

两参量平面上双重激变尖点研究*

洪 灵[†] 徐健学

(西安交通大学非线性动力学研究所, 西安 710049)

(2002 年 1 月 7 日收到 2002 年 4 月 21 日收到修改稿)

应用广义胞映射图论(GCMD)方法,研究两参量正弦强迫振子的双重激变现象,确定了两参量平面上的双重激变尖点,在这个尖点上两条边界激变曲线和两条内部激变曲线相交汇,四种不同的激变重合.物理上,在这样一个尖点附近的参量扰动(噪声)导致动力学行为戏剧性变化.

关键词:全局分析,广义胞映射,双重激变尖点,混沌鞍

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

在非线性耗散系统理论中,人们通常研究一个参量变化时系统动力学行为的变化,这包括局部分岔和全局分岔.在全局分岔中最赋戏剧性的情形是所谓的激变^[1-6],即混沌吸引子和规则鞍或混沌鞍相碰撞.激变按它所引起的混沌吸引子不连续变化的性质可分为边界激变和内部激变.边界激变导致混沌吸引子包括它的吸引域突然完全消失,内部激变导致混沌吸引子大小(尺寸和形状)发生突然变化.

实际上,大多数物理系统含有两个或两个以上参量,当多于一个参量同时变化时,会出现大量新的动力学现象.在两参量动力系统中,人们最感兴趣的是两参量平面上的激变曲线,即出现激变的参量值形成的曲线.确定一条激变曲线,必须同时变化两个参量,一个保证激变的存在,另一个用来观察参量平面上激变是怎样演化的.1993年 Gallas 等^[7]首次在两个典型的映射系统中研究了参量平面上激变曲线的奇异尖点(可微性丧失),对应于可达不稳定周期轨道流形相切的退化.在这个尖点上,两种或两种以上激变同时发生,并称这个尖点为双重激变尖点(double crisis vertex),确定了激光环形腔映射系统两边界激变重合的双重激变尖点和 Hénon 映射系统的

边界激变、内部激变和吸引域边界质变重合的双重激变尖点.1995年 Stewart 等^[8]研究双重激变模式,提出了混沌基本集合和广义激变的概念,基本集合(basic set)是具有稠密轨道的最大集,最大意味着基本集合不包含于一个具有稠密轨道的严格更大集合.在耗散系统中,混沌基本集合有三种形式,即混沌吸引子、分形边界上的混沌鞍和吸引域内部的混沌鞍.广义激变定义为混沌基本集合与(周期的或混沌的)基本集合的碰撞.基于基本集合和广义激变的概念,Stewart 等再次详细分析了已由 Gallas 等^[7]研究的 Hénon 映射系统的双重激变,给出了由四条激变曲线(射线)表示的完整的双重激变尖点模式,即两条边界激变曲线、一条内部激变曲线和域边界质变曲线相交汇.本文借助于广义胞映射图论(GCMD)方法,研究了两个典型的常微分方程系统,确定了两参量平面上的双重激变尖点,在这个尖点上四条激变曲线相交汇,四种不同的激变重合.研究涉及双重激变尖点的两种模式,即两个规则边界激变组合两个混沌内部激变和两个混沌边界激变组合两个混沌内部激变,这两种模式是不同于 Gallas^[7]和 Stewart^[8]的,是新的双重激变尖点模式.

2. 正弦强迫阻尼摆的双重激变尖点

正弦强迫阻尼摆方程为

* 国家自然科学基金(批准号:10172067和19972051)资助的课题.

[†] E-mail: hongling@mailxjtu.edu.cn

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \kappa \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta = A\sin\omega t + C, \quad (1)$$

θ 代表摆偏离铅垂位置的角度, 阻尼系数 κ 、强迫频率 ω 、强迫振幅 A 、强迫偏移 C 为系统参量. 当固定参量 $\kappa = 0.5, \omega = 0.55$, 变化参量 $-0.002 < C < 0.002, 0.87 < A < 0.88$, Rössler 等^[9]通过高精度变阶数值积分方法在 (C, A) 参量平面上定义了混沌吸引子的余维二分岔, 应用 GCMD 方法^[10-12], 我们确定 Rössler 的余维二分岔存在, 并且进一步证明这个余维二分岔点是一双重激变尖点, 在这个尖点上两个规则边界激变和两个混沌内部激变重合.

应用 GCMD 方法研究正弦强迫阻尼摆方程 (1). 选取 105×105 的胞结构均匀地覆盖感兴趣的一有限区域 $(-3.14 \leq x \leq -1.57) \times (-0.58 < dx/dt \leq 0)$, 并且在每个胞内取 25×25 个采样点, 在感兴趣的区域以外, 引入陷胞 (sink cell), 状态胞的总数目 (包括陷胞) 为 $105 \times 105 + 1$.

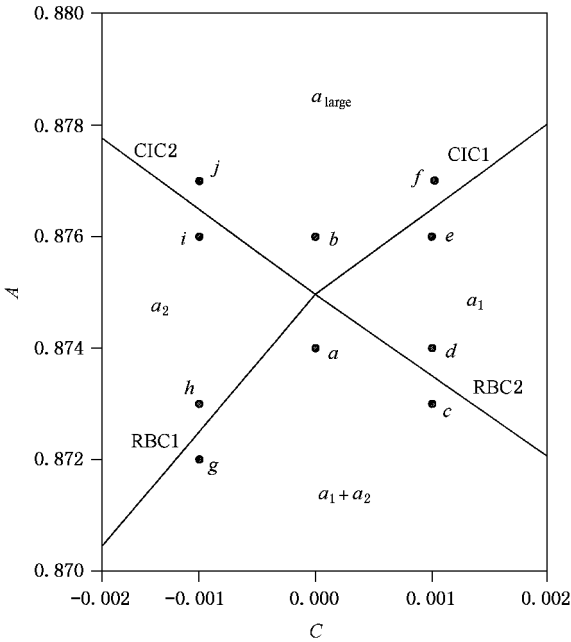


图 1 正弦强迫阻尼摆方程 (1) 在 (C, A) 参量平面上的双重激变尖点

图 1 中对应于两个不同混沌吸引子 a_1 和 a_2 的两条规则边界激变 (regular boundary crisis) 曲线 RBC1 和 RBC2 和两条混沌内部激变 (chaotic interior crisis) 曲线 CIC1 和 CIC2, 四条曲线相交汇于 (C, A) 参量平面上一点 $(C, A) \approx (0, 0.875)$, 称为双重激变尖点. 在 RBC1 和 RBC2 围成的四分之一区域内, 存在两个共存的混沌吸引子 a_1 和 a_2 , 在 RBC1 和 CIC2

围成的四分之一区域内, 仅存在混沌吸引子 a_2 , 在 RBC2 和 CIC1 围成的四分之一区域内, 仅存在混沌吸引子 a_1 , 在 CIC1 和 CIC2 围成的四分之一区域内, 仅存在一个大的混沌吸引子 a_{large} . 通过 RBC1 或 RBC2, 混沌吸引子 a_1 或 a_2 突然消失, 通过 CIC1 或 CIC2, 混沌吸引子 a_1 或 a_2 突然增大.

当 $C = 0, A$ 在间隔 $(0.874, 0.876)$ 时的双重激变如图 2(a) 和 (b) 所示. 图 2(a) 为两个混沌吸引子 a_1 和 a_2 同时碰撞光滑吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 上的周期一鞍, 图 2(b) 为两个混沌吸引子合并形成一个大的混沌吸引子 a_{large} .

当 $C = 0.001$, 通过曲线 RBC2, A 在间隔 $(0.873, 0.874)$ 时的规则边界激变如图 2(c) 和 (d) 所示. 图 2(c) 为混沌吸引子 a_2 碰撞光滑吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 上的周期一鞍, 图 2(d) 为混沌吸引子 a_2 消失, 在原混沌吸引子 a_2 的位置上留下了一个混沌鞍.

当 $C = 0.001$, 通过曲线 CIC1, A 在间隔 $(0.876, 0.877)$ 时的混沌内部激变如图 2(e) 和 (f) 所示. 图 2(e) 为混沌吸引子 a_1 碰撞在其吸引域内部的混沌鞍, 图 2(f) 为混沌吸引子 a_1 增大.

当 $C = -0.001$, 通过曲线 RBC1, A 在间隔 $(0.872, 0.873)$ 时的规则边界激变如图 2(g) 和 (h) 所示. 图 2(g) 为混沌吸引子 a_1 碰撞光滑吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 上的周期一鞍, 图 2(h) 为混沌吸引子 a_1 消失, 在原混沌吸引子 a_1 的位置上留下了一个混沌鞍.

当 $C = -0.001$, 通过曲线 CIC2, A 在间隔 $(0.876, 0.877)$ 时的混沌内部激变如图 2(i) 和 (j) 所示. 图 2(i) 为混沌吸引子 a_2 碰撞在其吸引域内部的混沌鞍, 图 2(j) 为混沌吸引子 a_2 增大.

3. 正弦强迫 Duffing 振子的双重激变尖点

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa \frac{dx}{dt} + \beta x + x^3 = A\sin\omega t + C, \quad (2)$$

式中阻尼系数 κ 、强迫振幅 A 、强迫频率 ω 、强迫偏移 C 和线性刚度系数 β 为系统参量. 当固定参量 $\kappa = 0.25, A = 8.5, \omega = 1$, 变化参量 $-0.01 < C < 0.002, 0.21 < \beta < 0.24$, 应用 GCMD 方法, 我们确定一双重激变尖点, 在这个尖点上两个混沌边界激变和两个混沌内部激变重合.

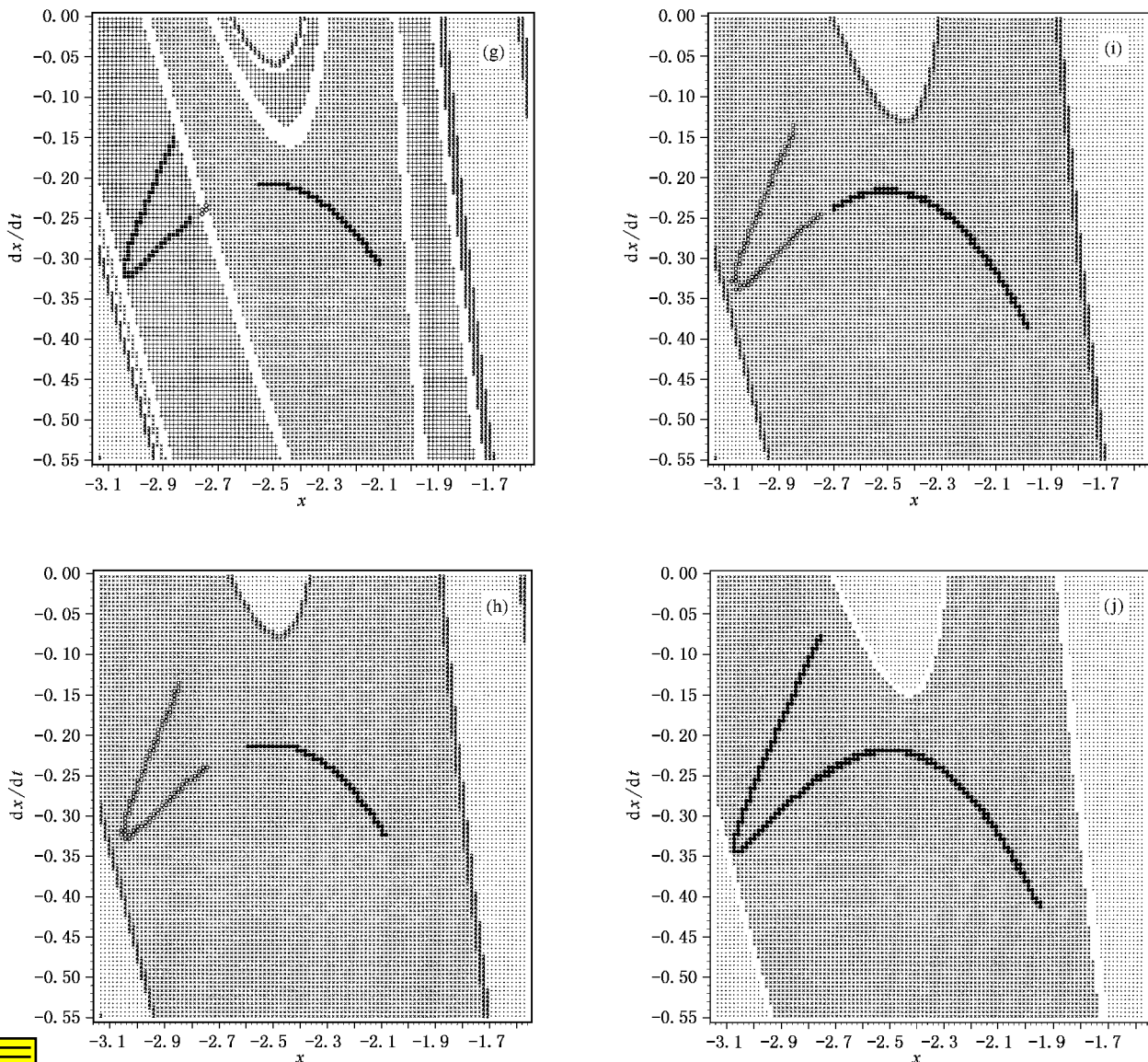


图2 混沌吸引子 a_1 标记符号“■”,它的吸引域标记符号“+”混沌吸引子 a_2 和大混沌吸引子 a_{large} 标记符号“●”,它们的吸引域标记符号“×”陷胞 a_{sink} 的吸引域标记符号“·”在吸引子 a_1 和 a_2 的光滑吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 上的周期一鞍标记符号“◇”在吸引子 a_1 或 a_2 吸引域内部的混沌鞍分别标记符号“○”或“□”吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 和 $B(a_{large}, a_{sink})$ 标记空白,吸引域边界 $B(a_1, a_{sink})$ 或 $B(a_2, a_{sink})$ 分别标记符号“1”或“2”吸引域边界 $B(a_1, a_2, a_{sink})$ 标记符号“3” (a)和(b)为当 $C=0, A$ 在间隔 $(0.874, 0.876)$ 时的双重激变 (c)和(d)为当 $C=0.001, A$ 在间隔 $(0.873, 0.874)$ 时的规则边界激变 (e)和(f)为当 $C=0.001, A$ 在间隔 $(0.876, 0.877)$ 时的混沌内部激变 (g)和(h)为当 $C=-0.001, A$ 在间隔 $(0.872, 0.873)$ 时的规则边界激变 (i)和(j)为当 $C=-0.001, A$ 在间隔 $(0.876, 0.877)$ 时的混沌内部激变

应用 GCMD 方法研究正弦强迫 Duffing 方程 (2). 选取 105×105 的胞结构均匀地覆盖感兴趣的一有限区域 $(-1.8 \leq x \leq 1) \times (-1 \leq dx/dt \leq 1)$, 并且在每个胞内取 25×25 个采样点, 在感兴趣的区域以外, 引入陷胞, 状态胞的总数目 (包括陷胞) 为 $105 \times 105 + 1$.

图 3 中对应于两个不同混沌吸引子 a_1 和 a_2 的两条混沌边界激变 (chaotic boundary crisis) 曲线 CBC1 和 CBC2 和两条混沌内部激变曲线 CIC1 和 CIC2, 四条曲线相交汇于 (C, β) 参量平面上一点 $(C, \beta) \approx$

$(-0.0041, 0.225)$ 称为双重激变尖点. 在 CBC1 和 CBC2 围成的四分之一区域内, 存在两个共存的混沌吸引子 a_1 和 a_2 , 在 CBC1 和 CIC2 围成的四分之一区域内, 仅存在混沌吸引子 a_2 , 在 CBC2 和 CIC1 围成的四分之一区域内, 仅存在混沌吸引子 a_1 , 在 CIC1 和 CIC2 围成的四分之一区域内, 仅存在一个大的混沌吸引子 a_{large} . 通过 RBC1 或 RBC2, 混沌吸引子 a_1 或 a_2 突然消失, 通过 CIC1 或 CIC2, 混沌吸引子 a_1 或 a_2 突然增大.

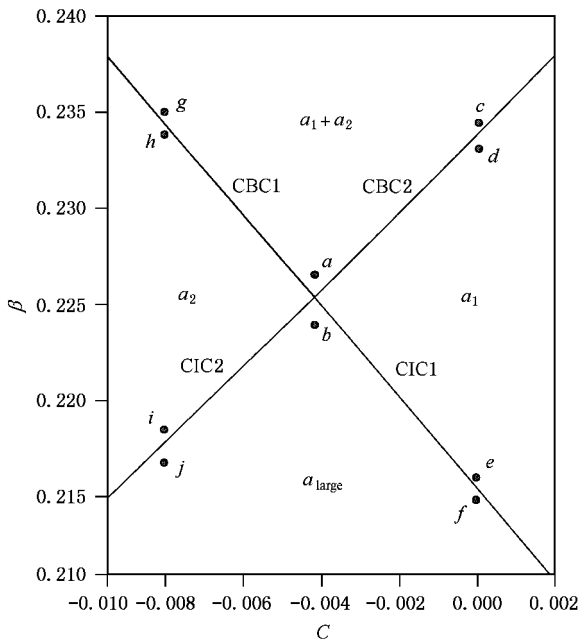


图 3 正弦强迫 Duffing 方程 2 在 C, β 参量平面上的双重激变尖点

当 $C = -0.0041$, β 在间隔 $(0.226, 0.224)$ 时的双重激变如图 4(a)和(b)所示. 图 4(a)为两个混沌吸引子 a_1 和 a_2 同时碰撞分形吸引域边界 (a_1, a_2) 上的混沌鞍, 图 4(b)为两个混沌吸引子合并形成一大的混沌吸引子 a_{large} .

当 $C = 0$, 通过曲线 CBC2, β 在间隔 $(0.234, 0.233)$ 时的混沌边界激变如图 4(c)和(d)所示. 图 4(c)为混沌吸引子 a_2 碰撞分形吸引域边界 (a_1, a_2) 上的混沌鞍, 图 4(d)为混沌吸引子 a_2 消失, 留下了一个较大的混沌鞍, 分形边界转变为光滑边界.

当 $C = 0$, 通过曲线 CIC1, β 在间隔 $(0.216, 0.215)$ 时的混沌内部激变如图 4(e)和(f)所示. 图 4(e)为混沌吸引子 a_1 碰撞在其吸引域内部的混沌鞍, 图 4(f)为混沌吸引子 a_1 增大.

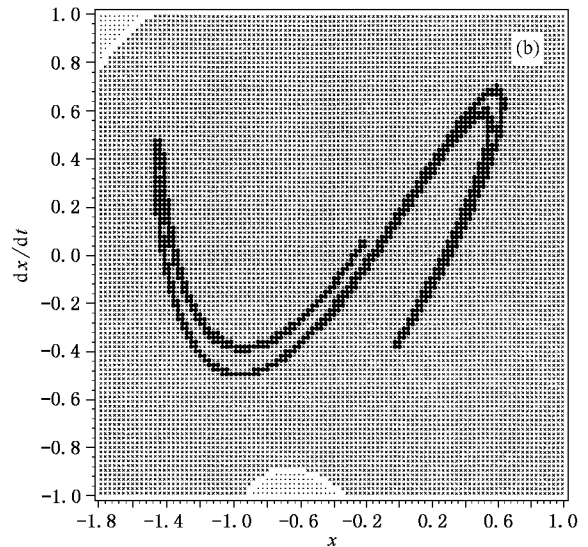
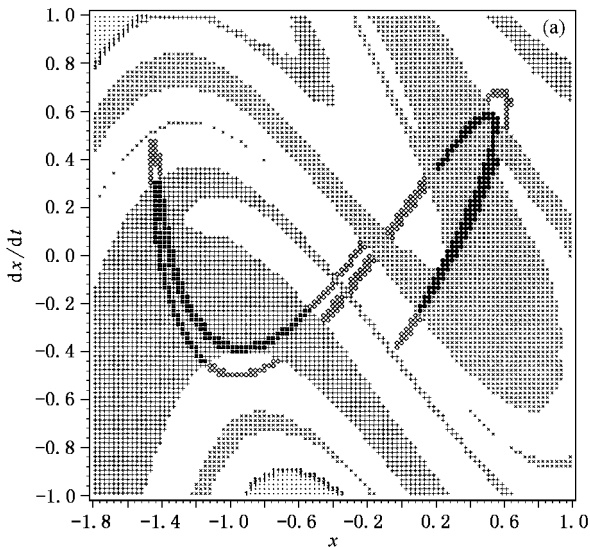
当 $C = -0.008$, 通过曲线 CBC1, β 在间隔 $(0.235, 0.234)$ 时的混沌边界激变如图 4(g)和(h)所示. 图 4(g)为混沌吸引子 a_1 碰撞分形吸引域边界 (a_1, a_2) 上的混沌鞍, 图 4(h)为混沌吸引子 a_1 消失, 留下了一个较大的混沌鞍.

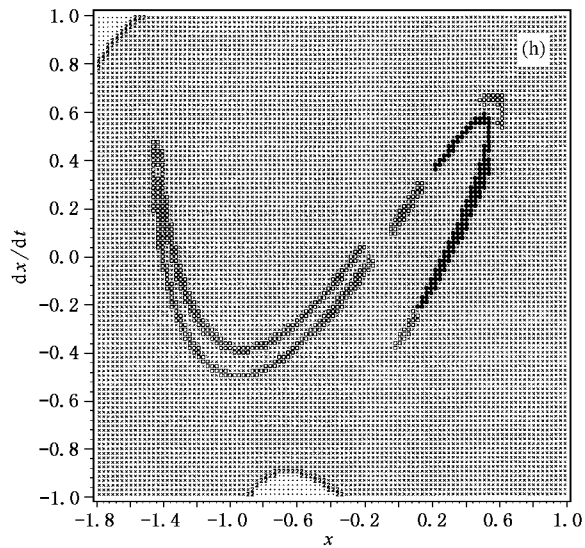
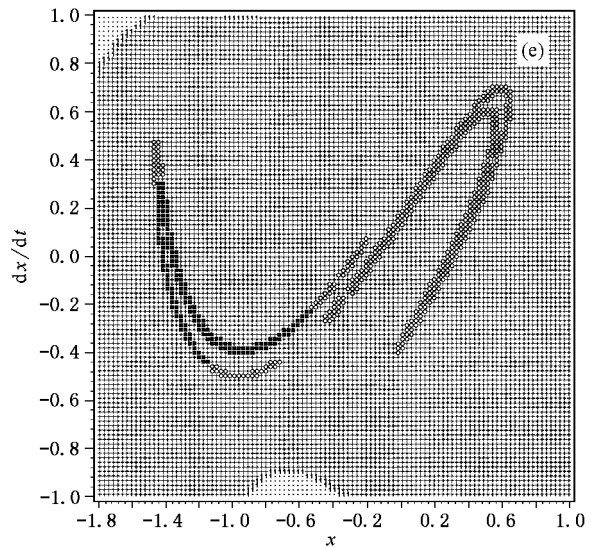
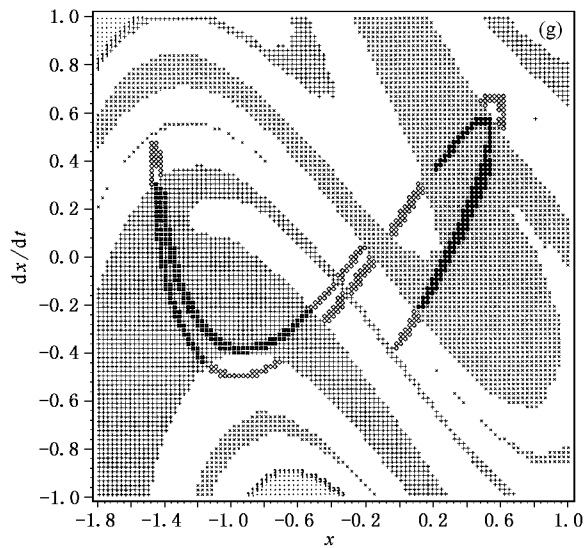
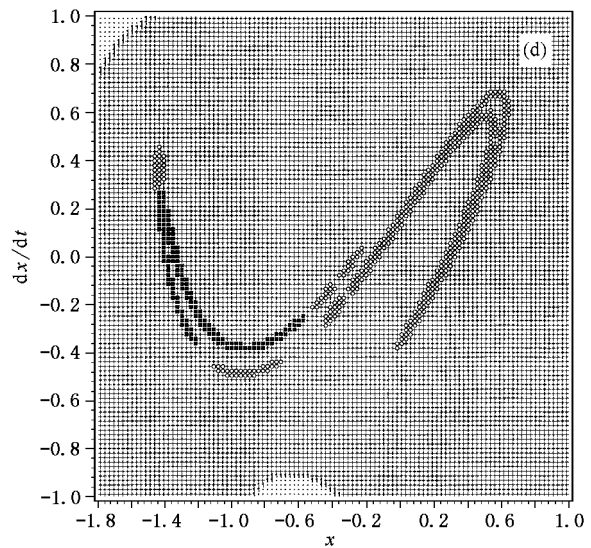
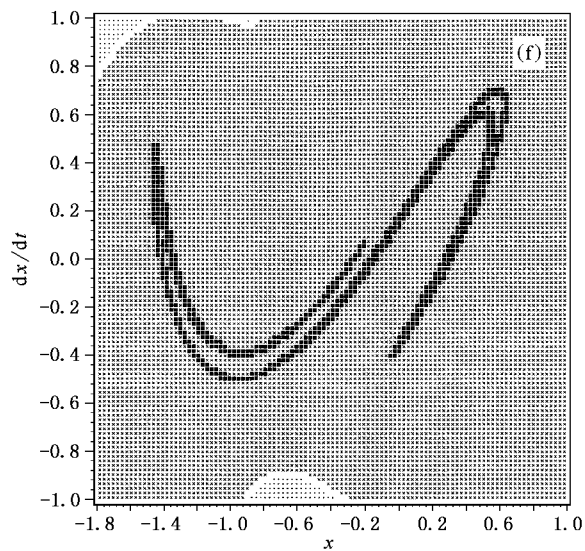
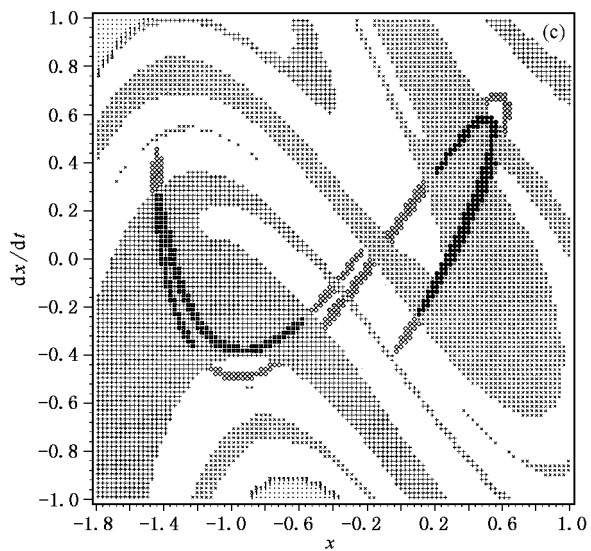
当 $C = -0.008$, 通过曲线 CIC2, β 在间隔 $(0.218, 0.217)$ 时的混沌内部激变如图 4(i)和(j)所示. 图 4(i)为混沌吸引子 a_2 碰撞在其吸引域内部的混沌鞍, 图 4(j)为混沌吸引子 a_2 增大.

4. 结 论

借助于 GCMD 方法, 研究了两个典型的具有常数偏移正弦强迫振子的微分方程, 确定了两参量平面上的双重激变尖点, 在这个尖点上四条激变曲线相汇交, 四种不同的激变重合. 研究涉及双重激变尖点的两种模式, 即两个规则边界激变组合两个混沌内部激变和两个混沌边界激变组合两个混沌内部激变. 物理上, 在这样一个尖点附近的参量扰动(噪声)导致动力学行为戏剧性变化.

对两参量平面上双重激变尖点模式的研究有助于人们进一步探索和理解多参量空间多重激变尖点模式, 可以预见在多参量空间中动力学行为将更加复杂和丰富多彩.





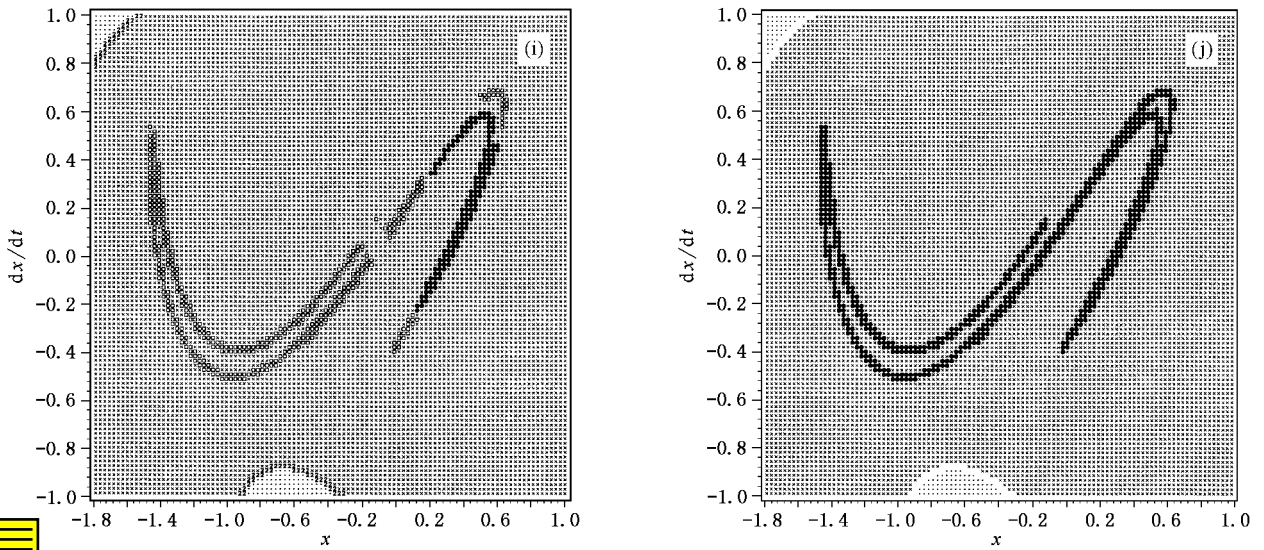


图4 混沌吸引子 a_1 标记符号“■”,它的吸引域标记符号“+”混沌吸引子 a_2 和大混沌吸引子 a_{large} 标记符号“●”,它们的吸引域标记符号“×”陷胞 a_{sink} 的吸引域标记符号“·”在吸引子 a_1 和 a_2 的分形吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 上的混沌鞍标记符号“◇”,在吸引子 a_1 或 a_2 吸引域内部的混沌鞍分别标记符号“○”或“□”吸引域边界 $B(a_1, a_2)$ 和 $B(a_{\text{large}}, a_{\text{sink}})$ 标记空白,吸引域边界 $B(a_1, a_{\text{sink}})$ 或 $B(a_2, a_{\text{sink}})$ 分别标记符号“1”或“2”吸引域边界 $B(a_1, a_2, a_{\text{sink}})$ 标记符号“3” (a)和(b)为 $C = -0.0041, \beta$ 在间隔 $(0.226, 0.224)$ 时的双重激变 (c) 和 (d) 为 $C = 0, \beta$ 在间隔 $(0.234, 0.233)$ 时的混沌边界激变 (e) 和 (f) 为 $C = 0, \beta$ 在间隔 $(0.216, 0.215)$ 时的混沌内部激变 (g) 和 (h) 为 $C = -0.008, \beta$ 在间隔 $(0.235, 0.234)$ 时的混沌边界激变 (i) 和 (j) 为 $C = -0.008, \beta$ 在间隔 $(0.218, 0.217)$ 时的混沌内部激变

- [1] Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [2] Grebogi C, Ott E and Yorke J A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1284
- [3] Wu S G, Ding X L and He D R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) [吴顺光、丁晓铃、何大韧 1999 物理学报 **48** 1810]
- [4] Ma M Q, Che J G and He D R 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1679 (in Chinese) [马明全、车静光、何大韧 2000 物理学报 **49** 1679]
- [5] Hong L and Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]
- [6] Hong L and Xu J X 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 612 (in Chinese) [洪 灵、徐健学 2001 物理学报 **50** 612]
- [7] Gallas J A C, Grebogi C and Yorke J A 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1359
- [8] Stewart H B, Ueda Y, Grebogi C and Yorke J A 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2478
- [9] Rössler O E, Stewart H B and Wiesenfeld K 1990 *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **431** 371
- [10] Xu J X and Hong L 1999 *Acta Mech. Sin.* **31** 724 (in Chinese) [徐健学、洪 灵 1999 力学学报 **31** 724]
- [11] Hong L and Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [12] Hong L and Xu J X 2001 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **11** 723

A Study on the double crisis vertex in a two-parameter plane^{*}

Hong Ling Xu Jian-Xue

(*Institute of Nonlinear Dynamics , Xi'an Jiaotong University , Xi'an 710049 , China*)

(Received 7 January 2002 ; revised manuscript received 21 April 2002)

Abstract

By means of GCMD method , a double crisis of sinusoidally forced oscillators is studied . A double crisis vertex in a two-parameter plane is determined , at which two curves of boundary crisis and two curves of interior crisis meet and four distinct crises coincide . Physically , small parameter perturbation (noise) about such a vertex induces drastic changes in the dynamical behaviour .

Keywords : global analysis , generalized cell mapping , double crisis vertex , chaotic saddle

PACC : 0545 , 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10172067 and 19972051).