

# 厄米-双曲正弦-高斯光束的 $M^2$ 因子\*

王喜庆

(西南交通大学应用物理系, 成都 610031)

吕百达†

(四川大学激光物理与激光化学研究所, 成都 610064)

(2001 年 5 月 20 日收到, 2001 年 7 月 17 日收到修改稿)

从二阶矩的定义出发, 给出了一类新光束——厄米-双曲正弦-高斯(HShG)光束  $M^2$  因子的解析公式, 公式表明 HShG 光束的  $M^2$  因子是光束阶数  $n$  和参数  $\alpha$  的函数. 作为本公式的特例, 给出了厄米-正弦-高斯(HSiG)双束、双曲正弦-高斯(ShG)光束以及正弦-高斯(SiG)光束  $M^2$  因子的解析公式. 对 HShG 光束的束腰宽度、远场发散角及  $M^2$  因子做了数值计算, 并对所得结果作了分析.

关键词: 厄米-双曲正弦-高斯光束, 厄米-正弦-高斯(HSiG)光束,  $M^2$  因子, 二阶矩

PACC: 4200

## 1 引 言

激光光束的特性可由许多有意义的参数来表示,  $M^2$  因子(光束传输因子)对不同的各种激光光束而言是非常有用的特征参数之一, 当光束通过理想的一阶光学系统时它是一个传输不变量<sup>[1, 2]</sup>. 对许多激光光束的  $M^2$  因子已经作了深入的研究, 例如直角坐标系下的厄米-高斯光束, 柱坐标系下的拉盖尔-高斯光束<sup>[1]</sup>, 平顶高斯光束<sup>[3-6]</sup>、贝塞尔-高斯光束<sup>[7, 8]</sup>等. 最近, Casperson 等人从 Helmholtz 方程出发, 在较为一般情况下, 推导出了一类有广泛意义的厄米-正弦类-高斯(HSG)光束解, 并提出了用正弦类高斯光阑和光腔产生 HSG 光束的方法<sup>[9-11]</sup>. 事实上, 厄米-双曲正弦-高斯(HShG)光束、厄米-正弦-高斯(HSiG)光束、厄米-双曲余弦-高斯(HChG)光束、厄米-余弦-高斯(HCsG)光束, 双曲正弦-高斯(ShG)光束、双曲余弦-高斯(ChG)光束、正弦-高斯(SiG)光束、余弦-高斯(CsG)光束以及厄米-高斯光束和高斯光束等均可视为 HSG 光束的特例. 迄今, 对其中一些光束的传输特性及  $M^2$  因子已作了深入的研

究<sup>[12-17]</sup>, 但还未见对 HSG 光束  $M^2$  因子的研究报道. 本文从二阶矩的定义出发采用适当的数学技巧, 严格推导出了厄米-双曲正弦-高斯(HShG)光束  $M^2$  因子的解析公式, 与已发表的工作相比本文所得结果具有更为普遍的意义. HSiG 光束、ShG 光束和 SiG 光束的  $M^2$  因子可视为本公式的特例直接得出, 文中对此作了具体分析, 并对 HShG 和 ShG 光束的束腰宽度、远场发散角及  $M^2$  因子作了数值计算和讨论.

## 2 HShG 光束的 $M^2$ 因子

二维 HShG 光束在  $z = 0$  平面上的场分布为<sup>[10]</sup>

$$E(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w_0}\right) \cdot \operatorname{sinh}(\Omega_0 x), \quad (1)$$

其中  $w_0$  为高斯振幅分布的束腰宽度,  $H_n$  为  $n$  阶厄米多项式,  $\Omega_0$  为与  $\sinh$  项相关的参数,  $\operatorname{sinh}$  为双曲正弦函数. 双曲正弦函数可写为

$$\operatorname{sinh}(\Omega_0 x) = \frac{\exp(\Omega_0 x) - \exp(-\Omega_0 x)}{2}. \quad (2)$$

将(2)式代入(1)式整理得

\* 激光技术国家重点实验室基金(批准号: 2001-0009, 2001-0010)和西南交通大学校科技发展基金资助的课题.

† 西南交通大学客座教授.

$$E(x, 0) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\alpha^2}{4}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0} - \frac{\alpha}{2}\right)^2\right] - \exp\left[-\left(\frac{x}{w_0} + \frac{\alpha}{2}\right)^2\right] \right\}, \quad (3)$$

其中  $\alpha = \Omega_0 w_0$  为光束参数. 在  $Z = 0$  平面上 HShG 光束的光强为

$$K(x) = \frac{1}{4} \exp\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) H_n^2\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \cdot \left\{ \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0} - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2\right] + \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - 2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) \exp\left[-\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right)^2\right] \right\}. \quad (4)$$

由空间域的二阶矩定义<sup>[11]</sup>

$$\sigma_x^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 K(x, 0) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} K(x, 0) dx} \quad (5)$$

其中  $\bar{x} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x K(x, 0) dx}{\int_{-\infty}^{\infty} K(x, 0) dx}$  为空间域的一阶矩, 由于

HShG 光束的对称性  $\bar{x} = 0$ . 将 (4) 式代入 (5) 式, 并利用厄米多项式的递推公式

$$x H_n(x) = \frac{1}{2} H_{n+1}(x) + n H_{n-1}(x) \quad (6)$$

及积分公式<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_m(x) H_n(x) dx \\ &= 2^n \sqrt{\pi} m! y^{n-m} L_m^{n-m}(-2y^2) \quad m \leq n, \quad (7) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) H_m(x) H_n(x) dx \\ &= \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 2^n \sqrt{\pi} n! & m = n. \end{cases} \quad (8) \end{aligned}$$

经繁冗的积分计算后, 最后结果可整理为

$$\sigma_x^2 = \frac{F^+ + F^- + F^0}{G^+ + G^- + G^0}, \quad (9)$$

式中

$$F^\pm = \frac{w_0^3}{4\sqrt{2}} 2^n \sqrt{\pi} \{ 2n + 1 + \alpha^2 \} L_n(-\alpha^2) + 2n \alpha^2 [L_n^2(-\alpha^2) - L_n^1(-\alpha^2)], \quad (10)$$

$$F^0 = \frac{w_0^3}{2\sqrt{2}} 2^n \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) n (2n + 1), \quad (11)$$

$$G^\pm = \frac{w_0}{4\sqrt{2}} 2^n \sqrt{\pi} L_n(-\alpha^2), \quad (12)$$

$$G^0 = \frac{w_0}{2\sqrt{2}} 2^n \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2}\right) n!, \quad (13)$$

其中  $L_n^l$  及  $L_n$  分别为缔合拉盖尔函数和拉盖尔函数.

将 (10)–(13) 式代入 (9) 式, 并整理得

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \frac{w_0^2}{4} \{ 2n + 1 + \alpha^2 [L_n(-\alpha^2) + 2n \{ L_n^2(-\alpha^2) - L_n^1(-\alpha^2) \}] \\ & \quad [L_n(-\alpha^2) - n \exp(-\alpha^2/2)] \}. \quad (14) \end{aligned}$$

在空间频率域中场分布的定义为

$$E(s_x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} E(x, z) \exp(-i2\pi x s_x) dx. \quad (15)$$

将 (1) 式代入 (15) 式, 利用积分<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x-y)^2] H_n(ax) dx \\ &= \sqrt{\pi} (1-a^2)^{n/2} H_n\left(\frac{ay}{\sqrt{1-a^2}}\right), \quad (16) \end{aligned}$$

得  $z = 0$  平面上空间频率域的场分布

$$\begin{aligned} E(s_x, 0) &= \frac{w_0}{2} \sqrt{\pi} i^n \{ \exp[-(\pi w_0 s_x + i \frac{\alpha}{2})^2] H_n(\sqrt{2} \pi w_0 s_x + i \frac{\alpha}{\sqrt{2}}) \\ & \quad - \exp[-(\pi w_0 s_x - i \frac{\alpha}{2})^2] \\ & \quad \cdot H_n(\sqrt{2} \pi w_0 s_x - i \frac{\alpha}{\sqrt{2}}) \}. \quad (17) \end{aligned}$$

由空间频率域的二阶矩定义

$$\sigma_{s_x}^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (s_x - \bar{s}_x)^2 K(s_x, 0) ds_x}{\int_{-\infty}^{\infty} K(s_x, 0) ds_x}, \quad (18)$$

其中一阶矩

$$\bar{s}_x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} s_x K(s_x, 0) ds_x}{\int_{-\infty}^{\infty} K(s_x, 0) ds_x} = 0.$$

将 (17) 式代入 (18) 式, 经过非常繁冗的中间积分计算过程, 最后得到

$$\begin{aligned} \sigma_{s_x}^2 &= \frac{1}{4\pi^2 w_0^2} \{ 2n + 1 - \alpha^2 n [2L_n^2(-\alpha^2) - 2L_n^1(-\alpha^2) - \exp(-\alpha^2/2)] \\ & \quad [L_n(-\alpha^2) - n \exp(-\alpha^2/2)] \}. \quad (19) \end{aligned}$$

由 (14) 式及 (19) 式, 得到二维 HShG 光束  $M^2$  因子<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned}
 M^2 &= 4\pi\sqrt{\sigma_x^2\sigma_x^2} \\
 &= \{ \{ 2n + 1 + \alpha^2 [ L_n(-\alpha^2) \\
 &\quad + 2n ( L_n^2(-\alpha^2) - L_n^1(-\alpha^2) ) ] \\
 &\quad [ L_n(-\alpha^2) - n \exp(-\alpha^2/2) ] \} \\
 &\quad \times \{ 2n + 1 - \alpha^2 n [ 2L_n^2(-\alpha^2) \\
 &\quad - 2L_n^1(-\alpha^2) - \exp(-\alpha^2/2) ] \\
 &\quad [ L_n(-\alpha^2) - n \exp(-\alpha^2/2) ] \} \}^{1/2}. \quad (20)
 \end{aligned}$$

由(20)式,可以看出,HShG光束的传输因子是厄米函数的阶数  $n$  和参数  $\alpha$  的函数.

由二阶矩定义<sup>[11]</sup>及(14)(19)式,可得到HShG光束的束腰宽度及远场发散角,当  $n = 0, 1, 2$  和  $3$  时,归一化束腰宽度及远场发散角随  $\alpha$  的变化情况分别如图1,图2所示.由图1可以看出,HShG光束的束腰宽度是阶数  $n$  及参数  $\alpha$  的函数,ShG光束( $n = 0$ )的束腰宽度在  $\alpha$  较小时(如  $\alpha < 5.0$ )随参数  $\alpha$  的增加而减小,在  $\alpha$  较大( $\alpha \geq 5.0$ )时,束腰宽度等于基模高斯光束的束腰宽度  $w_0$ ,对于  $n = 1, 2$  和  $3$  的HShG光束,在  $\alpha$  较小( $n = 1, \alpha < 5.40; n = 2, \alpha < 5.60; n = 3, \alpha < 6.45$ )时,其束腰宽度随  $\alpha$  的变化是非单调的,具体变化情况如图1所示,在  $\alpha$  较大时,束腰宽度不随  $\alpha$  的变化而变化,其束腰宽度分别为  $\sqrt{3}w_0, \sqrt{5}w_0$  和  $\sqrt{7}w_0$ .由图2可以看出,HShG光束的远场发散角也是阶数  $n$  及参数  $\alpha$  的函数,ShG光束( $n = 0$ )和  $n = 1, 2$  的HShG光束的远场发散角随参数  $\alpha$  的增加而单调增加,对  $n = 3$  时的远场发散角,在  $\alpha$  较小时,其远场发散角随  $\alpha$  的变化是非单调的,当  $\alpha$  较大(如  $\alpha \geq 2.82$ )时,远场发散角随  $\alpha$  的增大而单调增加.

### 3 特 例

#### 3.1 $n = 1, 2$ 和 $3$ 时的 HShG 光束的 $M^2$ 因子

(20)式给出了普遍的HShG类光束的  $M^2$  因子,当  $n = 1, 2$  和  $3$  时,由(20)式得

$$\begin{aligned}
 M_1^2 &= \{ \alpha^6 + 9\alpha^4 + 21\alpha^2 + 9 + (\alpha^6 + 3\alpha^4 - 18\alpha^2 \\
 &\quad - 18) \exp(-\alpha^2/2) + (\alpha^2 + 3) \\
 &\quad \cdot \exp(-\alpha^2) \}^2 \{ \alpha^2 + 1 - \exp(-\alpha^2/2) \} \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_2^2 &= \frac{1}{\alpha^4 + 4\alpha^2 + 2 - 2\exp(-\alpha^2/2)} \{ \alpha^{10} + 21\alpha^8 \\
 &\quad + 148\alpha^6 + 412\alpha^4 + 420\alpha^2 + 100 + (2\alpha^8 + 16\alpha^6 \\
 &\quad - 72\alpha^4 - 400\alpha^2 - 200) \exp(-\alpha^2/2)
 \end{aligned}$$

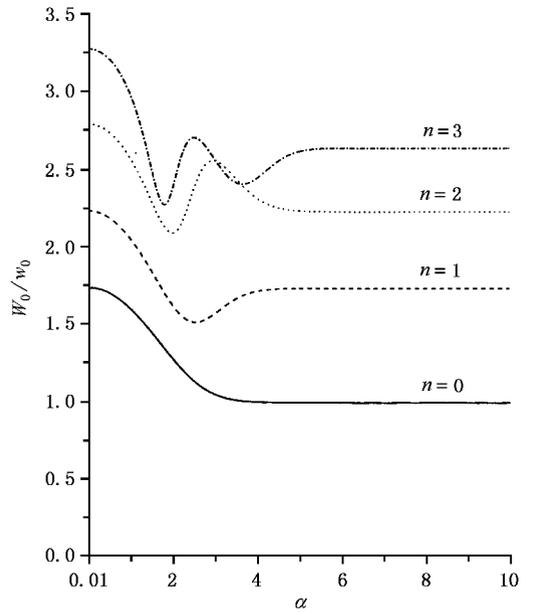


图1 HShG光束的归一化束腰宽  $W_0/w_0$  随  $\alpha$  的变化( $w_0$  为对应基模高斯光束的束腰)

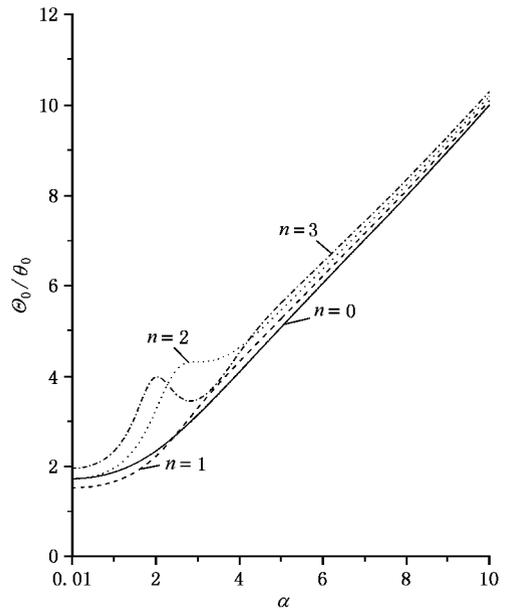


图2 HShG光束的归一化远场发散角  $\theta_0/\theta_0$  随  $\alpha$  的变化 ( $\theta_0 = \frac{\lambda}{\pi w_0}$  为对应基模高斯光束的远场发散角)

$$\begin{aligned}
 &\quad + 20(-\alpha^2 + 5) \exp(-\alpha^2) \}^2, \quad (22) \\
 M_3^2 &= \frac{1}{\alpha^6 + 9\alpha^4 + 18\alpha^2 + 6 - 6\exp(-\alpha^2/2)} \{ \alpha^{14} \\
 &\quad + 37\alpha^{12} + 513\alpha^{10} + 3369\alpha^8 + 10992\alpha^6 \\
 &\quad + 17064\alpha^4 + 10836\alpha^2 + 1764 + (6\alpha^{10} + 90\alpha^8 \\
 &\quad - 192\alpha^6 - 4824\alpha^4 - 10584\alpha^2 - 3528)
 \end{aligned}$$

$$\cdot \exp(-\alpha^2/2) + (-252\alpha^2 + 1764)\exp(-\alpha^2)]^{1/2}. \quad (23)$$

图 3 给出了 HShG 光束的  $M^2$  因子随参数  $\alpha$  的变化曲线. 由图 3 可以看出, 当  $n=0$  (ShG 光束), 1 时,  $M^2$  因子随  $\alpha$  的增大而增大; 而当  $n=2, 3$  时,  $M^2$  因子不是随  $\alpha$  的增大而单调增加的, 例如,  $n=2$ , 当  $0 < \alpha \leq 1.75$  时,  $M^2$  因子随  $\alpha$  的增大而减小, 当  $\alpha > 1.75$  时,  $M^2$  因子随  $\alpha$  的增大而增大;  $n=3$ , 当  $0 < \alpha \leq 2.27$  时,  $M^2$  因子随  $\alpha$  的增大而减小, 当  $\alpha > 2.27$  时,  $M^2$  因子随  $\alpha$  的增大而增大; 由图 3 还可以看出,  $M^2$  因子随  $n$  的增大而增大.

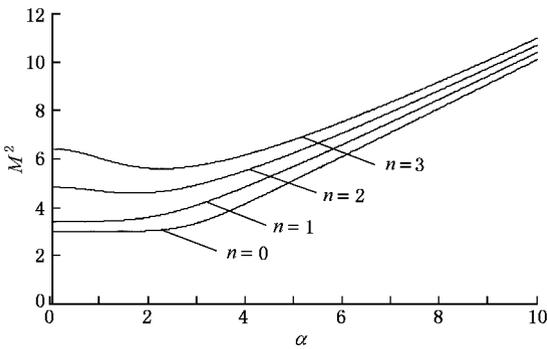


图 3  $n=0, 1, 2, 3$  时, HShG 光束的  $M^2$  因子随  $\alpha$  的变化

### 3.2 ShG 光束的 $M^2$ 因子

令  $n=0$ , 由 (20) 式得到 ShG 光束的  $M^2$  因子为

$$M^2 = \frac{1}{1 - \exp(-\alpha^2/2)} \left[ \alpha^2 + 1 + (\alpha^4 - 2) \cdot \exp(-\alpha^2/2) + (1 - \alpha^2) \cdot \exp(-\alpha^2) \right]^{1/2}. \quad (24)$$

(24) 式与文献 [12] 的 (9) 式完全相同. 图 1 中,  $n=0$  时, 即为 ShG 光束的  $M^2$  因子随离心参数  $\alpha$  的变化曲线.

### 3.3 HSiG 光束的 $M^2$ 因子

利用双曲正弦函数与正弦函数的关系

$$\sin x = -i \sinh(ix). \quad (25)$$

令

$$\alpha = i\beta, \quad (26)$$

将 (26) 式代入 (1) 式, 得到 HSiG 光束在  $z=0$  平面上的场分布函数

$$E(x) = i \exp\left(-\frac{x^2}{w_0^2}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{x}{w_0}\right) \sin(\Omega_0 x). \quad (27)$$

将 (26) 式代入 (14) (19) 式, 得到  $\sigma_x^2$  和  $\sigma_x'^2$  分别为

$$\sigma_x^2 = \frac{w_0^2}{4} \{2n + 1 + \beta^2 [L_n(\beta^2) + 2n(L_n^2(\beta^2) - L_n^1(\beta^2))] [n \exp(\beta^2/2) - L_n(\beta^2)]\}, \quad (28)$$

$$\sigma_x'^2 = \frac{1}{4\pi^2 w_0^2} \{2n + 1 + \beta^2 n [\exp(\beta^2/2) - 2L_n^2(\beta^2) + 2L_n^1(\beta^2)] [n \exp(\beta^2/2) - L_n(\beta^2)]\}. \quad (29)$$

由 (20) 式得到 HSiG 光束的  $M^2$  因子

$$M^2 = \{ \{2n + 1 + \beta^2 [L_n(\beta^2) + 2n(L_n^2(\beta^2) - L_n^1(\beta^2))] [n \exp(\beta^2/2) - L_n(\beta^2)]\} \times \{2n + 1 + \beta^2 n [\exp(\beta^2/2) - 2L_n^2(\beta^2) + 2L_n^1(\beta^2)] [n \exp(\beta^2/2) - L_n(\beta^2)]\} \}^{1/2}. \quad (30)$$

当  $n=1, 2$  和  $3$  时, 其  $M^2$  因子分别为

$$M_1^2 = [-\beta^6 + 9\beta^4 - 21\beta^2 + 9 + (-\beta^6 + 3\beta^4 + 18\beta^2 - 18)\exp(\beta^2/2) + 3(\beta^2 + 3) \cdot \exp(\beta^2)]^{1/2} [ \beta^2 - 1 + \exp(\beta^2/2) ], \quad (31)$$

$$M_2^2 = \frac{1}{-\beta^4 + 4\beta^2 - 2 + 2\exp(\beta^2/2)} \left[ -\beta^{10} + 21\beta^8 - 148\beta^6 + 412\beta^4 - 420\beta^2 + 100 + (2\beta^8 - 16\beta^6 - 72\beta^4 + 400\beta^2 - 200) \cdot \exp(\beta^2/2) + 20(\beta^2 + 5)\exp(\beta^2) \right]^{1/2}, \quad (32)$$

$$M_3^2 = \frac{1}{\beta^6 - 9\beta^4 + 18\beta^2 - 6 + 6\exp(\beta^2/2)} \left[ -\beta^{14} + 37\beta^{12} - 513\beta^{10} + 3369\beta^8 - 10992\beta^6 + 17064\beta^4 - 10836\beta^2 + 1764 + (-6\beta^{10} + 90\beta^8 + 192\beta^6 - 4824\beta^4 + 10584\beta^2 - 3528)\exp(\beta^2/2) + (252\beta^2 + 1764)\exp(\beta^2) \right]^{1/2}. \quad (33)$$

### 3.4 SiG 光束的 $M^2$ 因子

令  $n=0$ , 由 (30) 式可得 SiG 光束的  $M^2$  因子

$$M^2 = \frac{1}{\exp(\beta^2/2) - 1} \left[ 1 - \beta^2 + (\beta^4 - 2)\exp(\beta^2/2) + (\beta^2 + 1)\exp(\beta^2) \right]^{1/2}. \quad (34)$$

## 4 结 论

本文依据二阶矩的定义, 严格推导出了具有较

为普遍意义的 HShG 光束的  $M^2$  因子的解析公式 (24) 式. HSiG, ShG 和 SiG 光束的  $M^2$  因子可作为本文特例给出来, 并对 HShG 和 ShG 光束的束腰宽度、

远场发散角和  $M^2$  因子作了数值计算和讨论. 为说明主要物理问题, 文中所作的计算是对二维光束进行的, 但推广到三维情况是直截了当的.

- 
- [ 1 ] Siegman A E 1990 *SPIE* **1224** 2
- [ 2 ] Siegman A E 1998 *OSA TOPS* **17** 184
- [ 3 ] Bagini V ,Borghì R ,Gori F ,Pacileo A M and Santarsiero M 1996 *J. Opt. Soc. Am. A* **13** 1385
- [ 4 ] Amarnnde S A 1996 *Optics Commun.* **129** 311
- [ 5 ] Lü B ,Zhang B and Luo S 1999 *Appl. Optics* **38** 4581
- [ 6 ] Luo S ,Lü B and Zhang B 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1446 [ in Chinese ] 罗时荣、吕百达、张彬 1999 *物理学报* **48** 1446 ]
- [ 7 ] Borghi R ,Santarsiero M 1997 *Opt. Lett.* **22** 262
- [ 8 ] Seshadri S R 1999 *J. Opt. Soc. Am. A* **16** 2917
- [ 9 ] Casperson L W ,Hall D G 1997 *J. Opt. Soc. Am. A* **14** 3341
- [ 10 ] Casperson L W ,Tovar A A 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 954
- [ 11 ] Tovar A A ,Casperson L W 1998 *J. Opt. Soc. Am. A* **15** 2425
- [ 12 ] Zhang B ,Ma H ,Lü B D 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1896 [ in Chinese ] [ 张彬、马虹、吕百达 1999 *物理学报* **48** 1869 ]
- [ 13 ] Lü B D ,Zhang B ,Ma H 1999 *Opt. Lett.* **24** 640
- [ 14 ] Lü B D ,B ,Ma H ,Zhang B 1999 *Opt. Commun.* , **164** 165
- [ 15 ] Lü B D ,Ma H 2000 *SPIE* **3862** 71
- [ 16 ] Lü B D ,Ma H 2000 *J. Mod. Opt.* **47** 719
- [ 17 ] Belafhal A ,Ibnchaikh M 2000 *Optics Commun.* **186** 269
- [ 18 ] Gradshteyn I S ,Ryzhik I M 1980 *Table of Integrals ,Series ,and Products* ( Academic Press ,New York )

## The $M^2$ -factor of Hermite-sinh-Gaussian beams\*

Wang Xi-Qing

( Department of Applied Physics ,Southwest Jiaotong University ,Chengdu 610031 ,China )

Lü Bai-Da

( Institute of Laser Physics and Chemistry ,Sichuan University ,Chengdu 610064 ,China )

( Received 20 May 2001 ; revised manuscript received 17 July 2001 )

### Abstract

Based on the second-order moments method ,the closed-form expression for the  $M^2$ -factor of a novel type of beams i. e. , Hermite-sinh-Gaussian beams is derived ,which depends on the beam order  $n$  and parameter  $\alpha$  . The result shows more general characteristic ,because Hermite-sine-Gaussian beams ,sinh-Gaussian beams and sine-Gaussian beams etc. can be regarded as the special cases of Hermite-sinh-Gaussian beams ,thus their  $M^2$ -factor can be obtained readily. Numerical calculations for the beam waist width ,as well as the far-field divergence angle and the  $M^2$ -factor of Hermite-sinh-Gaussian beams are performed and the results are analyzed.

**Keywords :** Hermite-sinh-Gaussian beam ,Hermite-sine-Gaussian beam , $M^2$ -factor ,second-order moment

**PACC :** 4200

---

\* Project supported by the Foundations of State Key Laboratory of Laser Technology( Grant Nos. 2001-0009 ,2001-0010 )and the Foundation of Science and Technology Development of Southwest Jiaotong University.

† Guest professor at Southwest Jiaotong University.