Li C F and Wang Q 1999 *Physica* B **269** 22

[3] Fan H Y and Lin J X 2000 *Phys. Lett.* A **267** 2

[4] Jing H, Xie B T and Shi Q Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 295

[5] Jing H and Wu J S 2000 *Chin. Phys.* **9** 481

[6] Landau L D and Lifshitz E M 1976 *Quantum Mechanics* (Oxfoxd: Pergamon)

[7] Mal'kin I A and Man'ko V I 1968 *Zh. Eskp. Teor. Fiz.* **55** 1014

[8] Zimmermann W J 1989 *Am. J. Phys.* **57** 593

[9] Tsuru H 1992 *J. Phys. Soc. Jpn.* **61** 2246

[10] Baseia B, Mixrahi S S and Moussa M H 1992 *Phys. Rev.* A **16** 5885

[11] Aragone C 1993 *Phys. Lett.* A **175** 377

[12] Wu Q X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1211 (in Chinese) [吴奇学 2000 物理学报 **49** 1211]

[13] Tian X and Huang X Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 718 (in Chinese) [田　旭、黄湘友 1998 物理学报 **47** 718]

[14] Tian X and Huang X Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1399 (in Chinese) [田　旭、黄湘友 1999 物理学报 **48** 1399]

Four kinds of raising and lowering operators of the Landau system

Chen Chang-Ju[1)]Tian Xu[2)†]

[1)] (*School of Automation, Wuhan University of Technology, Wuhan* 430070, *China*)

[2)] (*School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan* 430070, *China*)

(Received 8 April 2002; revised manuscript received 21 May 2002)

Abstract

Using the centre operator and the initial mechanical momentum operator, four kinds of raising and lowering operators of a Landau system (planar charged particle moving in a uniform magnetic field) were derived and corresponding selection rules and conserved quantum number were discussed.

Keywords: Landau system, raising and lowering operators

PACC: 0365, 4250, 0520

† Author to whom correspondence should be addressed. E-mail: tx59109@263.net