

# 在具有强非线性效应的离子晶体中光脉冲传播的孤立子特性\*

牛家胜<sup>1)2)</sup> 马本堃<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (北京师范大学低能核物理研究所, 北京 100875)

<sup>2)</sup> (北京师范大学物理系, 北京 100875)

(2002 年 4 月 16 日收到, 2002 年 5 月 20 日收到修改稿)

从理论上研究了原胞内存在强离子间非线性相互作用的离子晶体, 得出光脉冲在其中的传播具有孤立子特性, 并分析了当非线性系数  $g$  分别为大于 0 与小于 0 时形成的亮孤立子与暗孤立子的具体特征. 研究表明, 不论非线性系数  $g$  取正值还是负值, 在纵光学模声子频率  $\omega_{10}$  以上频区, 光脉冲可形成亮孤立子, 在  $g > 0$  时, 在横光学模频率  $\omega_{10}$  以下频区可形成暗孤立子. 值得注意的是在  $\omega_{10} - \omega_{10}$  区间, 光脉冲可形成超前型暗孤立子; 在  $g < 0$  时, 从  $\omega_{10}$  往下临近  $\omega_{10}$  有一个由超前型亮孤立子向推迟型暗孤立子的转变区.

关键词: 孤立子, 极化激元, 光脉冲

PACC: 7138

## 1. 引 言

本文从理论上研究了光脉冲在非线性的离子晶体中传播的孤立子特性及其具体特征. 在离子晶体中, 由于光学声子模与电磁场的耦合作用, 介电常量在光学模的本征频率附近发生了很大的变化, 引起了光波的色散. 由于离子晶体中当原胞内离子间的非线性作用较强时, 又使介电常量不仅与频率有关, 还与场强有关, 色散作用与非线性作用共同作用的结果可使光脉冲在此类离子晶体中传播具有孤立子特性.

在第 2 节中, 给出了考虑光脉冲与长光学声子模的耦合形成的极化激元, 给出了介电常量, 极化激元的色散关系, 又给出了判定光脉冲传播过程中形成孤立子特性的群速和色散与频率  $\omega$  的关系曲线. 在第 3 节中, 给出了孤立子满足的非线性薛定谔方程及其孤立子解, 最后第 4 节中对结果作了简要的总结.

## 2. 离子晶体中考虑非线性效应的极化激元的色散关系

考虑了离子晶体中原胞内离子间的非线性相

互作用, 并假设光脉冲电场强度  $E$  沿  $z$  轴传播, 各向同性离子晶体在长波近似下在原胞中离子间相对位移遵从的黄昆方程<sup>[1]</sup>可扩展为

$$\ddot{W} = b_{11}W + b_{12}E + gW^3, \quad (1)$$

$$P = b_{11}W + b_{22}E, \quad (2)$$

式中  $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$  为晶体参数,  $g$  为非线性相互作用系数,  $W$  为原胞中两离子的相对位移,  $P$  为电极化强度,  $E$  为光脉冲场强. 对 (1) 式作傅里叶变换, 可得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\omega^2 W(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= \frac{b_{11}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &+ \frac{b_{12}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\ &+ \frac{g}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega') W(\omega'') W(\omega - \omega' - \omega'') e^{-i\omega t} d\omega' d\omega'' d\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

引入传播子

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + \omega_{10}^2}, \quad (4)$$

式中  $\omega_{10} = \sqrt{-b_{11}}$ , 为横光学声子的本征频率, 由

\* 国家教育部博士点基金(批准号 9602703)资助的课题.

(3) 式可得到

$$W(\omega) = b_{12} G(\omega) E(\omega) + \frac{g G(\omega)}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega') W(\omega'') W(\omega - \omega' - \omega'') d\omega' d\omega'' \quad (5)$$

对  $W(\omega)$  进行迭代展开,并略去高阶项得到

$$W(\omega) = b_{12} G(\omega) E(\omega) + \frac{g}{(2\pi)^2} \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} b_{12}^3 G(\omega) G(\omega') E(\omega') G(\omega'') E(\omega'') \times G(\omega - \omega' - \omega'') E(\omega - \omega' - \omega'') d\omega' d\omega'' \quad (6)$$

(6) 式中包含了各种各样的非线性效应,但我们现在仅关心其对频率  $\omega$  成分的自能修正,将(6)式等号右边第二项的积分作离散化处理,用取和代替积分,从中分别挑选出  $\omega' = -\omega''$ ,  $\omega' = \omega$ ,  $\omega'' = \omega$  的项,再恢复成积分形式,采用中值定理可将(6)式中与自能有关部分取为

$$W(\omega) = b_{12} G(\omega) E(\omega) + 3gb_{12}^3 G^4(\omega) \langle E^2 \rangle E(\omega) \quad (7)$$

式中  $\langle E^2 \rangle$  为光脉冲电场强度的平方的长时间平均,当然也就是统计平均值.将(7)式代入(2)式并利用  $P = [\epsilon(\omega) - 1] \epsilon_0 E$ ,可得考虑了非线性相互作用的介电常量  $\epsilon(\omega)$  的表达式为

$$\epsilon(\omega) = [b_{12}^2 G(\omega) + b_{22} + 3gb_{12}^3 G^4(\omega) \langle E^2 \rangle] \epsilon_0 + 1 \quad (8)$$

在文献[2]中讨论了在非线性质子晶体中传播的单一频率的电磁波与光学声子模的耦合会形成极化激元,离子间的非线性相互作用使极化激元的色散关系具有新的特点.在本文讨论的是光脉冲的情形,假定在离子晶体中传播的光波是中心频率为  $\omega_0$  的光脉冲,沿  $z$  方向传播,则考虑了非线性效应的极化激元的波矢  $k$  与频率  $\omega$  之间的关系,即色散关系可由(8)式得出为

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[ \epsilon_{\infty} + \frac{\epsilon_s - \epsilon_{\infty}}{\omega_{TO}^2 - \omega^2} \omega_{TO}^2 + 3 \frac{b_{12}^4 g \langle E^2 \rangle}{(\omega^2 - \omega_{TO}^2)^2 \epsilon_0} \right] \quad (9)$$

式中  $\epsilon_s, \epsilon_{\infty}$  分别为静态介电常量和高频介电常量,  $b_{12}$  为黄昆方程中的系数,  $g$  为非线性系数,  $g$  的符号反映了离子间的非线性相互作用的性质,  $g > 0$  时非线性力与恢复力的方向相反,  $g < 0$  时非线性力与恢复力的方向相同,  $c$  为光速,  $\epsilon_0$  为真空电容率.

图 1—3 分别给出了离子晶体的色散关系及波

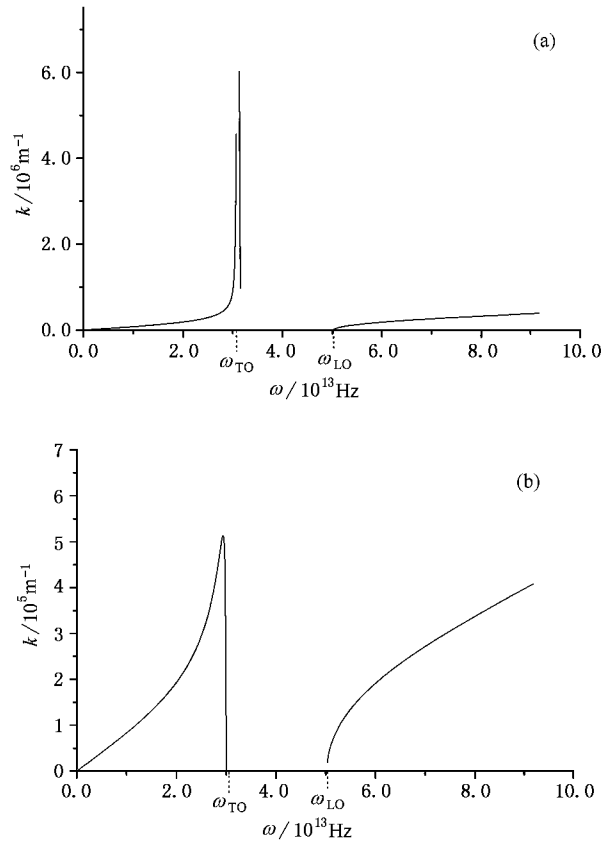


图 1 波矢色散关系  $k-\omega$  (a) 为非线性系数  $g$  为正时的情况; (b) 为非线性系数  $g$  为负时的情况

矢  $k$  的各阶导数.图 1—3 中参量不失一般性地取了 NaCl 的值,作为理论研究上的参考,非线性系数  $g$  采取了适当的参量值.得出的光脉冲情形下的极化激元的色散关系曲线如图 1 所示,它显示离子间的非线性相互作用使极化激元的色散关系除了有与线性极化激元的色散关系对应的两支(一支在  $\omega_{LO}$ (纵光学模声子的本征频率)以上,一支在  $\omega_{TO}$  以下)外,在非线性质数  $g > 0$  时,在原先禁戒的频区  $\omega_{TO} - \omega_{LO}$  之间紧靠  $\omega_{TO}$  上面出现一支新的极化激元的色散关系.在非线性质数  $g < 0$  时,这支新的极化激元的色散曲线与原先的  $\omega_{TO}$  以下的一支相连接在一起,其位置在略低于  $\omega_{TO}$  处,这都说明非线性效应使光脉冲在横光学声子  $\omega_{TO}$  的附近有更强烈的耦合作用.

光脉冲电场  $E(z, t)$  可写成

$$E(z, t) = E_0(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (10)$$

对  $E_0(z, t)$  作傅里叶变换,得到

$$E_0(z, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E(k, \omega) \times e^{-i[(\omega - \omega_0)t - (k - k_0)z]} dk d\omega \quad (11)$$

将  $k$  在  $\omega_0$  附近展开得到

$$\begin{aligned}
 k - k_0 &= 2n_{20} \langle E^2 \rangle + \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0) \\
 &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \\
 &= n_{20} |E_0|^2 + k'(\omega - \omega_0) \\
 &+ \frac{1}{2} k''(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中

$$n_{20} = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial k_k}{\partial \langle E^2 \rangle} \right|_{\langle E^2 \rangle = 0} = \left. \frac{\partial k_x}{\partial |E_0|^2} \right|_{|E_0|^2 = 0}. \quad (13)$$

此处按文献[3]的办法有  $\frac{1}{2} |E_0|^2 = \langle E^2 \rangle$ .  $k' =$

$$\left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} = \frac{1}{v_g(\omega_0)} v_g(\omega_0) \text{ 为群速. } k'' = \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} = \frac{\partial}{\partial \omega}$$

$$\left( \frac{1}{v_g} \right) \Big|_{\omega_0} = - \frac{1}{v_g^2} \left. \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \right|_{\omega_0}, \text{ 由于正色散 } \left. \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} < 0, \text{ 则有}$$

$k'' > 0$  表示正色散, 负色散  $\left. \frac{\partial v_g}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} > 0$ , 即  $k'' < 0$  表示

负色散.

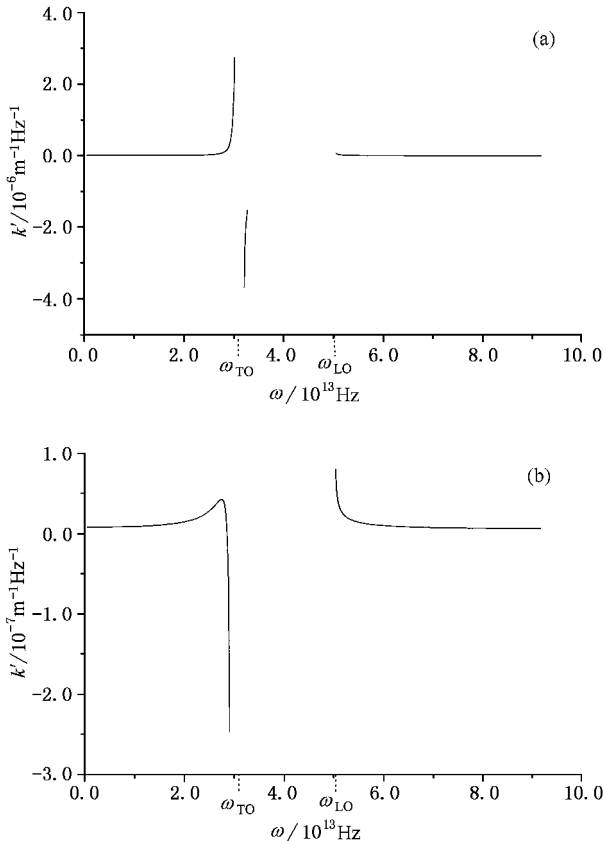


图2 群速倒数的色散关系  $k'-\omega$  (a)为  $g > 0$  (b)为  $g < 0$

图2为  $k'-\omega$  的曲线关系, 在  $g > 0$  时, 在  $\omega_{LO}$  以上  $\omega_{TO}$  以下两支色散关系的群速  $v_g > 0$ ,  $\omega_{TO}-\omega_{LO}$  之间新的一支色散关系的群速  $v_g < 0$ , 在  $g < 0$  时, 在  $\omega_{LO}$  以上的一支色散关系的群速  $v_g > 0$ , 在  $\omega_{TO}$  以下的一支的群速  $v_g$  在略小于  $\omega_{TO}$  的一小部分频区由小于0转为大于0.

图3为  $k''-\omega$  曲线. 从图3中可以看出, 当非线性系数  $g$  为正值时, 在纵光学模频率  $\omega_{LO}$  以上的区域为负色散区域, 纵模频率以下的区域, 为正色散区域; 当非线性系数  $g$  为负值时, 在纵光学模频率  $\omega_{LO}$  以上的区域为负色散区域, 在横光学模频率  $\omega_{TO}$  以下的区域由略小于  $\omega_{TO}$  的一小部分仍为负色散区域, 然后转为正色散区域, 有一个由负色散向正色散转变的转折点.

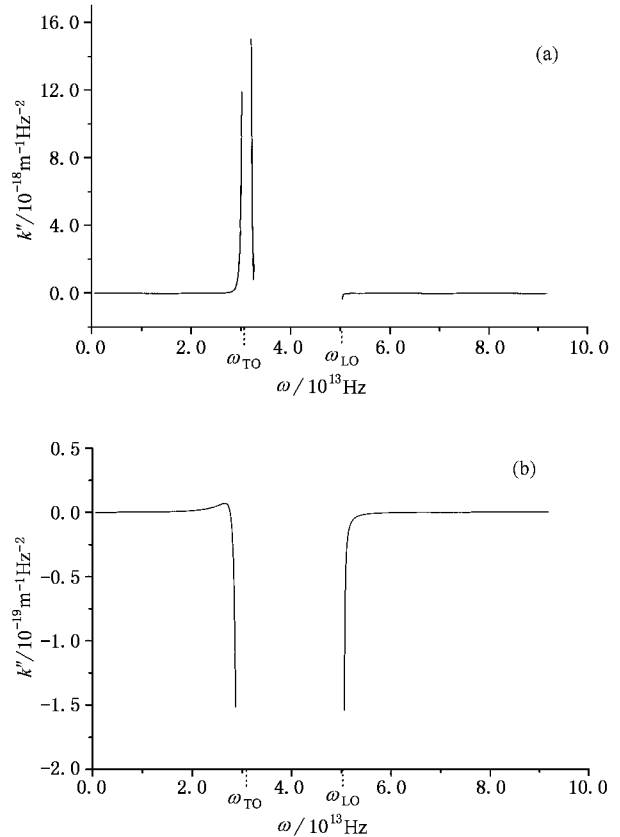


图3 群速色散关系  $k''-\omega$  (a)为  $g > 0$  (b)为  $g < 0$

### 3. 孤立子的非线性薛定谔方程及其解的存在

在存在色散与非线性效应的离子晶体中传播的沿  $z$  轴传播的光脉冲遵从一维色散介质的波动方

程<sup>[31]</sup>.注意到分别用  $-i \frac{\partial}{\partial z}$  和  $i \frac{\partial}{\partial t}$  作用于(11)式可以看出  $\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow -i(\omega - \omega_0)$ ,  $\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow i(k - k_0)$ .应用这些关系及慢变振幅近似,在负色散区域,一维色散介质的波动方程可以转化为下式:

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z} + k' \frac{\partial}{\partial t} \right) E_0 - \frac{k''}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + n_{20} |E_0|^2 E_0 = 0. \quad (14)$$

对(14)式作如下的变换:

$$\begin{aligned} \xi &= 10^{-9} z / \lambda, \\ \tau &= \sqrt{\frac{10^{-9}}{-\lambda k''}} \left( t - \frac{z}{v_g} \right), \\ u &= \sqrt{10^9 \lambda n_{20}} E_0, \end{aligned} \quad (15)$$

可得出

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0. \quad (16)$$

这是无量纲孤立子的非线性薛定谔方程,对于初始条件

$$u(\tau, \xi = 0) = A \operatorname{sech}(\tau), \quad (17)$$

用逆散射方法可以得到非线性薛定谔方程(16)的解<sup>[31]</sup>.当  $A = N$  (正整数)时,方程的解的形式简单.特别当  $A = 1$  时,其解为

$$u(\tau, \xi) = \operatorname{sech}(\tau) e^{i\xi/2}, \quad (18)$$

称为基本孤子.因此无论离子晶体的非线性系数  $g$  是正值还是负值,在光学纵模频率  $\omega_{10}$  以上区域都能形成亮孤子.而当  $g$  是负值时,在横光学模频率  $\omega_{10}$  和下面的一小部分频区也可以形成亮孤子.

当极化激元的色散关系在正色散区域,即  $k'' > 0$  的区域,非线性薛定谔方程中的色散项是负的,(16)式变为

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0, \quad (19)$$

其解为

$$u(\tau, \xi) = B \tanh(B\tau) e^{iB^2 \xi}, \quad (20)$$

式中  $B$  为形状因子,决定脉冲形状和振幅.这是暗孤子.当  $g$  是正值时,在横光学模频率  $\omega_{10}$  以下的区域可以形成暗孤子.在  $\omega_{10}$  与  $\omega_{10}$  之间的区域也可以形成暗孤子.当  $g$  取负值时,在  $\omega_{10}$  以下,将由亮孤子转变为暗孤子.

如果考虑到高阶色散,则由一维色散介质的波动方程可得

$$\begin{aligned} i \left( \frac{\partial}{\partial z} + k' \frac{\partial}{\partial t} \right) E_0 - \frac{k''}{2} \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} - i \frac{k^{(3)}}{6} \frac{\partial^3 E_0}{\partial t^3} \\ + n_{20} |E_0|^2 E_0 + i k_4 |E_0|^2 \frac{\partial}{\partial t} E_0 = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

式中  $k^{(3)}$ ,  $k_4$  分别为

$$\begin{aligned} k^{(3)} &= \left. \frac{\partial^3 k}{\partial \omega^3} \right|_{\omega_0}, \\ k_4 &= \left. \frac{\partial^2 k}{\partial \omega \partial \alpha} \right|_{E_0, \omega_0}. \end{aligned} \quad (22)$$

对(21)式作(15)式的变换,可得到

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u + i\epsilon \left[ \beta_1 \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3} \right. \\ \left. + \beta_2 \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2 u) + \beta_3 u \frac{\partial}{\partial \tau} (|u|^2) \right] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

在(23)式中

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sqrt{\frac{10^{-9}}{-\lambda k''}} \frac{k^{(3)}}{6k''}, \quad \beta_1 = 1, \\ \beta_2 &= -\beta_3 = -\frac{k_4}{\epsilon n_{20} \sqrt{-10^9 k'' \lambda}}. \end{aligned} \quad (24)$$

在文献[4]中可找到此类考虑高阶色散的孤子方程的解,其主要结果是由于高阶色散的存在,高阶孤子会发生劈裂.对于2阶孤子,孤子的速度劈裂值为

$$\Delta V = \left| \sqrt{\frac{k' |k''|}{2\pi}} (v_1 - v_2) \right|^{-1}, \quad (25)$$

式中

$$v_1 = -\frac{\epsilon}{5} (129\beta_1 - 30\beta_2 - 16\beta_3), \quad (26)$$

$$v_2 = \frac{\epsilon}{15} (99\beta_1 - 30\beta_2 - 16\beta_3). \quad (27)$$

## 4. 讨论与总结

以上从理论上分析了光脉冲在考虑了具有强非线性效应的离子晶体中传播的孤子特性.在非线系数  $g$  取正值时,在纵光学声子模  $\omega_{10}$  以上频区,可形成亮孤子,在横光学模  $\omega_{10}$  以下频区则可形成暗孤子.奇特的是在  $\omega_{10}$  与  $\omega_{10}$  之间由于群速  $v_g < 0$ ,由(15)式  $\tau$  的表达式可看出  $\tau$  的值相对  $t$  有一个延迟,其量值决定于  $z/v_g$ ,此区间又是正色散区,故光脉冲形成的孤子应为超前型暗孤子.而当  $g < 0$  时,在纵光学声子模  $\omega_{10}$  以上,也可形成亮孤子,在低于  $\omega_{10}$  的频区,在略低于  $\omega_{10}$  附近有一小部分频区,群速度  $v_g$  也小于0,但为负色散区域,故

可形成超前型亮孤立子,随后转变为推迟型暗孤立子.这是一个很有意思的结果,如果能找到天然的或人工制备在原胞中离子间的非线性相互作用强的离

子晶体材料,值得实验工作者予以验证,并相信会有潜在的应用前景.

- [ 1 ] Huang K 1951 *Proc. R. Soc. A* **208** 352  
 [ 2 ] Niu J S 2001 *Chin. Phys.* **10** 836  
 [ 3 ] Li F L 1992 *High Laser Physics* ( Hefei : Press of University of Science and Technology of China ) p187 [ in Chinese ] 李福利 1992 高等激光物理学 ( 合肥 : 中国科学技术大学出版社 ) 第 187 页 ]  
 [ 4 ] Kodama Y 1987 *IEEE J. Quantum Electron.* **23** 510

## Soliton properties of light transportation in ionic crystals generated by nonlinear effects \*

Niu Jia-Sheng<sup>1)2)</sup> Ma Ben-Kun<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>( *Institute of Low Energy Nuclear Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China* )

<sup>2)</sup>( *Department of Physics , Beijing Normal University , Beijing 100875 , China* )

( Received 16 April 2002 ; revised manuscript received 20 May 2002 )

### Abstract

In this paper , we discuss theoretically the soliton properties of light pulse transportation originating from strong nonlinear interactions between ions in unit cells of ionic crystals , and analyze in detail the bright solitons and dark solitons when the nonlinear coefficient  $g$  is positive and negative . It is found that whether the nonlinear coefficient  $g$  is positive or negative , the bright solitons can be obtained over the longitudinal optical phonon frequency  $\omega_{LO}$  . For  $g > 0$  , dark solitons can be formed under the transverse optical phonon frequency  $\omega_{TO}$  , what should be payed attention to is that between  $\omega_{TO}$  and  $\omega_{LO}$  , the light pulse can form advanced dark solitons . For  $g < 0$  , there is a switching area from the advanced bright soliton to retarded dark soliton near but below  $\omega_{TO}$  . We also discuss the effects of higher nonlinear dispersions on the solitons .

**Keywords** : soliton , polariton , light pulse

**PACC** : 7138

\* Project supported by the Doctorate Foundation of Ministry of Education ,China( Grant No.9602703 ) .