

# 时空混沌的单向耦合同步

张 旭<sup>1,2)</sup> 沈 柯<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> 河北工业大学理学院应用物理系, 天津 300130)

<sup>2)</sup> 长春理工大学理学院物理系, 长春 130022)

(2002 年 2 月 2 日收到, 2002 年 4 月 16 日收到修改稿)

以耦合映象格子模型为例, 提出利用单向耦合驱动时空混沌的同步方案, 并进行了数值分析. 结果表明, 适当地选择耦合驱动强度因子和均衡系数, 两个时空混沌系统可以达到准确同步. 通过计算最大条件 Lyapunov 指数, 给出了可实现时空混沌同步的最小耦合强度以及最小耦合强度与系统参数之间的关系曲线. 数值模拟还证明, 此方法工作鲁棒.

关键词: 时空混沌, 同步, 单向耦合, 最大条件 Lyapunov 指数, 数值模拟

PACC: 0545

## 1. 引 言

美国学者 Pecora 和 Carroll (P-C) 率先在 1990 年提出了驱动-响应的混沌同步方案<sup>[1]</sup>, 并在电子电路的实验中实现了混沌同步<sup>[2]</sup>, 然后又从理论上阐明了该类型混沌同步的原理, 开展了把混沌同步应用于保密通讯等研究. 此后, 人们竞相投入到混沌同步的研究中, 相继发展了多种同步方法<sup>[3-7]</sup>, 实验上也获得了成功<sup>[8-10]</sup>. 耦合映象格子模型时空混沌同步的研究, 借鉴了时间混沌同步中的一些方法, 取得了一定的进展<sup>[11-19]</sup>. 从这些同步方案中可以看出, 要实现时空混沌同步就必须从第一个时空混沌态(称作驱动系统)中提取一部分信号, 然后用这些信号去驱动第二个时空系统(称作响应系统), 以达到同步的目的, 或通过两个系统的互相耦合和影响而达到同步. 由于利用同步时空混沌进行扩频通信, 同时具有高保密性和高通信能力(多路信号并行传输), 因此, 进行时空混沌同步的研究具有广阔的应用前景.

本文在单向耦合驱动时间混沌同步方法的基础上, 提出利用单向耦合驱动时空混沌的同步方案, 实现了时空系统的混沌同步, 数值模拟还证明, 此方法对噪声及系统偏差的影响具有一定的抗干扰能力.

## 2. 单向耦合方法的一般描述

单向耦合驱动混沌同步化方案的基本思想是, 要实现两个混沌系统  $S_1, S_2$  的同步, 可以把  $S_1$  的变量以一定比例经过与  $S_2$  相同的延时后耦合到  $S_2$  系

统上, 并进行比例均衡. 对于一般的混沌系统,

$$X = F(X, \mu), \quad (1)$$

构造耦合驱动的同步化系统为

$$X' = F[B(X + KX), \mu], \quad (2)$$

式中  $X$  为状态矢量,  $\mu$  为参数矢量,  $F$  为非线性函数矢量,  $X'$  为被同步的系统的状态参量(被同步的系统可称为响应系统, 相应的(1)式称为驱动系统),  $K$  为耦合驱动强度矩阵因子,  $B$  为均衡矩阵. 通过适当地选择  $K$  和  $B$ , 当  $X$  和  $X'$  取不同的初始值时, 响应系统和驱动系统可达到最终同步, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X' - X\| = 0. \quad (3)$$

由于单向耦合驱动混沌同步化方案无法从理论上给予有效性证明, 所以只能通过数值分析来验证. 不过从(3)式不难看出, 在一维情况下取  $b = (k + 1)^{-1}$  ( $b$  为  $B$  的元素)及  $k \rightarrow \infty$  时(3)式显然成立. 单向耦合驱动混沌同步方法的可取之处在于,  $k$  为有限值(甚至很小)也能满足(3)式, 其目标就是寻找最佳的  $K \otimes B$  使(3)式成立.

## 3. 单向耦合驱动时空混沌同步数值模拟结果

### 3.1. 单向耦合驱动时空混沌同步

我们将单向耦合驱动混沌同步化方案推广到时空混沌系统. 现以一维耦合映象格子作为系统模型<sup>[20]</sup>

$$I_{n+1}(i) = (1 - D) f(I_n(i)) + \frac{D}{2} [f(I_n(i-1)) + f(I_n(i+1))], \quad (4a)$$

式中  $D$  为空间耦合系数,  $i = 1, 2, \dots, L$  为  $X$  轴上的格点坐标,  $L$  为系统尺寸,  $n = 1, 2, \dots, N$  表示离散化时间. 为了实现同步, 构造 (4a) 式耦合驱动的同步行化系统为

$$I'_{n+1}(i) = (1 - D) f\left(\frac{I'_n(i) + kI_n(i)}{1 + k}\right) + \frac{D}{2} \left[ f\left(\frac{I'_n(i-1) + kI_n(i-1)}{1 + k}\right) + f\left(\frac{I'_n(i+1) + kI_n(i+1)}{1 + k}\right) \right], \quad (4b)$$

式中  $k$  为耦合强度因子,  $1/(1+k)$  为均衡系数 (4a) 和 (4b) 式分别表示驱动和响应系统.  $k=0$  相当于无耦合,  $k \rightarrow \infty$  相当于完全驱动. 选取环形腔中激光振荡输出系统的一维迭代模型作为时空系统的局部动力学函数<sup>[21]</sup>

$$f(I_n) = I_n \exp\left(\frac{\alpha}{1 + I_n} - \Gamma\right), \quad (5)$$

式中参数  $\alpha$  和  $\Gamma$  分别代表增益系数和腔损耗. 文献

[22] 已证明 (5) 式的二维空间扩展系统在一定的参数条件下经对称破缺向时空混沌演化.

数值实验表明: 当  $k=0$  时, 在确定的系统参数条件下 (4) 式两个独立的时空系统在选取略微不同的初始条件时, 将会演化为完全不同的时空混沌态; 当  $k$  大于某值  $k_{\min}$  时,  $n \rightarrow \infty$ , (4) 式可有  $|I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)| \rightarrow 0$ , 即可以实现时空混沌的同步. 图 1 分别给出当  $k=0.3$  及  $k=0.1$  时 (4) 式及其差的绝对值的数值迭代结果, 系统参数及初始条件为  $\alpha = 15.367, \Gamma = 11.0, D = 0.2, L = 64, I_0(i) = 0.3, I'_0(i) = 0.31, I_n(0) = I_n(L+1) = I'_n(0) = I'_n(L+1) = 0$ , 去掉前 5000 步作为暂态过程, 耦合从 5200 步开始, 即  $n \leq 5200, k=0; n \geq 5200, k \neq 0$ . 图 1(a)(b)(c) 给出  $k=0.3$  时  $I_{n+1}(i), I'_{n+1}(i), |I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)|$  的时空演化图, 可见耦合启动后两系统达到了准确同步; 图 1(d) 给出当  $k=0.1$  时 (4) 式  $|I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)|$  的时空演化图, 此时两系统还不能达到同步.

要实现时空混沌同步, 只有当耦合系数  $k$  大于  $k_{\min}$  时,  $n \rightarrow \infty$  才有  $|I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)| \rightarrow 0$ . 为了分析

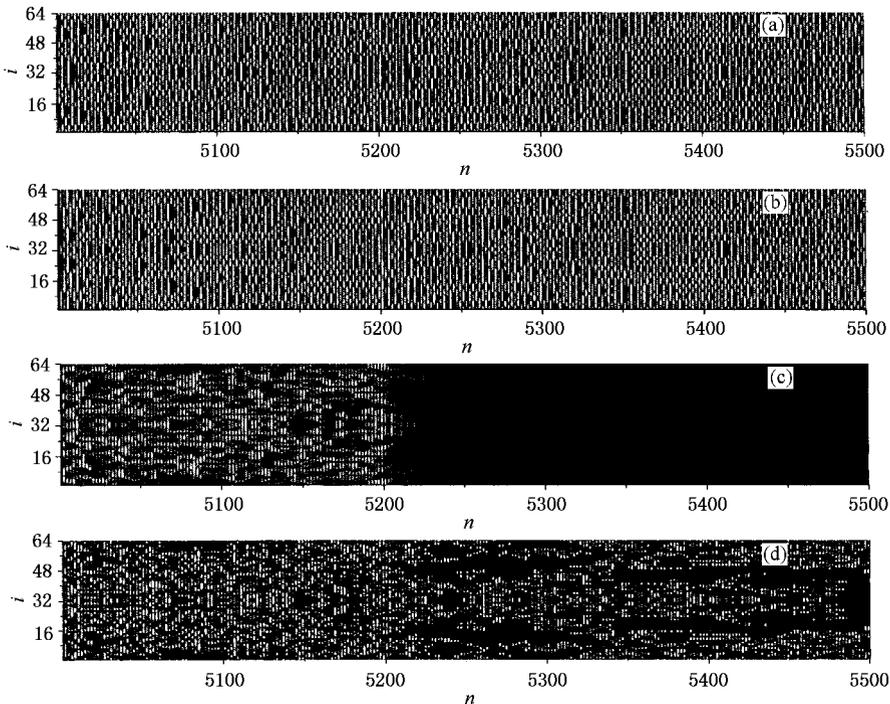


图 1 时空演化图. 系统参数和初始条件为  $\alpha = 15.367, \Gamma = 11.0, D = 0.2, L = 64, I_0(i) = 0.3, I'_0(i) = 0.31, I_n(0) = I_n(L+1) = I'_n(0) = I'_n(L+1) = 0$ , 去掉前 5000 步作为暂态过程, 耦合从 5200 步开始. (a), (b)(c) 分别给出  $k=0.3$  时  $I_{n+1}(i), I'_{n+1}(i), |I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)|$  的时空演化图. (d) 为给出  $k=0.1$  时  $|I_{n+1}(i) - I'_{n+1}(i)|$  的时空演化图.

时空系统(4)式同步化与耦合强度  $k$  的关系,我们作最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  与  $k$  的关系曲线,系统参数、初始条件和边界条件同图 1,取耦合步数  $m = 3000$ ,用后续的  $n = 1000$  步来计算最大条件 Lyapunov 指数,数值计算结果见图 2.在图 2 中,当  $k = 0$  时,得到的  $\lambda_{MCLC}$  相当于(4)式的最大 Lyapunov 指数,即通常的  $\lambda_M$ .最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  变为负值时,根据 He 和 Vaidya 的同步定义,时空混沌同步可以实现.在最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  与  $k$  的关系曲线中,与  $\lambda_{MCLC} = 0$  的直线的交点就是可实现时空混沌同步化的最小耦合强度  $k_{min}$ .数值实验表明,只要满足对应  $\lambda_{MCLC} < 0$  的  $k$  值,都可以实现时空混沌系统的同步.

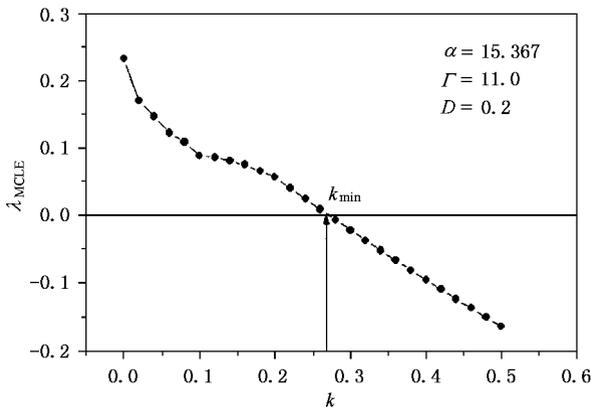


图 2 最大条件 Lyapunov 指数  $\lambda_{MCLC}$  与耦合强度  $k$  的关系曲线,系统参数和初始条件同图 1,数据点代表数值计算结果

对系统参数  $\alpha$  作一族如图 2 这样的曲线,就可以画出  $k_{min}$  与  $\alpha$  的关系曲线,如图 3 所示.同样,系统参数  $\Gamma$  变化时与最小耦合强度  $k_{min}$  的关系见图 4.可见不同的系统参数  $\alpha$  或  $\Gamma$  要求有不同的最小耦合强度,同步化所需要最小耦合强度不规则地依赖于系统参数.其中最小耦合强度为 0 时,系统的局部动力学函数位于周期窗口上,此时时空系统具有空间均匀的行波解,这说明空间均匀的行波解不需要维持耦合,但是系统需要耦合驱动的初始作用,即可实现两系统间的同步化.

现在选取部分格点进行耦合(每  $M$  个格点耦合一个格点,同时两边也进行耦合,其余的格点令  $k = 0$ ),对(4)式的数值实验结果见表 1.表 1 中系统参数和初始条件与图 1 相同,其中  $\times$  表示两系统不能实现同步, $\circ$  表示两系统实现了同步,这里实现同步的含义是,耦合启动后迭代 10 000 步之后  $|I_{n+1}(i) -$

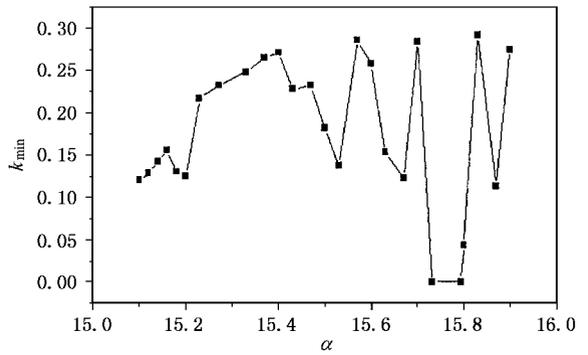


图 3 最小耦合强度  $k_{min}$  与系统参数  $\alpha$  的关系曲线  $\Gamma = 11.0$ ;  $D = 0.2$

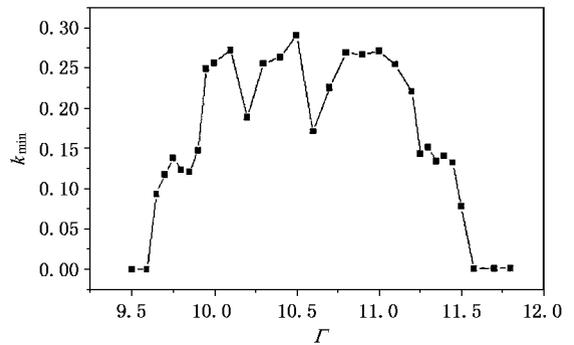


图 4 最小耦合强度  $k_{min}$  与系统参数  $\Gamma$  的关系曲线  $\alpha = 15.367$ ;  $D = 0.2$

$I'_{n+1}(i) < 10^{-12}$ .可见,对  $L$  个格点中的  $L/M$  个格点进行单向耦合,随着  $M$  的增加,必须相应加大系统参数  $D$  和耦合强度因子  $k$  才能实现同步.

表 1 实现同步时  $M$  与系统参数  $D$ 、耦合强度因子  $k$  的取值情况

$D \backslash k$	$M = 2$					$M = 3$					
	0.2	0.25	0.28	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
0.5	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
0.6	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
0.7	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
0.8	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$
0.9	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
1.0	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$

### 3.2. 噪声及系统偏差对同步的影响

要检验一种同步方案的优劣,一方面要看其应用中的方便程度,另一方面还要看其抗噪声及系统偏差的能力,若小噪声导致失同步,那么此方

法不能在实际中应用.

我们令(4)式的两系统参数分别为  $\alpha_1, \Gamma_1, D_1$  及  $\alpha_2, \Gamma_2, D_2$  并且有 1% 的相对偏离, 即  $(\alpha_1 - \alpha_2)/\alpha = 1\%$  ( $\Gamma_1 - \Gamma_2)/\Gamma = 1\%$  ( $D_1 - D_2)/D = 1\%$ . 同时在方程 (4a) (4b) 的状态变量中分别加入独立的随机噪声, 其值分布在  $[0, 0.005]$  之间, 以不同的初始条件求解(4)式, 通过适当地选择  $k$  值, 仍然可以实现两系统间的同步. 数值实验中取  $I_0(i) \in [0.31, 0.31 + 10^{-5}]$ ,  $I'_0(i) \in [0.3, 0.3 + 10^{-5}]$ ,  $k = 0.5$ ,  $\alpha = 15.36$ ,  $\Gamma = 11.0$ ,  $D = 0.2$ , 耦合从 5200 步开始, 其中 (a)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $D_1 = D_2 = D$  (无系统偏差), 无噪声 (b)  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma$ ,  $D_1 = D_2 = D$  (无系统偏差), 加入噪声 (c)  $\alpha_1 = 15.4368$ ,  $\Gamma_1 = 11.055$ ,  $D_1 = 0.201$ ,  $\alpha_2 = 15.2832$ ,  $\Gamma_2 = 10.945$ ,  $D_2 =$

0.199 (有系统偏差), 无噪声 (d)  $\alpha_1 = 15.4368$ ,  $\Gamma_1 = 11.055$ ,  $D_1 = 0.201$ ,  $\alpha_2 = 15.2832$ ,  $\Gamma_2 = 10.945$ ,  $D_2 = 0.199$  (有系统偏差) 加入噪声. 图 5 给出  $|I'_{n+1}(i) - I_{n+1}(i)|$  同步化时空图, 可见在无噪声及无系统偏差时两系统可达到准确同步, 在有噪声或/和有系统偏差时, 仍能实现同步. 我们计算同步化后 (b) (c), (d) 中  $|I'_{n+1}(i) - I_{n+1}(i)|$  的最大摆动幅度, 实验表明在小噪声及系统偏差存在的条件下, 同步化后的最大摆动幅度均在同步化前最大摆动幅度的 10% 以下. 因此, 这种同步化方案在实际中是可以应用的. 当然, 随着噪声和系统偏差的增加,  $|I'_{n+1}(i) - I_{n+1}(i)|$  的摆动幅度也会增大, 加入大的噪声, 两系统便无法实现同步了.

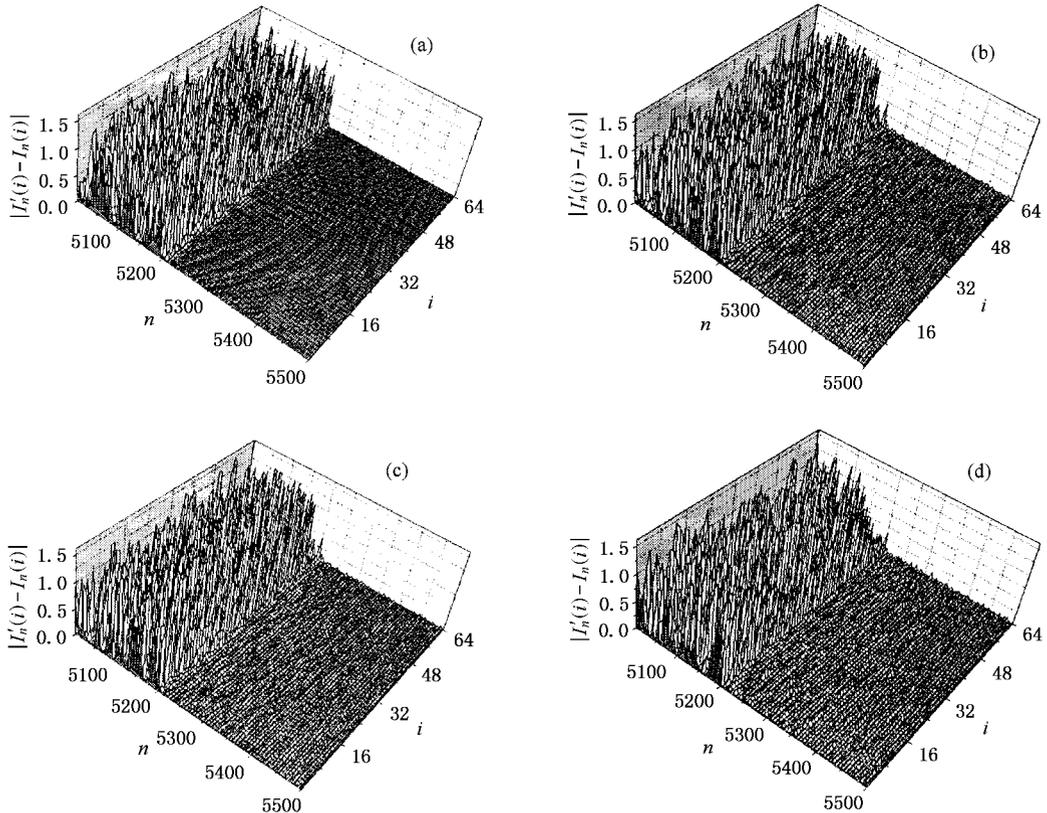


图 5 同步化时空演化图 ( $k = 0.5$ , 耦合从 5200 步开始) (a) 为无噪声无系统偏差 (b) 为有噪声无系统偏差 (c) 为无噪声有系统偏差 (d) 为有噪声有系统偏差

## 4. 结 论

1. 单向耦合驱动时空混沌系统同步是把两个相同的时空混沌系统之一的输出信号耦合到另一个具有不同信号输出的系统中, 此系统在外来信息的

影响下进行信息重组, 特点是进行比例均衡, 当注入的信息足够大时, 两系统就可能输出相同的信息, 达到准确的同步.

2. 此同步方案的关键在于选取合适的耦合强度因子及均衡系数, 在前面的例子中, 我们选择  $b =$

$1/(1+k)$ , 那么  $(I'_n(i) + kI_n(i))/(1+k)$  就是经过比例均衡的, 比例均衡的单向耦合驱动同步有别于完全替代式的驱动同步( PC 同步法), 若满足  $I'_n(i) = I_n(i)$ , 则  $(I'_n(i) + kI_n(i))/(1+k) = I_n(i) = I'_n(i)$ .

3. 当系统参数  $D$  较大时, 通过适当地加大耦合

强度因子  $k$ , 对空间部分格点进行单向耦合仍然可以实现同步.

4. 在小噪声和系统偏差存在的条件下, 数值实验证明此方法仍然有效.

- [ 1 ] Pecora L M and Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 812
- [ 2 ] Carroll T L and Pecora L M 1991 *IEEE Trans. CAS* **38** 453
- [ 3 ] Winful H G *et al* 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1575
- [ 4 ] Kocarev L and Parlitz U 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 5028
- [ 5 ] Liu J G, Shen K and Zhou L W 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1041 ( in Chinese) [ 刘金刚、沈 柯、周立伟 1997 物理学报 **46** 1041 ]
- [ 6 ] Luo X S *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2022 ( in Chinese) [ 罗晓曙等 1999 物理学报 **48** 2022 ]
- [ 7 ] Liu F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1198 ( in Chinese) [ 刘 锋等 1999 物理学报 **48** 1198 ]
- [ 8 ] Roy R *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 2009
- [ 9 ] Sugawara T *et al* 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3502
- [ 10 ] Van Wiggeren D G and Roy R 1998 *Science* **279** 1198
- [ 11 ] Hu G, Qu Z L and He K F 1995 *Int. J. Bifurcation and Chaos* **5** 901
- [ 12 ] Belykh V N and Mosekilde E 1996 *Phys. Rev. E* **54** 3196
- [ 13 ] Kocarev L and Parlitz U 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 2206
- [ 14 ] Xiao J H, Hu G and Qu Z L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4162
- [ 15 ] Hu G, Xiao J H *et al* 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2738
- [ 16 ] Jiang Y and Parmananda P 1998 *Phys. Rev. E* **57** 4135
- [ 17 ] Wang J L *et al* 1998 *Phys. Rev. E* **58** 3017
- [ 18 ] Wang J L and Chen G Z 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1605 ( in Chinese) [ 王金兰、陈光旨 1999 物理学报 **48** 1605 ]
- [ 19 ] Liu Z H, Chen S G and Hu B 1999 *Phys. Rev. E* **59** 2817
- [ 20 ] Kaneko K 1989 *Physica D* **37** 60
- [ 21 ] Lu W P and Tan W H 1987 *Opt. Commun.* **61** 271
- [ 22 ] Zhang X and Shen K 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2116 ( in Chinese) [ 张 旭、沈 柯 2001 物理学报 **50** 2116 ]

## Unilaterally coupled synchronization of spatiotemporal chaos

Zhang Xu<sup>1,2)</sup> Shen Ke<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Applied Physics, Hebei University of Technology, Tianjin 300130, China )

<sup>2)</sup> Department of Physics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China )

( Received 2 February 2002 ; revised manuscript received 16 April 2002 )

### Abstract

Based on a coupled map lattice model, we present an approach of unilateral coupling to implement the synchronization of spatiotemporal chaos. Our numerical simulations show that the two spatiotemporal systems can accurately become synchronized by appropriately selecting the coupling strength and the equilibrium coefficient. We calculate the largest conditional Lyapunov exponent so as to give the minimum coupling strength that can achieve the synchronization, and the functional relationship between the minimum coupling strength and the system parameters. The simulation results also indicate that this method is robust against noise.

**Keywords** : spatiotemporal chaos, synchronization, unilateral coupling, the largest condition Lyapunov exponent, numerical simulation

**PACC** : 0545