

# 评价奇怪吸引子分形特征的 Grassberger-Procaccia 算法<sup>\*</sup>

王安良<sup>†</sup> 杨春信

(北京航空航天大学飞行器设计与应用力学系, 北京 100083)

(2002 年 3 月 31 日收到, 2002 年 5 月 2 日收到修改稿)

基于 Lorenz, Rössler 和 Hénon 三种典型的奇怪吸引子, 全面分析了 Grassberger-Procaccia(缩写 G-P)算法, 详细讨论了采样数据量、延迟时间、重构相空间维数和线性区长度等参数对计算关联维数和 Kolmogorov 熵的影响. 结果表明这些关键参数是相互关联的. 通过分析关联积分谱的变化趋势, 发现延迟时间与重构相空间维数对连续动力系统和离散动力系统的作用效果是不同的, 且选择最佳延迟时间对计算关联维数的意义不大. 指出了实际应用中 G-P 算法应注意的问题.

关键词: 奇怪吸引子, Grassberger-Procaccia 算法, 关联维数, Kolmogorov 熵

PACC: 0555, 4752

## 1. 引 言

分形主要研究不平滑和不可微分的几何结构, 而混沌则针对非周期与非随机的动力过程. 大量研究证实混沌时间序列构造的吸引子就是分形集. 最初人们用相图或庞加莱截面来直观地描述吸引子的结构<sup>[1]</sup>. 自从分形理论产生以来, 分形维数作为刻画动力系统是否具有混沌特征的定量指标之一, 倍受研究者的重视<sup>[2-4]</sup>. 对于分形维数, 比较严格的数学定义是豪斯道夫维数, 但是受数据量的限制难以在实际中应用. Russell 等<sup>[5]</sup>指出李雅普诺夫指数与奇怪吸引子的分形维数具有密切关系, 并通过李雅普诺夫指数提取了分形维数, 然而李雅普诺夫指数本身也不容易计算准确. 最早用于计算分形维数的简单方法是盒子法, 但是 Greenside 等<sup>[6]</sup>发现盒子法针对高维系统计算速度太慢, 并容易受噪声的影响且无法应用于实验数据. 基于 Packard 等<sup>[7]</sup>的延迟嵌入空间思想, Grassberger 和 Procaccia<sup>[8]</sup>在 1983 年提出了一个针对实验数据的方法, 即通过单变量时间序列在重构相空间上关联积分  $C(r)$  与距离  $r$  的关系获取分形维数, 后来被称为 G-P 算法, 从而使评价混沌系统的分形特征进入实际应用阶段. 目前为止,

G-P 算法已广泛用于地质测量<sup>[9]</sup>、气象灾害预报<sup>[10, 11]</sup>、沸腾传热<sup>[12]</sup>以及信号处理<sup>[13-15]</sup>等领域.

应该指出的是, 在分析实际动力系统时, 通常并不知道系统是否具有混沌特性, 而应用 G-P 算法受参数选择的影响, 并且对于不同类型的动力系统, 没有一种通用的参数选取标准. 因此, 本文基于 Lorenz, Rössler 和 Hénon 等三种经典的奇怪吸引子全面分析了 G-P 算法, 指出了采用该方法计算关联维数和 Kolmogorov 熵时, 应慎重选取数据量、延迟时间、重构维数以及线性区长度等关键参数. 尤其重要的是, 我们发现对于不同类型的奇怪吸引子, 延迟时间的作用价值有所不同.

## 2. 奇怪吸引子与 G-P 算法

### 2.1. 相空间重构与奇怪吸引子

相空间重构的基本思想是, 一般动力系统中单一分量的演化都是由与之相互作用的其他分量决定的. 相关分量的信息就隐含在该分量的发展过程中. 动力系统在高维相空间中所描述出来的相对低维的稳定轨道被称为吸引子. 对于某些动力学系统虽然遵循严格的确定性规则, 但是其运动过程是非周期

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 50176003)资助的课题.

<sup>†</sup> Tel 010-82317514 E-mail anliangwang@163.com

且难以预测的,比如大气中的湍流.然而它们并不是无从控制的随机过程.通过选择适当的延迟时间在相空间重构测量或数值计算的单变量序列,即可构造吸引子.混沌系统的吸引子结构通常情况下表现出确定的轨迹和丰富的细节,并具有不随参数连续变化的分形特征,因此被人们称为奇怪吸引子<sup>[7]</sup>.

一类吸引子属于连续动力学系统,通常表示为函数的形式.其中最著名的是 Lorenz 方程<sup>[2]</sup>.美国气象学家 Lorenz 最早通过对流实验研究,得到了一个描述奇怪吸引子特征的动力学方程

$$\begin{cases} dx/dt = \alpha(y - x), \\ dy/dt = (b - z)x - y, \\ dz/dt = xy - cz. \end{cases} \quad (1)$$

方程(1)中常数在一定范围取值时,三个变量相空间构造的吸引子呈现自相似的结构特征,图1所示系数取值为  $a = 16, b = 40, c = 4$ . Binder 和 Laverde 等<sup>[16]</sup>采用高阶小步长的方法精确求解了 Lorenz 方程(系数  $a = 8/3, b = 26.5, c = 1$ )构造的庞加莱截面显示出很好的自相似性,计算的盒维数  $D = 2.052$ .

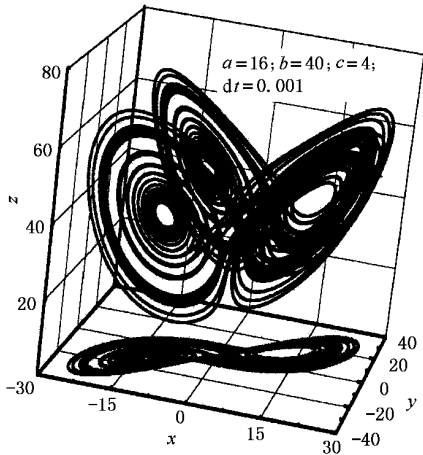


图1 Lorenz 吸引子

后来, Rössler 对 Lorenz 方程进行了简化,建立了一个相对简单的三维系统,它只有一个非线性交叉项,方程如下:

$$\begin{cases} dx/dt = -(y + z), \\ dy/dt = x + ay, \\ dz/dt = b + z(x - c), \end{cases} \quad (2)$$

式中系数  $a, b, c$  在一定范围取值时,系统处于混沌状态.例如:  $a = 0.15, b = 0.2, c = 10.0$ . 选择迭代步长为  $\pi/100$  时,构造的吸引子如图2所示,盒维数  $D = 2.01$ .

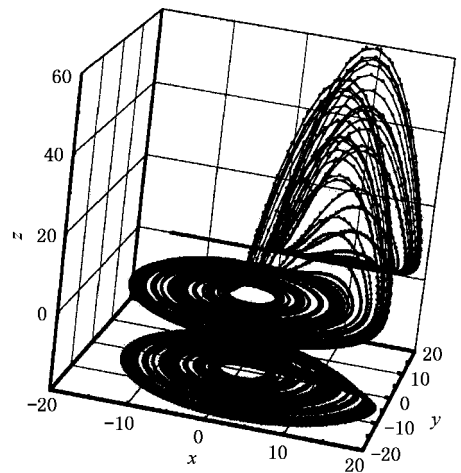


图2 Rössler 吸引子

另一类吸引子属于离散动力系统,一般可以用映射或迭代等方式生成,在拓扑空间一般用图描述.人们研究最多的是 Hénon 映射<sup>[3]</sup>(如图3所示),表示形式为

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases} \quad (3)$$

在系数  $a = 1.4, b = 0.3$  时(3)式生成的时间序列呈现混沌动力学特征,盒维数  $D = 1.21$ .

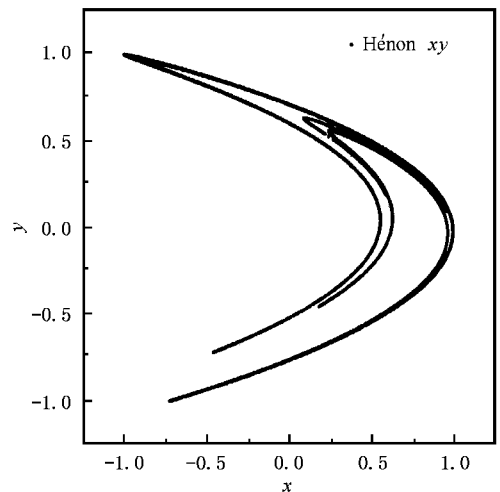


图3 Hénon 映射图

上述三个具有代表性的奇怪吸引子均能够用微分方程或迭代形式表示,具有确定的状态参数.但是对于实际的复杂动力系统,获取所有的状态参数是比较困难的,而测量单个变量的时间序列却相对比较容易.通过对时间序列的相空间重构,构造的奇怪吸引子在一定程度上反映系统的演化规律.通过分

析相空间重构吸引子的结构来评价动力系统的混沌特性变,即为 G-P 算法的基本思想.

## 2.2. G-P 算法

基于重构相空间的思想, G-P 算法<sup>[8]</sup>的基本思路如下:

将一组测量的单变量时间序列  $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$  嵌入到  $m$  维欧氏空间  $R^m$  中 ( $N$  为正整数), 组成一个集合, 记为

$$X_n(m, \tau) = (x_n, x_{n+\tau}, \dots, x_{n+(m-1)\tau}) \\ n = 1, \dots, N_m, \quad (4)$$

式中  $N_m = N - (m-1)\tau$ ;  $\tau$  为延迟时间.

任选集合中的一个参考点  $X_i$ , 计算其余  $N_m - 1$  个点到  $X_i$  的距离, 可以用不同的范数来表示距离, 如:

$$\text{一范数 } d_{1ij} = d_1(X_i, X_j) \\ = \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} |x_{i+l\tau} - x_{j+l\tau}|, \quad (5)$$

$$\text{二范数 } d_{2ij} = d_2(X_i, X_j) \\ = \left[ \frac{1}{m} \sum_{l=0}^{m-1} (x_{i+l\tau} - x_{j+l\tau})^2 \right]^{1/2}, \quad (6)$$

$$\text{极大值范数 } d_{3ij} = d_3(X_i, X_j) \\ = \max\{|x_{i+l\tau} - x_{j+l\tau}| : \\ 0 \leq l \leq m-1\}. \quad (7)$$

这三种距离公式是拓扑等价的, 选择  $d_1$  或  $d_3$  表示距离计算量较小, 并且可以采用递推的方法减少重复计算, 提高计算速度<sup>[9]</sup>.

对所有的  $X_i$  重复这一过程. 在重构空间  $R^m$  中, 对轨道长度为  $N$  的吸引子, 关联积分可近似表示为

$$C_m(r) = \frac{2}{N_m(N_m-1)} \sum_{i,j=1}^{N_m} H(r - r_{ij}), \quad (8)$$

式中  $H$  为 Heaviside 函数,

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0; \\ 0 & x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Grassberger 和 Procaccia<sup>[8]</sup>定义的关联维数计算形式为

$$D_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C_m(r)}{\log r}. \quad (10)$$

定义的二阶 Kolmogorov 熵 (order-2 Kolmogorov entropy, 简称  $K_2$  熵) 为<sup>[17]</sup>

$$K_2 = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log C_m(r)}{\log C_{m+1}(r)}. \quad (11)$$

实际中, 人们能获得的数据量都是有限的, 计算时采用  $\log C_m(r)$  和  $\log r$  双对数坐标图上线性区的斜率近似表示关联维数  $D_2$ , 而截距的变化率则近似表示  $K_2$  熵, 本文中称  $\log C_m(r)$  在双对数坐标图上的系列值为关联积分谱. 应用 G-P 算法计算关联维数  $D_2$  与  $K_2$  熵时, 依赖以下关键参数: 1) 数据量  $N$ ; 2) 重构相空间的延迟时间  $\tau$ ; 3) 重构维数  $m$ ; 4) 双对数坐标图上线性区的长度  $s$ ; 5) 信噪比. 合理选择这些参数对准确计算关联维数  $D_2$  与  $K_2$  熵具有重要意义.

## 3. 关键参数分析

### 3.1. 采样数据量

在测量与计算能力允许的情况下, 测量的实验数据越多越能准确反映实际系统的特征, 但是数据量为多大应用 G-P 算法才是有效的?

Smith<sup>[18]</sup>最早建议  $4\lfloor D \rfloor$  作为相空间重构的最小数据量  $N$ , 其中  $D$  表示大于关联维数的最小整数. Theiler<sup>[19]</sup>从理论上分析了数据量  $N$  对关联维数的计算精度的影响. 与 Theiler 同年, Nerenberg 和 Essex<sup>[20]</sup>提出了一个采用重构维数  $m$  计算最小数据量  $N$  值的复杂公式. 随后, Eckmann 和 Ruelle<sup>[21]</sup>推导了一个与关联维数相关的数据量  $N$  的取值范围公式, 并认为计算李雅普诺夫指数需要的数据量至少为关联维数的一倍. 目前为止, 研究者们已经达成共识: 混沌动力系统的分形维数越大, 所需要的数据量就越多. 对于高维系统, G-P 算法受计算代价的限制将难以实际应用. 为了克服这个缺点, 研究者们已经对 G-P 算法进行了适当的改进, 以满足高维、大数据量以及在线计算的需要<sup>[22-24]</sup>.

本文采用的三个典型吸引子的盒维数都不大于 3, 即需要的数据量均不大. 本文的重点是讨论延迟时间  $\tau$  和重构维数  $m$  的选择对评价不同类型动力系统的影响及限制. 为了方便比较, 三个吸引子各提取  $1 \times 10^4$  个数据点, 这个数据量满足以上所有研究者的最小数据量限制, 并对所有的数据进行标准化处理 (每个值除以其中最大绝对值), 使数据量  $N$  对计算结果的影响减小到最小.

### 3.2. 延迟时间

延迟时间  $\tau$  对计算关联维数具有重要的影响.

Brown 等<sup>[25]</sup>认为选择延迟时间对准确计算李雅普诺夫指数的意义也很大. Fraser 和 Swinney<sup>[26]</sup>首先提出用互信息( mutual information )第一次达到最小作为重构相空间的最佳延迟时间. Liebert 和 Schuster<sup>[27]</sup>随后用关联积分代替互信息简化了 Fraser 的方法. 杨志安等<sup>[28]</sup>采用等间距法计算互信息比等概率法更加简单实用. 尽管如此, 计算互信息仍然无法避免大量的计算和复杂的空间划分, 所以孙海云等<sup>[29]</sup>研究了实际系统的实验数据, 认为时间序列的四分之一周期是延迟时间的最合理选择. 然而 Wu<sup>[30]</sup>通过计算 Rössler 吸引子的分形维数, 发现最小互信息的延迟时间的二分之一使计算结果最优. 事实上, 研究者们采用互信息等方法选择最佳延迟时间主要为了保证相空间重构吸引子的几何结构最好, 一般不考虑延迟时间的选择对关联维数  $D_2$  的影响, 而 Wu<sup>[30]</sup>只是分析了 Rössler 吸引子这一特殊情况, 并不一定具有普遍性.

为了充分理解延迟时间的选择对计算关联维数  $D_2$  的影响, 本文首先计算了 Lorenz, Rössler 和 Hénon 三种吸引子的互信息如图 4 所示. 图 4 中延迟时间  $\tau$  的单位为采样间隔, 上述三个吸引子的互信息第一次达到最小的延迟时间  $\tau_{min}$  分别为 51, 29 和 21. 本文进一步选择不同的延迟时间, 研究所计算的关联积分谱的变化趋势. 下面以重构维数  $m = 2$  和 7 的情况为例, 详细地讨论延迟时间  $\tau$  对评价不同类型动力系统分形特征的影响. 从计算结果可以看出:

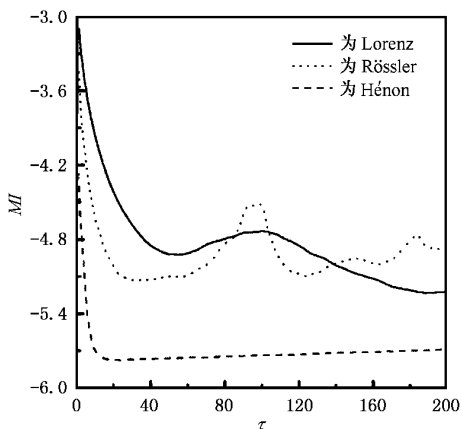


图 4 互信息图

1) 延迟时间  $\tau$  从 1 增加  $\tau_{min}$  过程中, 图 5 和图 6 的结果显示 Lorenz 和 Rössler 吸引子的关联积分谱在线性区逐渐向下平移, 而斜率基本保持不变. 在重构维数  $m$  较大时, 随着延迟时间  $\tau$  的增加, 受噪声(或统计误差)的影响关联积分谱出现了分散与波动, 且线性区有所减小.

2) 在固定重构维数  $m$  的情况下, Hénon 吸引子的关联积分谱线性区的斜率对选择延迟时间  $\tau$  比较敏感(如图 7), 延迟时间  $\tau$  越大则斜率越陡, 特别是对较大的重构维数, 变化趋势更明显, 如图 7(b) 所示. 当延迟时间  $\tau$  增大到一定程度时, 线性区出现了完全重合的现象, 继续增加延迟时间  $\tau$  值几乎不影响关联积分的值.

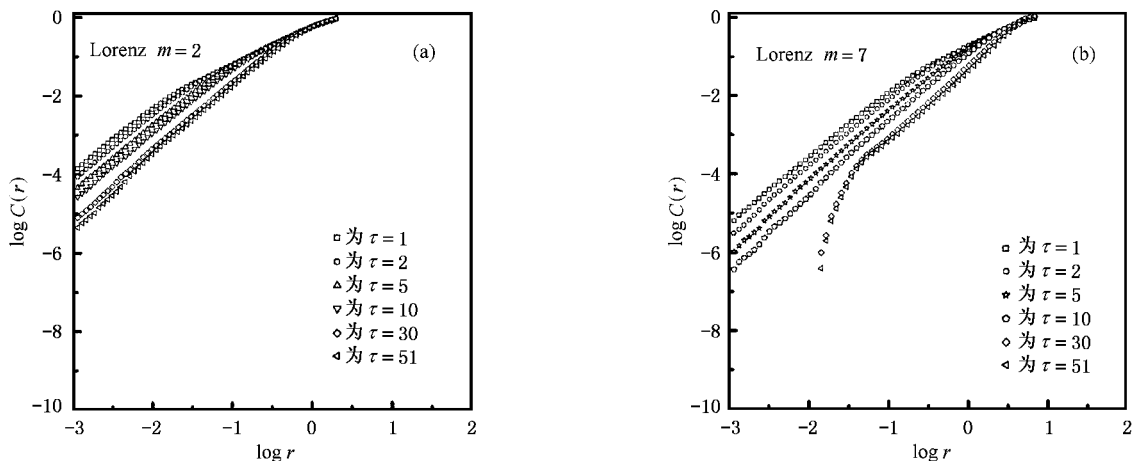


图 5 固定重构维数  $m$ , Lorenz 吸引子关联积分谱的变化趋势

3) 这三个吸引子的计算结果都表明, 以互信息(或关联积分)第一次达到最小作为选择最佳延迟时

间  $\tau$  的依据对准确计算关联维数意义不大. 在较小的重构维数  $m$  下, 随着延迟时间  $\tau$  的改变, 关联积

分谱的线性区并没有明显的变化,如图 5 至图 7(a) 所示,对于较大重构维数  $m$  的情况下,图 5(b)和图 6(b)中延迟时间  $\tau = \tau_{\min}$ ,关联积分的线性区最短甚至出现波动,而图 7(b)中延迟时间  $\tau = 5$  时,关联积

分谱已经没有明显的线性区,当延迟时间  $\tau > 10$  后,关联积分谱基本上已经重合在一起,改变延迟时间  $\tau$  对计算结果影响很小。

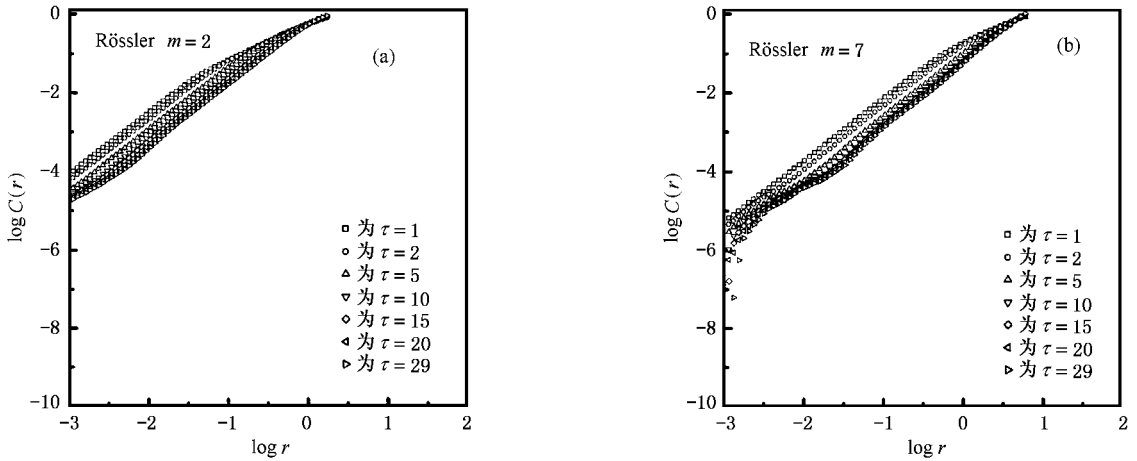


图 6 固定重构维数  $m$ ,Rössler 吸引子关联积分谱的变化趋势

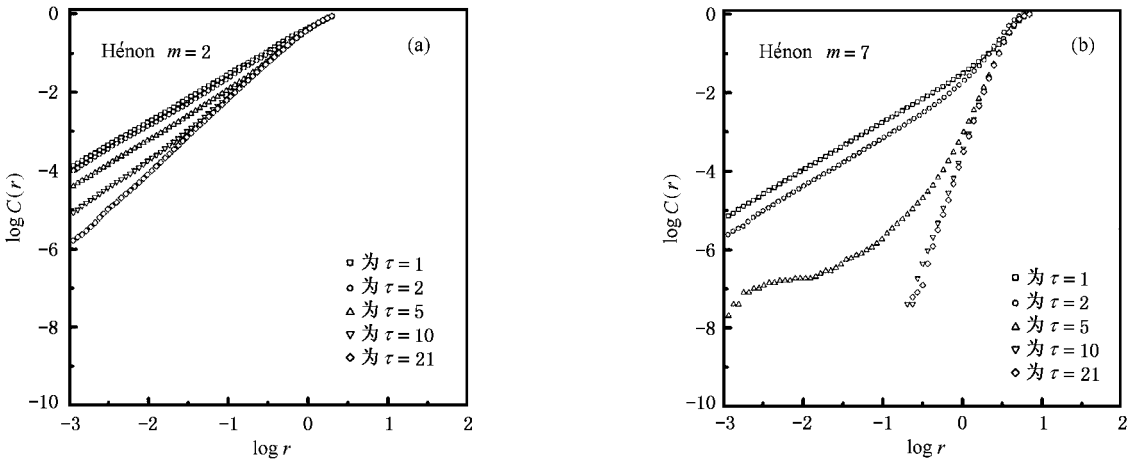


图 7 固定重构维数  $m$ ,Hénon 吸引子关联积分谱的变化趋势

通过以上分析,我们可以看出对不同类型的吸引子随着延迟时间  $\tau$  的改变,关联积分谱的变化趋势明显不同.计算结果还表现出延迟时间  $\tau$  的选择与重构维数  $m$  有一定的关系。

### 3.3. 重构维数

重构维数  $m$  影响数据量  $N$  和延迟时间  $\tau$  的选择,进而影响关联维数  $D_2$  的计算.Ding 等<sup>[31]</sup>认为对于无限长的无噪声混沌信号,只要重构维数  $m$  比关联维数  $D_2$  大,最小的  $m$  都能较准确地计算  $D_2$ ,而对

于有限含噪声信号,需要选择较大的  $m$ .Ding 等<sup>[31]</sup>的结论是在延迟时间  $\tau$  一定的情况下得到的,并不具有普遍性,例如:Hénon 映射  $\tau = 1$ ,Mackey-Glass 方程  $\tau = 100$ .本文对上述两类典型的吸引子,选择不同的延迟时间  $\tau$  值( $\tau = 1, 5, 10, \tau_{\min}$ ),研究重构维数  $m$  从 2 增大到 20 关联积分谱的变化趋势,以及对计算关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的影响,计算结果显示(如图 8 至图 10 所示):

1)取较小的延迟时间  $\tau$  时,随着重构维数  $m$  的增大,Lorenz 吸引子的关联积分谱的线性度和线性区

大小变化不大,如图 8(a1)所示.而对大的延迟时间  $\tau$  线性区长度随  $m$  增大而减小.当  $\tau = \tau_{\min}$  时,图 8(c1)显示随着  $m$  的增大线性区的斜率先增大后减小,如图 8(a2)至图 8(c2)所示关联维数  $D_2$  的计算结果直接反映了这种变化趋势.

2) Rössler 吸引子情况与 Lorenz 类似,稍微不同的是在计算关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵时,对延迟时间的选择更加不敏感(如图 9 所示).

3) 对连续动力系统,延迟时间  $\tau$  的选择对计算关联维数  $D_2$  有一定的影响,而  $K_2$  熵受延迟时间  $\tau$  的影响较小.选择不同的延迟时间  $\tau$ ,  $K_2$  熵的值变化不大,并随着重构维数  $m$  的增大逐渐减小且趋近于一个常数.这说明了关联维数  $D_2$  表征的是吸引子的几何特征,不同的延迟时间  $\tau$  对吸引子的几何结构有影响,而  $K_2$  熵反映的是系统的复杂程度,对于采样间隔选择没有直接的联系.

4) 当延迟时间  $\tau = 1$  时,随着重构维数  $m$  的增加 Hénon 吸引子关联积分谱的线性区变化平缓,反映在关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵图上: $D_2$  略有增加, $K_2$  逐渐减小并趋近于一常数.当  $\tau > 1$  时,随着  $m$  的增大线性区变化较大,即  $D_2$  迅速增大,而  $K_2$  先减小后增大,当  $\tau \geq \tau_{\min}$  后,线性区的变化就不受延迟时间  $\tau$  的影响了.

5) 本文采用 G-P 算法同时计算了数据量  $N = 1 \times 10^4$  的高斯白噪声的关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵(如图 11 所示).图 10(c)和图 11 的结果显示出极大的相似性,这说明随着延迟时间  $\tau$  的增大, Hénon 吸引子的不相关程度变化比 Lorenz 和 Rössler 吸引子大,当延迟时间  $\tau$  大到一定程度时, Hénon 吸引子在相空间上的相邻点几乎是不相关的.

考虑到重构维数  $m$  与延迟时间  $\tau$  的相互作用, Albano 等<sup>[32]</sup>提出嵌入窗口(embedding window)的概念,并把关联窗口  $(m-1)\tau \approx m\tau$  作为计算参数,但是 Lai 和 Lerner<sup>[33]</sup>认为延迟时间  $\tau$  和重构维数  $m$  对关联维数的影响强度是不等价的. Lai 和 Lerner 并给出了一个延迟时间  $\tau$  的上限公式,公式中包括数据量  $N$ , 关联维数  $D_2$ , 重构维数  $m$  和  $K_2$  熵等参数,即隐含了这些关键参数具有内在的联系.通过对图 8 至图 10 的结果分析,我们进一步发现这两个参数对

连续动力系统和离散动力系统具有不同的作用效果.马军海等<sup>[34]</sup>分别以 Lorenz 和 Hénon 吸引子为参照,应用 Lai 和 Lerner 的公式对同一个动力系统的实验测量数据,计算的  $\tau_{\max}$  差别很大.这从另一面说明了首先应定性地判别实际系统的动力学特性,对已知的混沌动力学系统,采用 Lai 和 Lerner 的公式估计延迟时间  $\tau$  的上下界限才有意义.

### 3.4. 线性区长度与信噪比

上面分析可以看出,通过最小二乘法拟合关联积分谱的线性区计算关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵,这就面临一个不可忽视的问题:如何确定线性区的长度?汪富泉等<sup>[9]</sup>把关联积分谱简单地分成三个区,假设中间段为线性区并采用三段逼近法确定其长度.但是关联积分谱往往不能简单看作三个区,而且有时线性区的长度也很短.为了延长线性无标度区, Judd<sup>[35]</sup>对 G-P 算法进行了修正. Lai 和 Lerner<sup>[33]</sup>的工作实质上也是确定线性区的范围.本文的计算结果显示线性区在对数坐标图上没有严格的分界点,而线性区的选择对计算关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的值非常敏感(如图 8 至图 10).更为基本的问题是,对于不同类型的混沌系统,线性区随参数变化的趋势并不相同,即使对于高斯白噪声关联积分谱也具有很好的线性区,这是造成关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵往往计算误差较大的重要原因.因此首先定性判断混沌系统的性质,选择最佳线性区才具有实际意义.

人们一直非常重视噪声信号对混沌动力系统的影响<sup>[41]</sup>.最近, Casaleggio 和 Corana<sup>[14]</sup>对 G-P 算法进行了改进,他们采用两个系数来修正线性区的线性度和关联维数,并提出了使用范围更广的广义维数,这样做的目的在于能够评价系统中信噪比特征.但是他们同样忽视了即使纯的噪声信号,关联积分谱也可能具有很好的线性度.关联积分谱线性度的破坏不一定是由信号中掺入了噪声而造成的.所以首先判别实际测量的时间序列属于周期信号、混沌信号、噪声还是它们的混合信号,应具有重要意义.采用更有效的非线性方法分离和评价混沌信号中的噪声是我们进一步的研究工作.

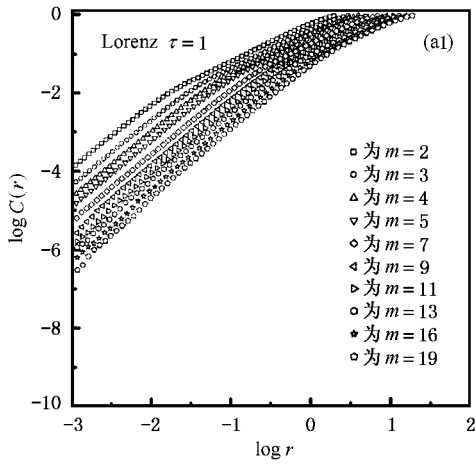


图 8(a1)

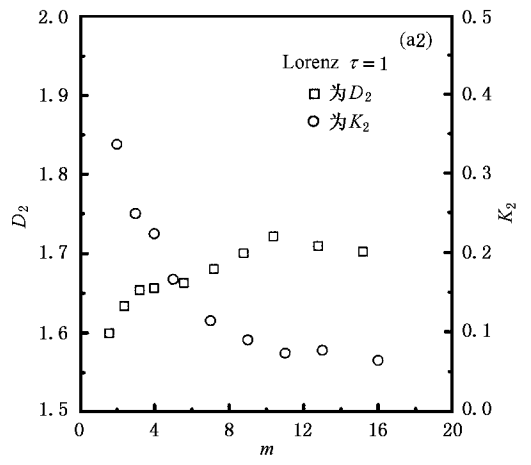


图 8(a2)

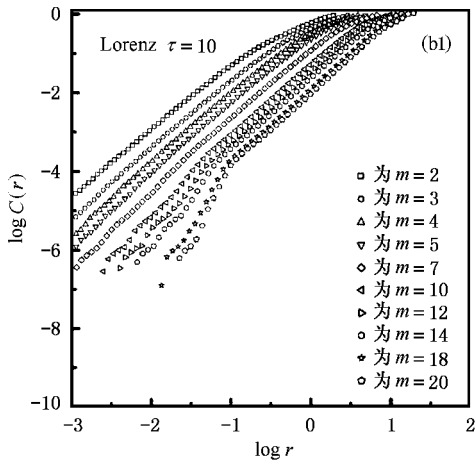


图 8(b1)

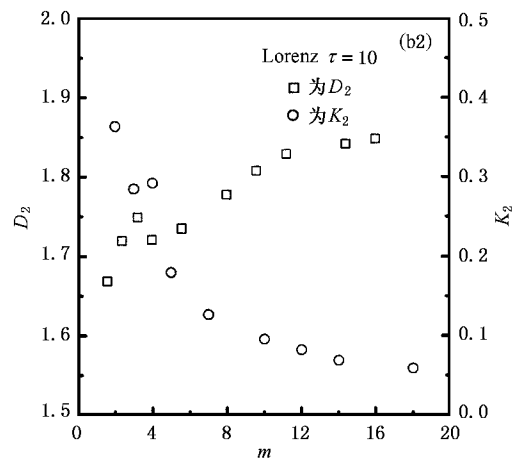


图 8(b2)

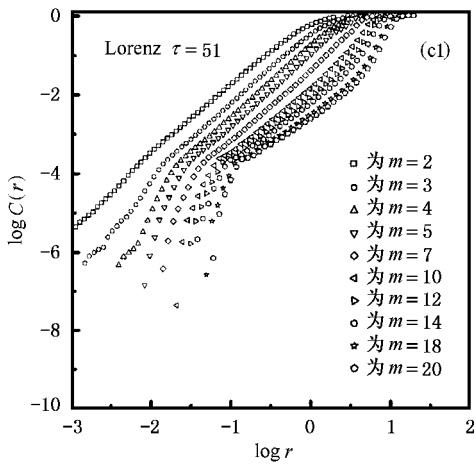


图 8(c1)

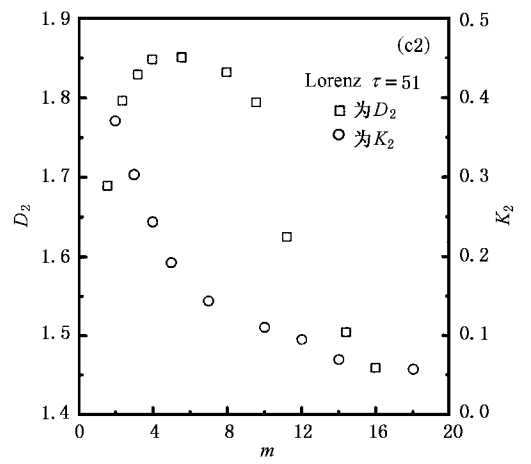


图 8(c2)

图 8 固定延迟时间  $\tau$  Lorenz 吸引子的关联积分谱、关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的计算结果



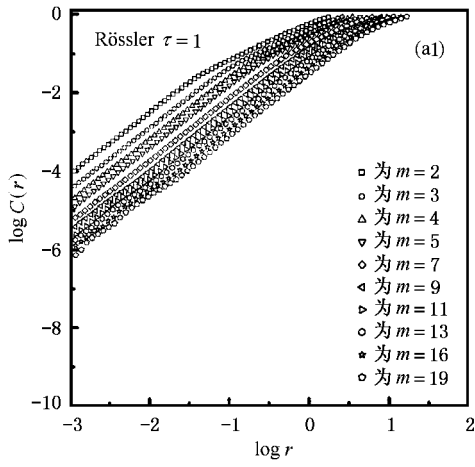


图 9(a1)

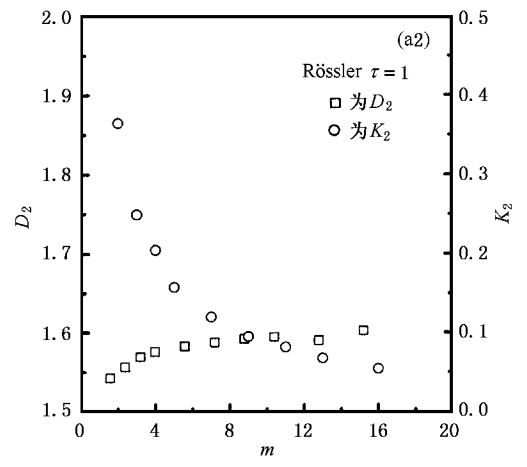


图 9(a2)

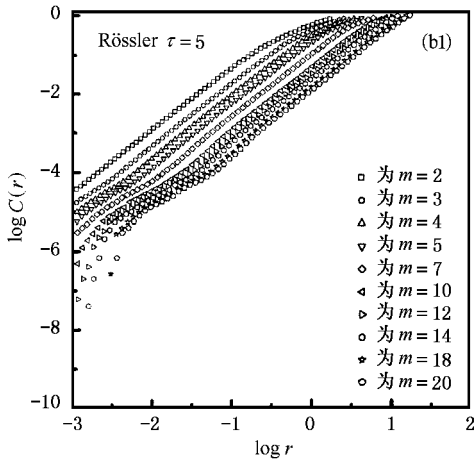


图 9(b1)

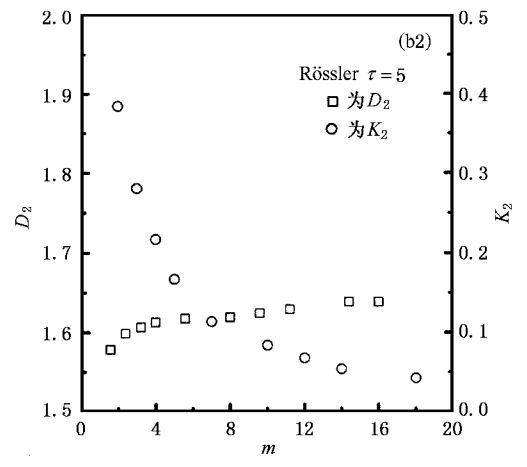


图 9(b2)

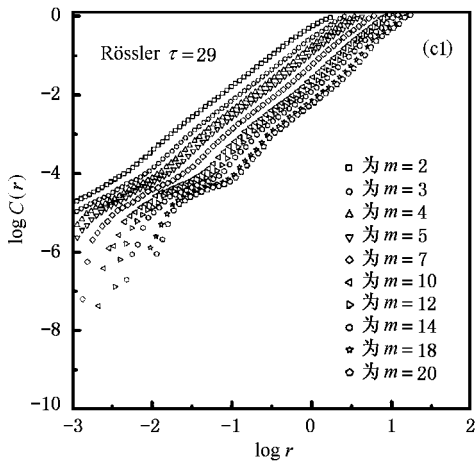


图 9(c1)

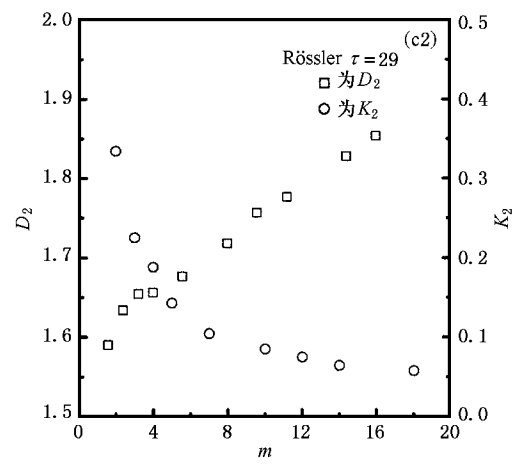


图 9(c2)

图 9 固定延迟时间  $\tau$  Rössler 吸引子的关联积分谱、关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的计算结果





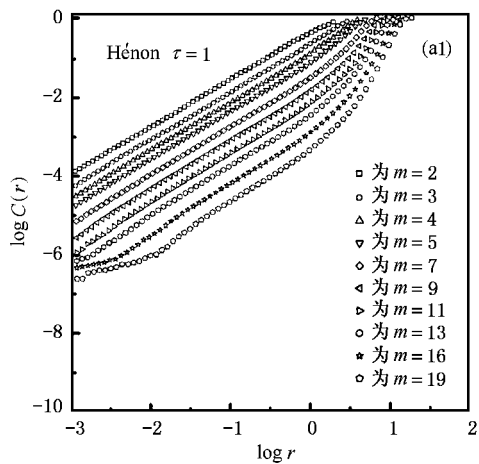


图 10(a1)

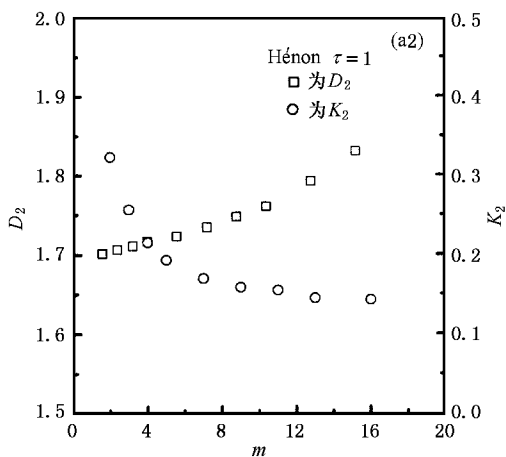


图 10(a2)

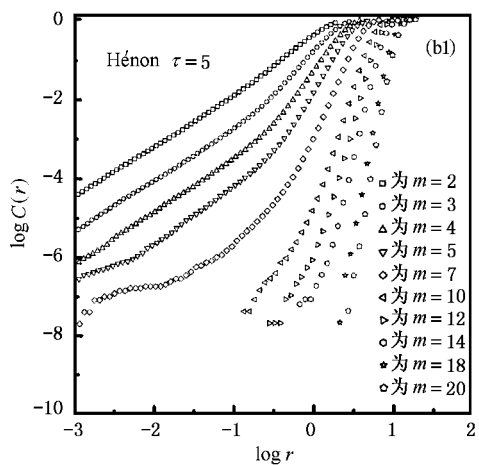


图 10(b1)

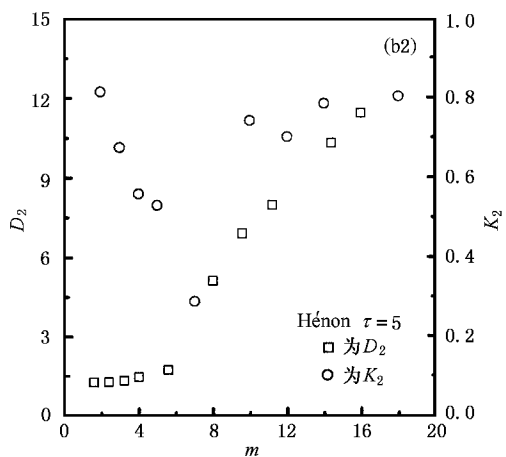


图 10(b2)

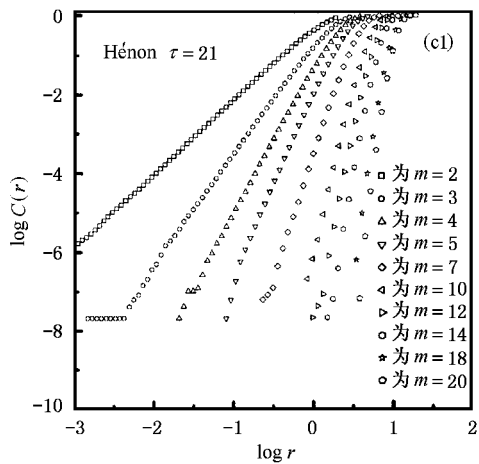


图 10(c1)

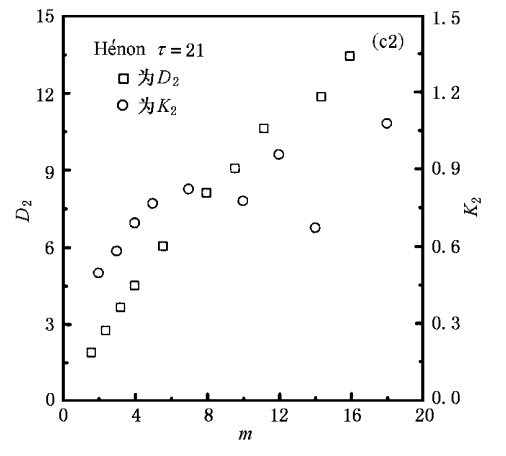


图 10(c2)

图 10 固定延迟时间  $\tau$  Hénon 吸引子的关联积分谱、关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的计算结果



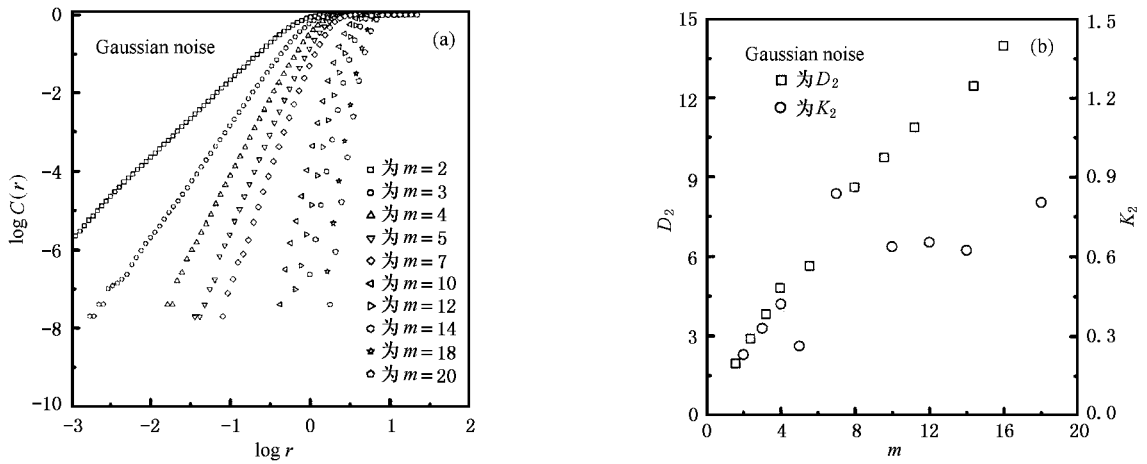


图 11 固定延迟时间  $\tau$  高斯白噪声的关联积分谱、关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵的计算结果

## 4. 结 论

通过本文对 G-P 算法的关键参数分析,我们得到以下结论:

1. G-P 算法计算关联维数  $D_2$  和  $K_2$  熵时,采样数据量、延迟时间、重构相空间维数和线性区长度等关键参数是相互影响的.对任意的动力学系统,简单地选取延迟时间和重构维数不能准确评价系统的分形特征,并且延迟时间与重构维数对于不同类型的动力系统的作用效果是不同的.

2. 把互信息或相关函数的第一次达到最小作

为最佳的延迟时间的选取方法,对于计算关联维数意义并不大.延迟时间的选择对 Lorenz 和 Rössler 吸引子作用很小,对 Hénon 吸引子有直接的影响,而对高斯白噪声却毫无影响.

因此,应首先判断实际系统的动力学类型,采用 G-P 算法定量描述系统的混沌特征才能更加有效.结合其他计算方法或判别参数,如庞加莱截面、李雅普诺夫指数与盒维数等,以更加全面地评价实际系统的动力学特征.

感谢袁修干教授和马重芳教授对本文作者的鼓励与支持.

- [ 1 ] Tomita K and Kai T 1978 *Phys. Rev. Lett.* **A 66** 91
- [ 2 ] Wang D S and Cao L 1995 *Chaos, Fractal and Application* (Hefei: Science and Technology University of China Press) chap. 2 in Chinese [ 王东生、曹 磊 1995 混沌、分形及其应用(合肥:中国科学技术大学出版社)第二章 ]
- [ 3 ] Huang R S 2000 *Chaos and Application* (Wuhan: Wuhan University Press) chap. 7 (in Chinese) [ 黄润生 2000 混沌及其应用(武汉:武汉大学出版社)第七章 ]
- [ 4 ] Addison D S 1991 *Fractals and Chaos* (London: JOP Publishing Ltd) chap. 3
- [ 5 ] Russell D A, Hanson J D and Ott E 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 1175
- [ 6 ] Greenside H S, Wolf A, Swift J and Pignataro T 1982 *Phys. Rev. A* **25** 3453
- [ 7 ] Packard N H, Crutchfield J P, Farmer J D and Shaw R S 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 712
- [ 8 ] Grassberger P and Procaccia I 1983 *Phys. Rev. Lett.* **50** 346
- [ 9 ] Wang F Q, Luo C S and Chen G X 1993 *J. Comput. Phys.* **10** 345 (in Chinese) [ 汪富泉、罗朝盛、陈国先 1993 计算物理 **10** 345 ]
- [ 10 ] Zhou Y K, Wang L C and Zhang J 1999 *J. Natural Disasters* **8** 42 (in Chinese) [ 周寅康、王腊春、张 捷 1999 自然灾害学报 **8** 42 ]
- [ 11 ] Gu S S, Wang Z Q and Cheng J T 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 84
- [ 12 ] Shoji M and Takagi Y 2001 *Int. J. Heat & Mass Trans.* **44** 2763
- [ 13 ] Lei M, Wang Z and Feng Z 2001 *Phys. Lett. A* **290** 297
- [ 14 ] Casaleggio A and Corana A 2000 *Chaos, Solitons & Fractals* **11** 2017
- [ 15 ] Tang Y B and Jin Z Q 1998 *Advances in Water Science* **9** 361 (in Chinese) [ 汤一波、金忠青 1998 水科学进展 **9** 361 ]
- [ 16 ] Binder P M and Laverde D 1999 *Chaos* **9** 206
- [ 17 ] Grassberger P and Procaccia I 1984 *Physica D* **13** 34
- [ 18 ] Smith L A 1988 *Phys. Lett. A* **133** 283
- [ 19 ] Theiler J 1990 *Phys. Rev. A* **41** 3038
- [ 20 ] Nerenberg M A H and Essex C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 7065

- [ 21 ] Eckmann J P and Ruelle D 1992 *Physica D* **56** 185
- [ 22 ] Judd K 1992 *Physica D* **56** 216
- [ 23 ] Galka A , Maas T and Pfister G 1998 *Physica D* **121** 237
- [ 24 ] Fuchsin R M , Shen Y and Meier P F 2001 *Phys. Lett. A* **285** 69
- [ 25 ] Brown R , Bryant P and Abarbanel H D I 1991 *Phys. Rev. A* **43** 2787
- [ 26 ] Fraser A M and Swinney H L 1986 *Phys. Rev. A* **33** 1134
- [ 27 ] Liebert W and Schuster H G 1989 *Phys. Lett. A* **142** 107
- [ 28 ] Yang Z A , Wang G R and Ren G Y 1995 *J. Nonlinear Dynamics in Science and Technology* **2** 127 ( in Chinese ) [ 杨志安、王光瑞、任光耀 1995 非线性动力学学报 **2** 127 ]
- [ 29 ] Sun H Y and Cao Q J 1999 *J. Nonlinear Dynamics in Science and Technology* **6** 268 ( in Chinese ) [ 孙海云、曹庆杰 1999 非线性动力学学报 **6** 268 ]
- [ 30 ] Wu Z B 1995 *Physica D* **85** 485
- [ 31 ] Ding M Z , Grebogi C , Ott E , Sauter T and Yorke J A 1992 *Physica D* **69** 404
- [ 32 ] Albano A M , Passamante A and Farrell M E 1991 *Physica D* **54** 85
- [ 33 ] Lai Y C and Lerner D 1998 *Physica D* **115** 1
- [ 34 ] Ma J H and Chen Y S 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 1237
- [ 35 ] Judd K 1994 *Physica D* **71** 421

## Grassberger-Procaccia algorithm for evaluating the fractal characteristic of strange attractors<sup>\*</sup>

Wang An-Ling Yang Chun-Xin

( Department of Flight Design and Applied Mechanics , Beijing University of Aeronautics and Astronautics , Beijing 100083 , China )

( Received 31 March 2002 ; revised manuscript received 2 May 2002 )

### Abstract

Based on the three general strange attractors generated by the Lorenz equation , the Rössler equation and the Hénon map , the Grassberger-Procaccia algorithm is analyzed. For a finite time series , the sampling number , delay time , embedding dimension and the length of scaling region affect the precision of evaluating the correlation dimension  $D_2$  and the 2nd-order Kolmogorov entropy  $K_2$  by G-P algorithm. In the analysis of the trend of a correlation integral , the impression for a continuous dynamical system is different from that of a discrete dynamical system in delay time and embedding dimension. The criterion of delay time chosen by mutual information is unnecessary for calculating the correlation dimension  $D_2$  . The applicable conditions for G-P algorithm is also indicated.

**Keywords** : strange attractors , Grassberger-Procaccia algorithm , correlation dimension , Kolmogorov entropy

**PACC** : 0555 , 4752

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 50176003 ).