

混沌系统的非线性连续预测变结构控制与同步

刘福才¹⁾ 王 娟¹⁾ 石 森²⁾ 高秀伟¹⁾

¹⁾ 燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

²⁾ 中国科学院大连化学物理研究所, 大连 116021)

(2002 年 3 月 31 日收到 2002 年 5 月 2 日收到修改稿)

在连续时间混沌系统的控制与同步问题统一处理的基础上, 给出一种可实现两个相同或不同连续时间混沌系统的控制与同步的预测变结构控制方法. 其控制器由针对对象标称非线性模型设计的连续预测控制器和针对对象不确定性设计的滑模变结构控制器组成. 所提出的方案具有变结构控制鲁棒性强的优点, 实现了系统对参考信号的追踪控制. 数值仿真表明了本方法的有效性.

关键词: 混沌同步, 预测控制, 滑模, 变结构, 鲁棒性

PACC: 0545

1. 引 言

混沌控制^[1-4]与混沌同步^[5,6]问题通过 Kocarev 等^[7,8]的工作合并成了一个问题, 即混沌同步问题可以看成一类让被控系统混沌轨迹按目标系统轨道运动的控制问题. 迄今已提出的实现混沌同步的诸多方法中, 大多集中于混沌系统的自同步研究, 即同步的响应系统和驱动系统具有相同的系统结构, 目前, 对于响应系统和驱动系统具有不同结构的同步研究也引起了关注^[9-11].

本文采用一种基于滑模的非线性连续预测控制方法, 有效的实现了两个相同或不同连续时间混沌系统之间的控制与同步. 由于预测控制利用了系统的精确模型(或称标称模型), 因此当标称系统与实际系统失配时, 使标称系统性能良好的控制器, 有可能使实际系统闭环失稳. 为此利用滑模变结构辅助控制律对连续预测控制律进行改进, 从而使得系统存在模型不确定性时仍能稳定. 仿真结果表明系统参数在很大的范围内变化时系统仍能稳定, 且同步效果良好.

2. 混沌控制与同步问题的描述

给定两个系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) + g \cdot u(t), & x(0) = x_0 \in R^n, \\ y(t) = c(x), \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_d = f_d(x_d(t), t), & x_d(0) = x_{d0} \in R^h, \\ y_d(t) = c_d(x_d), \end{cases} \quad (2)$$

其中系统(1)为受控系统, $x(t) \in R^n$ 为状态向量, 且 $f(x) = [f_1(x) \dots f_2(x) \dots f_n(x)]^T$, $g(x, t) \in R^{n \times 1}$, $u \in R$ 为控制向量, $y \in R$ 为输出向量, $c: R^n \rightarrow R$ 的非线性函数; 系统(2)为目标系统, $x_d(t) \in R^h$ 为状态向量, 且 $f_d(x) = [f_{d1}(x) \dots f_{d2}(x) \dots f_{dh}(x)]^T$, $g(x, t) \in R^{h \times 1}$, $u \in R$ 为控制向量, $y \in R$ 为输出向量, $c: R^h \rightarrow R$ 的非线性函数. 并假定

1) $f(x)$ 与 $c(x)$ 在状态向量集 x 上连续充分可微;

2) $f(x)$ 与 $c(x)$ 在 $x \in X$ 上有界, 则控制与同步问题就是要寻找一个合适的控制作用 $u(t)$ 使

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |e(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_d(t)| = 0 \quad (3)$$

成立. 显然, 由于没有对 $f(x, t)$ 的限制, 两个混沌系统的控制与同步问题具有一般的意义.

3. 非线性连续预测变结构控制器设计

3.1. 基于滑模的非线性连续预测控制

为实现混沌系统的控制与同步, 研究系统(1), 对 y 求导, 直到 y 的 r 阶导数中出现控制作用 u , 其中 r 称为相对阶次, 有

$$\begin{cases} y^{(j)} = L_f^j c & j = 1, 2, \dots, r-1, \\ y^{(r)} = L_f^r c + (L_g L_f^{r-1} c)u, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $L_f^j c$ ($j = 1, 2, \dots, r$) 为 c 沿 f 的 j 次李导数, $L_g L_f^{r-1} c$ 为 $L_f^{r-1} c$ 沿 g 的李导数. 有

$$y_r = \alpha(x) + \beta(x)u, \quad (5)$$

式中 $\alpha(x) = L_f^r c$, $\beta(x) = L_g L_f^{r-1} c$. 定义函数

$$s = e^{(r-1)} + k_{r-2} e^{(r-2)} + \dots + k_1 \dot{e} + k_0 e, \quad (6)$$

式中 $e = y - y_d$, 选取 k_j ($j = 0, 1, \dots, r-2$) 使得多项式 $\mu(\lambda) = \lambda^{r-1} + k_{r-2} \lambda^{r-2} + \dots + k_1 \lambda + k_0$ 的特征根具有负实部, 即(6)式渐近稳定. 这里 s 为跟踪系统滑模控制的切换函数. 对 s 求导, 并整理得到

$$\dot{s} = y_r - y_d^r + z, \quad (7)$$

式中 $y_d^r = (y_d^{(r)})^r$, $z = \sum_{j=0}^{r-2} k_j e^{(j+1)}$.

设 $\delta > 0$, 则 $s(t + \delta)$ 的预测值为

$$s(t + \delta) \approx s(t) + \delta \dot{s}(t), \quad (8)$$

取性能指标为

$$J(x, u, t) = \frac{1}{2} [Qs^2(t + \delta) + Ru^2(t)], \quad (9)$$

式中 $Q > 0, R \geq 0$. 求解预测控制问题 $\min_{u(t)} J(x, u, t)$, 由 $\partial J / \partial u = 0$ 求得单步连续预测控制律 u_{npc} 为

$$u_{\text{npc}} = -\delta(R + \delta^2 \beta^2 Q)^{-1} \delta Q [s + \delta(\alpha + z - y_d^r)]. \quad (10)$$

当目标系统满足(2)式, 且 $R = 0$ 时, 由(4)(7)和(10)式得到

$$\dot{s} = -\delta^{-1} s. \quad (11)$$

因此 $s(t) = s(0)e^{-\delta^{-1}t}$, 即对于任意初始状态 $s(0)$, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0$, 由(6)式有 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$, 且 $s(t)$ 收敛速度与 δ 有关.

由于预测控制利用了系统的精确模型(或称标称模型), 因此当参数发生摄动时很难保证系统的鲁棒稳定性, 下面利用滑模变结构辅助控制律对连续预测控制律进行改进.

3.2. 基于滑模的预测变结构控制

假设被控制混沌系统发生摄动时描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t) + \Delta f(x(t), t), \\ y(t) = cx, \end{cases} \quad (12)$$

式中 f 为系统标称参数, Δf 为不确定项, 最大变化范围已知. 则由 3.1 节推导有

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \Delta\alpha, & \beta &= \beta' + \Delta\beta, \\ z &= z' + \Delta z, & s &= s' + \Delta s. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中各参数计算与前面标称参数计算方法相同.

利用(7)式切换函数 s , 求取变结构控制作用 u_{vsc} , 使得控制 $u = u_{\text{npc}} + u_{\text{vsc}}$ 能够鲁棒镇定系统(12). 其中 u_{npc} 为标称系统的基于滑模的非线性连续预测控制器.

由(7)式得到

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \alpha'(x) + \Delta\alpha(x) + (\beta'(x) + \Delta\beta(x)) \\ &\times (u_{\text{npc}} + u_{\text{vsc}}) - y_d^r + z' + \Delta z. \end{aligned} \quad (14)$$

令 $\dot{s} = F(x, u_{\text{vsc}})$ 测得状态变量 x 后, 计算 s , 利用广义滑模存在条件

$$s\dot{s} < 0, \quad (15)$$

求解下面不等式组可得到 u_{vsc} .

$$\begin{cases} F(x, u_{\text{vsc}}) < 0 & \text{当 } s > 0 \text{ 时;} \\ F(x, u_{\text{vsc}}) > 0 & \text{当 } s < 0 \text{ 时;} \end{cases} \quad (16)$$

求解一般的非线性方程组(16)很困难, 因此作一些简化, 令

1) 非线性预测控制性能指标中不对控制量加权, 即 $R = 0$;

2) 令变结构控制律

$$u_{\text{vsc}} = -(\beta')^{-1} \varphi \text{sgr}(s); \quad (17)$$

3) 在实际中(10)式中的 s 和 z 由实际测量得到的输出误差及相应的导数求得, 故对象摄动前后的 s 和 z 可以不加区别.

实际上, 这些假设是允许的. 基于上述假定, (10)式化为

$$u_{\text{npc}} = -\delta^{-1} \beta^{-1} [s + \delta(\alpha + z - y_d^r)], \quad (18)$$

将(17)和(18)式代入(14)式整理得到

$$\begin{aligned} \dot{s} &= -\delta^{-1} (1 + \Delta\beta \beta')^{-1} s \\ &- (1 + \Delta\beta \beta')^{-1} \varphi \text{sgr}(s) + \xi, \end{aligned} \quad (19)$$

式中 $\xi = \Delta\alpha - \Delta\beta \beta')^{-1} (\alpha' + z - y_d^r)$. 令 $\Delta = \lambda$, $\Delta\beta = \lambda\beta'$, 且 $|\lambda| < 1$, 则有 $|\Delta\beta \beta')^{-1}| < 1$. 令 $\Delta\beta \beta')^{-1} = \gamma$ 将(19)式代入 $s\dot{s} < 0$ 有

$$\varphi \geq -\delta^{-1} |s| + (1 + \gamma)^{-1} \xi \text{sgr}(s), \quad (20)$$

取 $\varphi > (1 + \gamma)^{-1} |\xi|$ 即可. 推导过程可知 φ 满足广义滑模存在条件. 实际上, 滑模变结构控制器的求取只需知道 $\Delta\alpha$ 和 $\Delta\beta$ 的最大变化范围即可. 则基于滑模的连续预测变结构控制器为

$$u = u_{\text{npc}} + u_{\text{vsc}}. \quad (21)$$

定理 1 基于滑模的非线性连续预测变结构控制器可以实现(12)式描述受控混沌系统与(2)式描述的目标混沌系统的同步, 且跟踪误差

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

证 取 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2} s^2 > 0$, 有 $\dot{V} = s\dot{s} <$

0 故系统大范围稳定于条件 $s = 0$. 又由(6)式描述的滑模运动方程可知,选取合适的参数,有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0.$$

注:当系统存在不确定性时,利用变结构控制器 u_{vsc} 可使得系统鲁棒稳定;当系统处于标称状态时, $u_{vsc} = 0$,控制器为基于滑模的预测控制器 u_{npc} .

4. 仿真研究

为了验证上述结论,下面分别给出 Jerk 方程和杜芬方程的控制与同步的仿真结果.

4.1. 同步两个不同参数的混沌 Jerk 方程

混沌 Jerk 方程^[12]为

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx + Cx + Dx^3 = 0,$$

式中 A, B, C, D 为系统参数.取 $x = x_1$,则它的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -Cx_1 - Dx_1^3 - Bx_2 - Ax_3, \\ y = x_1. \end{cases}$$

当受控系统的参数取为 $\{A = 1, B = 3.5, C = 9.6, D = -1\}$,目标系统的参数取为 $\{A = 1, B = 3.5, C = -5.5, D = 1\}$ 时,两系统处于混沌状态.在受控系统上加入控制项 $gu(t)$.为实现两个不同参数系统间的同步控制,取

$$g = [0 \ 0 \ 1]^T, \text{ 则 } r = 3.$$

同时取 $\delta = 0.1, R = 0, Q = 100$.滑模切换函数 $s = \ddot{e} + 0.8\dot{e} + e$.

图 1 给出了系统在标称参数下的跟踪误差信号 $e(t)$ 的仿真结果.此时的变结构控制作用为零,控制器为基于滑模的连续预测控制器.

图 2 为受控系统参数摄动到原参数的 1.2 倍,而未使用变结构控制器 u_{vsc} ,只作用预测控制量 u_{npc} 时的输出误差 $e(t)$ 的仿真结果图.由图 2 可见,预测控制利用了系统的精确模型,当参数发生摄动时很难保证系统的鲁棒稳定性.

图 3 为受控系统有参数摄动时,使用基于滑模的连续预测变结构控制器后,输出误差 $e(t)$ 的仿真结果图.仿真结果表明,基于滑模的连续预测变结构控制系统参数在 $\pm 50\%$ 的变化范围内仍然具有较好的跟踪特性,这是由于在基于系统标称模型的非线

性预测控制律的基础上附加了一个变结构控制律.

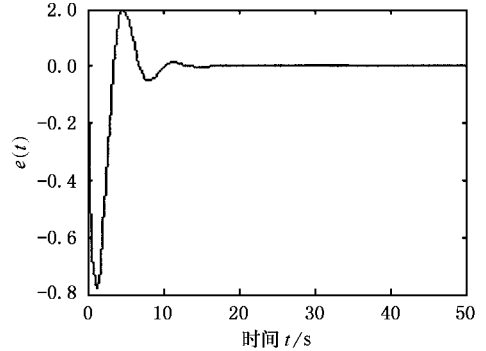


图 1 同步误差曲线(标称情况)

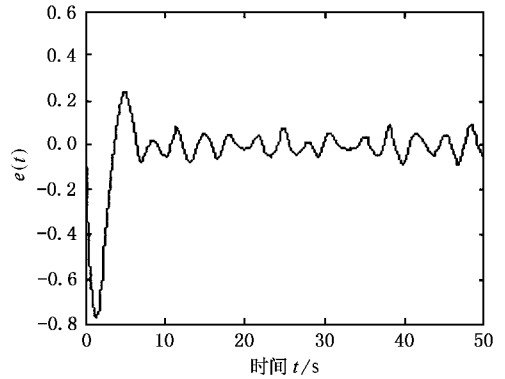


图 2 同步误差曲线(未使用变结构控制器 u_{vsc})

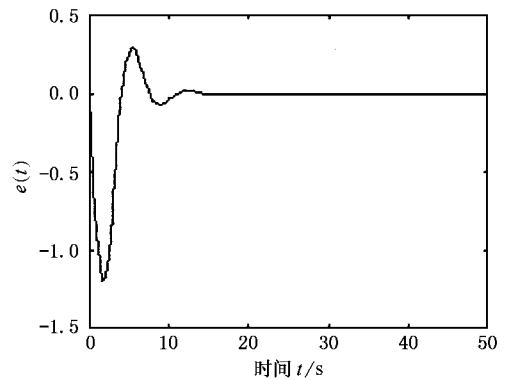


图 3 同步误差曲线(有参数摄动情况)

4.2. 基于混沌杜芬方程的仿真研究

杜芬方程^[13]为

$$\ddot{x} + ax + x^3 = b \cos t,$$

式中 a, b 为系统参数.取 $x = x_1, \dot{x}_1 = x_2$ 则它的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - x_1^3 + b\cos t, \\ y = x_1. \end{cases}$$

当受控系统的参数取为 $\{a = 0.1, b = 3.5\}$, 目标系统的参数取为 $\{a = 0.2, b = 5.0\}$ 时, 两系统处于混沌状态. 在受控系统上加入控制项 $gu(t)$. 为实现两个不同参数系统间的同步控制, 取

$$g = [0 \quad 1]^T, \text{ 则 } r = 2.$$

图 4 为取 $\delta = 0.001, R = 0, Q = 100$, 滑模切换函数 $s = \dot{e} + 35e$ 时, 受控系统在标称参数下的跟踪误差信号 $e(t)$ 的仿真结果. 此时的变结构控制作用为零, 控制器为基于滑模的连续预测控制器.

图 5 为受控系统参数摄动到原参数的 1.2 倍, $\delta = 0.1, R = 0, Q = 100$, 滑模切换函数 $s = \dot{e} + 5e$ 时, 作用基于滑模的连续预测控制变结构控制器后, 输出误差 $e(t)$ 的仿真结果. 仿真结果表明, 基于滑模的连续预测变结构控制系统参数在 $\pm 50\%$ 的变化范围内仍然具有较好的跟踪特性.

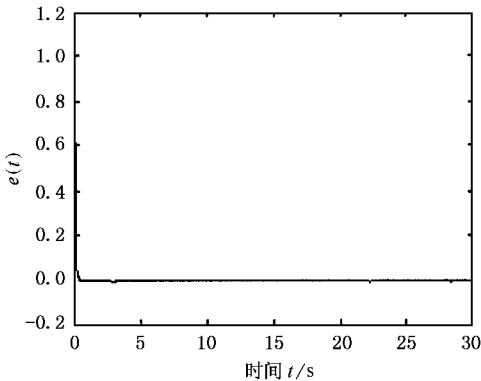


图 4 杜芬系统控制同步误差(标称情况)

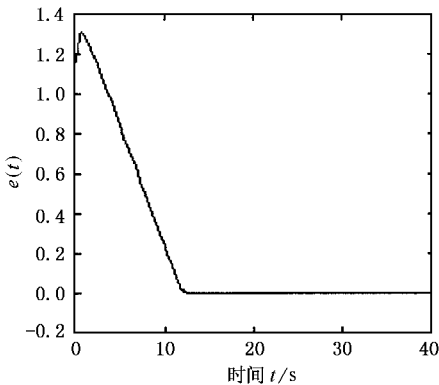


图 5 杜芬系统同步误差曲线(参数摄动情况)

4.3. 两个不同结构混沌系统的同步仿真研究

受控混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = -Cx_1 - Dx_1^3 - Bx_2 - Ax_3, \\ y = x_1, \end{cases}$$

式中 $\{A = 1, B = 3.5, C = 9.6, D = -1\}$.

目标混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_2 - x_1^3 + b\cos t, \\ y = x_1, \end{cases}$$

式中 $\{a = 0.1, b = 3.5\}$. 此时两系统处于混沌状态. 受控系统上加入控制项 $gu(t)$. 为实现两个不同参数系统间的同步控制, 取

$$g = [0 \quad 0 \quad 1]^T, \text{ 则 } r = 3.$$

同时取 $\delta = 0.005, R = 0, Q = 100$. 滑模切换函数 $s = \dot{e} + 0.8\dot{e} + 30e$.

图 6 为受控系统在标称参数下的跟踪误差信号 $e(t)$ 的仿真结果. 此时的变结构控制作用为零, 控制器为基于滑模的连续预测控制器.

图 7 为受控系统参数摄动到原参数的 1.2 倍, 作用基于滑模的连续预测控制变结构控制器后, 输出误差 $e(t)$ 的仿真结果. 仿真结果表明, 基于滑模的连续预测变结构控制系统参数在 $\pm 50\%$ 的变化范围内仍然具有较好的跟踪特性.

如果采样步长 δ 变小, 同步效果会更好一些, 但会增加计算量.

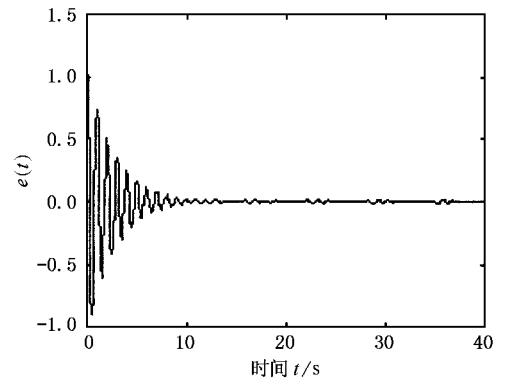


图 6 异结构混沌同步误差曲线(标称情况)

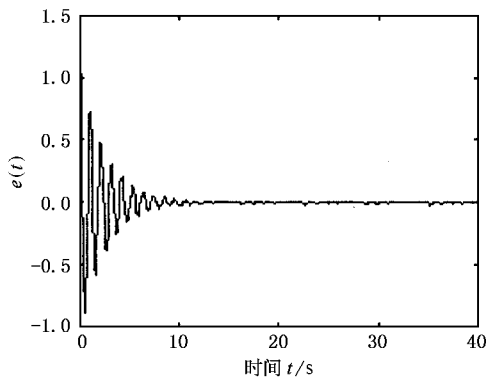


图 7 异结构同步误差曲线(参数摄动)

4. 结 论

本文通过将连续时间混沌系统的控制与同步问题统一考虑,并在系统状态变量有界的前提下,设计出的控制器可以实现一大类连续时间混沌系统的控制与同步.一般情况下,其控制器由针对对象标称非线性模型设计的连续预测控制器和针对对象不确定性设计的滑模变结构控制器组成.当系统存在不确定性时,利用变结构控制器 u_{vsc} 可使得系统鲁棒稳定;当系统处于标称状态时 $u_{vsc} = 0$,控制器为基于滑模的预测控制器 u_{npc} .采用本文设计的控制器可以实现两个相同或不同的混沌控制与同步,且控制是大范围渐近稳定的.

- [1] Li L X , Peng H P , Lu H B and Guan X P 2001 *Chin. Phys.* **10** 796
- [2] Hu G , Xiao J H and Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p1 (in Chinese) [胡 岗、萧井华、郑志刚 2000 混沌控制(上海 :上海科技教育出版社),第 1 页]
- [3] Luo X S , Kong L J and Qu W L 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1078 (in Chinese) [罗晓署、孔令江、屈万里 1998 物理学报 **47** 1078]
- [4] Zhang J S and Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 (in Chinese) [张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121]
- [5] Lai J W , Zhon S P , Li G H and Xu D M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 21 (in Chinese) [赖建文、周世平、李国辉、徐得名 2001 物理学报 **50** 21]
- [6] He M F , Mu Y M and Zhao L Z 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 830 (in Chinese) [贺明峰、穆云明、赵立中 2000 物理学报 **49** 830]
- [7] Kocarev L , Shang A and Chua L O 1993 *Int. J. Bifurc. Chaos* **3** 479
- [8] Wu C W , Chua L O 1994 *Int. J. Bifurc. Chaos* **4** 979
- [9] Li L X , Peng H P , Lu H B and Guan X P 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 629 (in Chinese) [李丽香、彭海朋、卢辉斌、关新平 2001 物理学报 **50** 629]
- [10] Guan X P , Fan Z P , Peng H P and Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1670 (in Chinese) [关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 1670]
- [11] Gao J F , Luo X J , Ma X K , Pan X Q and Wang J K 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1618 (in Chinese) [高金峰、罗先觉、马西奎、潘秀琴、王俊昆 1999 物理学报 **48** 1618]
- [12] Malasoma J M 2000 *Phys. Lett. A* **264** 383
- [13] Liu S D and Liu S S 1989 *Nonlinear Dynamics and Complicated Phenomena* (Beijing : Weather Publishing Company) p183 (in Chinese) [刘式达、刘式适 1989 非线性动力学和复杂现象(北京 :气象出版社)第 183 页]

Nonlinear continuous predictive variable structure control and synchronization of chaotic systems

Liu Fu-Cai¹⁾ Wang Juan¹⁾ Shi Miao²⁾ Gao Xiu-Wei¹⁾

¹⁾*Institute of Electrical Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*

²⁾*Dalian Chemical and Physical Research Institute, Chinese Academy of Sciences, Dalian 116021, China*

(Received 31 March 2002; revised manuscript received 2 May 2002)

Abstract

This paper presents a predictive variable structure control method for the control and synchronization of chaotic nonlinear dynamic systems based on a unified frame for both the control and the synchronization. Two controllers are designed. One is the predictive controller for nominal model, and the other is a variable structure controller for system perturbation. The tracking control of reference signal is realized, and the method has the merit of robustness of variable structure control. The effectiveness of the proposed method are proved by numerical simulations.

Keywords : chaotic synchronization, predictive control, sliding mode, variable structure, robustness

PACC : 0545