

# 介观 $LC$ 电路中的量子隧道效应\*

嵇英华 饶建平 雷敏生

(江西师范大学物理系,南昌 330027)

(2001 年 3 月 5 日收到,2001 年 8 月 4 日收到修改稿)

考虑到电子在纳米电容器中的运动是一个单电子隧穿过程,因而将电容器作为一个隧道结,应用隧道模型的稳态法,研究了介观  $LC$  电路中的电流-电压特性.结果表明:由于库仑力的作用,介观  $LC$  电路中存在着阈值电压.当外加电压小于阈值电压时,隧穿电流为零,显示出库仑阻塞现象;当外加电压远大于阈值电压时,隧穿电流与电压成正比.

关键词:介观  $LC$  电路,库仑阻塞,单电子隧道过程

PACC: 7335, 0365

的单电子隧道过程及电流-电压特性.

## 1 引 言

众所周知,当集成电路及电子器件的尺寸与电子输运的相位关联长度相当时,必须考虑电路和器件的量子效应<sup>[1-6]</sup>.近几年来,随着纳米科技和纳米电子学的迅速发展,介观电路的量子效应已成为人们极其关注的一个重要研究课题.人们对介观  $LC$  电路、 $RLC$  电路中电荷和电流的量子涨落进行了比较广泛的研究,也讨论了耦合系数和环境温度对电荷和电流量子涨落的影响;并应用量子双波函数理论探讨了单一介观  $RLC$  电路的量子效应,等等<sup>[7-14]</sup>.不过,以上对介观电路量子效应的研究均未考虑电子元器件量子特性的影响.但现有实验结果已经表明:在含有纳米电容器的介观电路中会出现库仑阻塞(Coulomb Blockade)现象,即当外加电压源的电压小于某一阈值电压  $V_T$  时,由于库仑力的作用,穿过隧道结的电流为零;当外加电压远大于阈值电压时,隧穿电流与电压成正比;而在外加电流源作用下,电路将出现单电子隧道振荡(SET oscillation)<sup>[15,16]</sup>.总之,电子在纳米电容器中的运动实际上是一个单电子隧穿过程.由此可见,纳米电容器的量子特性对介观  $LC$  电路的量子效应有重要的影响.本文将介观  $LC$  电路中的电容器作为一个隧道结,应用隧道模型的稳态法,研究了介观  $LC$  电路中

## 2 体系的哈密顿量

我们研究一个介观  $LC$  电路,纳米电容器  $C$  作为一个隧道结,结电阻为  $R_T$ .采用金属-绝缘体-金属模型,系统的哈密顿量表为<sup>[17,18]</sup>

$$H = H_1 + H_2 + H_T + H_{em}. \quad (1)$$

式中  $H_1$  和  $H_2$  是电子在两个金属板中的哈密顿量,

$$H_1 + H_2 = \sum_{j=1}^2 \sum_{k,\sigma} \epsilon_j(k) a_{k,\sigma}^{(j)+} a_{k,\sigma}^{(j)}. \quad (2)$$

式中  $a_{k,\sigma}^{(j)+}$  ( $a_{k,\sigma}^{(j)}$ ) 是波矢为  $k$  的电子的产生(消灭)算符,  $\epsilon_j(k)$  是电子的能量,  $\sigma$  为自旋.  $H_{em}$  则为系统电磁场的哈密顿量,

$$H_{em} = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} p^2 - QV. \quad (3)$$

式中  $L$  为电感,  $V$  为外加电压源的电压,  $Q$  为电容器极板上的电荷,  $p$  是和电荷共轭的磁通量,  $p(t) = L\dot{Q}$ ,  $p$  和  $Q$  满足正则对易关系:

$$[Q, p] = i\hbar. \quad (4)$$

另外(1)式中的  $H_T$  是隧道哈密顿量,我们把它表示为

$$H_T = \sum_{k,k',\sigma} (T_{kk'} a_{k\sigma}^+ a_{k'\sigma} + T_{k'k} a_{k'\sigma}^+ a_{k\sigma}). \quad (5)$$

式中  $T_{kk'}$  ( $T_{k'k}$ ) 是相应跃迁过程的矩阵元.上式实质上表明,当左极板产生(消灭)一个波矢为  $k$  的电子

\* 江西省自然科学基金(批准号 001004)资助的课题.

时,则同时在右极板消灭(产生)一个波矢为  $k'$  的电子.极板上电荷  $Q$  的量子涨落可由系统的电磁场的哈密顿量给出<sup>[14,18]</sup>,

$$\overline{(\Delta Q)^2} = \frac{\hbar}{2L\omega} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right). \quad (6)$$

$\omega^2 = (LC)^{-1}$ , 为  $LC$  电路的谐振频率.  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  为玻尔兹曼常数,当  $T = 0\text{K}$  时  $\overline{(\Delta Q)^2} = \hbar/2L\omega$ .

对于一个实际的电容器隧道结,我们可将其看作为一个电阻和一个理想电容器的并联.因而,穿过隧道结的电流有通过电阻的单电子隧道电流  $I_n$  和穿过理想电容器的位移电流  $I_d$ .假设两边的正常金属材料相同,当在左边的金属板上加一个负电压  $V$ ,意味着左边所有的电子能量提高了  $eV$ .根据稳态隧道模型,设  $N_1(0), N_2(0)$  代表左(右)两边费米面附近电子的态密度,我们可得单电子隧道电流  $I_n$ ,

$$I_n = AN_1(0)N_2(0) \int [\mathcal{f}(E - eV) - \mathcal{f}(E)] dE. \quad (7)$$

系数  $A$  和极板的几何性质有关,并含有电子的穿透概率.若近似认为穿透概率和能量  $E$  无关,隧道结的尺寸大于电子的相位相干长度时,由(7)式近似得

$$I_n = AN_1(0)N_2(0)eV. \quad (8)$$

表明隧道结  $C$  上的电流和电压遵循 Ohm 定律,电流和电压间是线性关系,无库仑阻塞现象.

### 3 库仑能隙

实验结果表明:对于纳米电容器,由于电子的关联,在隧道结两侧会出现库仑阻塞现象.下面,首先从系统的电势出发,得出由库仑力引起的库仑能隙.介观尺度下的电容器不仅极板上电子数目有限,而且两板板间的距离和电子的相位相干长度可相比拟.从原子的观点看,纳米电容器的电容与电压的变化  $\Delta V$  有关<sup>[19,20]</sup>,

$$e\Delta V = \mu(N + \Delta N) - \mu(N),$$

这里  $\mu(N)$  是  $N$  粒子系统的电势.基态下,  $N$  粒子系统的总能量  $E$  为

$$E(N) = E_p(N) + \frac{(eN)^2}{2C} - eN\phi_{\text{ext}},$$

$E_p(N)$  为  $N$  个电子的总动能,  $\phi_{\text{ext}}$  为附加的外电势.电势  $\mu(N)$  等于改变一个电子后基态总能量的变化,

$$\mu(N) = E(N) - E(N - 1) \cong \frac{e^2}{C} \left(N - \frac{1}{2}\right) - e\phi_{\text{ext}}. \quad (9)$$

当一个电子从电容器隧穿过去时,系统静电能的变化为

$$\begin{aligned} & [E(N + 1) - E(N)] - [E(N) - E(N - 1)] \\ & = \mu(N + 1) - \mu(N) = \frac{e^2}{C}, \end{aligned} \quad (10)$$

上式也表示  $N$  粒子系统具有一个净电子时的电容.引入

$$K(N) = E(N - 1) - E(N), \quad (11a)$$

$$A(N) = E(N) - E(N + 1), \quad (11b)$$

分别表示  $N$  粒子系统失去(得到)一个电子所增加(减少)的能量.因此,电容器作为一个  $N$  粒子系统,移走或增加一个电子所需的最小能量为

$$\Delta = \frac{1}{2}[K(N) - A(N)] = \frac{e^2}{2C}. \quad (12)$$

它是由于系统库仑排斥力的作用引起的,我们称之为库仑能隙.由上面的结果可推知,由于库仑能隙的存在,当左极板的一个电子穿过隧穿结到达右极板时,必须有一个克服库仑阻力的起始阈值电压  $e/C$ ; 而当外加电压小于起始阈值电压时,穿过隧穿结的电流为零,从而出现库仑阻塞现象.

### 4 隧道效应

进一步的研究结果表明:介观尺度下由于库仑力的作用,费米面附近电子的态密度也将发生变化.若设  $\epsilon = (2m)^{-1}p^2 - E_F$  为电子处于自由状态时的能量,则当电容器在外加电压作用下出现单电子隧穿现象时,电子将处于激发态.根据固体理论中关于单电子隧道效应电子能态的分析,结合前面库仑能隙的讨论,处于激发态电子的总能量我们可近似取为

$$E = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}, \quad (13)$$

在动量  $p$  空间,从  $\epsilon(p)$  到  $\epsilon(p) + d\epsilon(p)$  的自由电子态密度定义为

$$N_0 = 4\pi p^2 \frac{dp}{d\epsilon},$$

则相应于介观尺度下,由于库仑能隙的存在,电子态密度为

$$N = 4\pi p^2 \frac{dp}{dE} = N_0 \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}.$$

假设极板两边金属材料相同,两边的电子有相等的能隙  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = e^2/2C$ .因此,当纳米电容隧道结的尺寸和电子的相位相干长度可相比拟,则由(7)式表示的单电子隧道电流  $I_n$  应为

$$I_n = AN_1(0)N_2(0) \int \frac{|E - eV|}{\sqrt{(E - eV)^2 - \Delta^2}} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \cdot \{f(E - eV) - f(E)\} dE. \quad (14)$$

此时  $N_1(0), N_2(0)$  代表隧道结的尺寸远大于电子相位相干长度时的态密度. 进一步计算得

$$I_{n1} = 0, eV < 2\Delta \quad (15a)$$

$$I_{n2} = \frac{\pi\Delta}{2eR_T}, eV = 2\Delta \quad (15b)$$

$$I_{n3} = \frac{1}{eR_T} \left\{ (2\Delta + eV)E(\alpha) - \frac{4\Delta(\Delta + eV)}{2\Delta + eV} K(\alpha) \right\}, \quad eV > 2\Delta, \quad (15c)$$

其中

$$R_T^{-1} = eAN_1(0)N_2(0), \quad (15d)$$

$$E(\alpha) = \int_0^1 \frac{(1 - \alpha^2 x^2)^{1/2}}{(1 - x^2)^{1/2}} dx,$$

$$K(\alpha) = \int_0^1 \frac{dx}{(1 - x^2)^{1/2}(1 - \alpha^2 x^2)^{1/2}},$$

$$\alpha = \frac{eV - 2\Delta}{eV + 2\Delta}, x = \frac{2E - eV}{2\Delta - eV}.$$

$V$  是加在电容器隧道结两端的电压. 当  $V \gg 2\Delta/e$  时 (15c) 的解近似为

$$I_{n3} = R_T^{-1} V. \quad (16)$$

这表明当  $V \gg 2\Delta/e$  时纳米隧道结的隧道行为与通常金属隧道结的隧道行为几乎一致, 电流和电压间为线性关系. 而穿过隧道结的位移电流  $I_d$  易由加在电容隧道结两端的电压给出, 当电容器上外加电压  $V$  一定时,

$$I_d = C \frac{dV}{dt} = 0. \quad (17)$$

实际的隧道结一定要和外电路构成回路. 在介观 LC 电路中, 由于电感  $L$  的存在, 电容和电感之间

有电磁振荡效应, 在外加电压源  $V$  的作用下, 加在电容  $C$  上的电压近似为

$$V_c(t) = V + [C^{-1}Q(0) - V] \cos(\omega t) + \omega^{-1} p(0) \sin(\omega t). \quad (18)$$

$\omega^2 = (LC)^{-1}$ , 在上式表示的交流电压作用下, 当  $V \gg 2\Delta/e$  时, 单电子隧道电流  $I_n$  为

$$I_n = R_T^{-1} V_c(t). \quad (19)$$

隧道结的位移电流  $I_d$  为

$$I_d = \omega [CV - Q(0)] \sin(\omega t) + Cp(0) \cos(\omega t). \quad (20)$$

根据电流连续性定理, 通过隧道结的电流与外电路的电流应该相等. 因此, 流过介观 LC 回路的电流为

$$I = I_n + I_d. \quad (21)$$

实际测量到的显然是电流的平均值. 结合 (15) 式, 当  $V \gg 2\Delta/e$  时, 穿过隧道结的电流为

$$I = R_T^{-1} (V - V_T) \theta(V - V_T). \quad (22)$$

$\theta$  为单位阶跃函数,  $V_T = e/C$  为起始阈值电压.

## 5 结 论

通过原子联接的纳米电容器, 由于库仑力的作用, 不仅存在着库仑能隙, 而且费米面附近电子的态密度也将发生变化. 我们应用稳态隧道模型, 研究了介观 LC 电路中的量子隧道效应. 结果表明: 由于库仑力的作用, 在极低温下 ( $T \rightarrow 0K$ ) 介观 LC 电路中存在库仑阻塞现象. 我们认为要深入研究介观电路的量子效应, 就必须注意电路中的量子隧道效应.

[1] Li Y Q, Chen B 1996 *Phys. Rev.* **B53** 4027  
 [2] Li Y Q, Chen B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 139  
 [3] Chen B, Li Y Q et al 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 129 (in Chinese) [陈斌、李有泉等 1997 物理学报 **46** 129]  
 [4] Wang J S, Sun C Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2007 (in Chinese) [王继锁、孙长勇 1997 物理学报 **46** 2007]  
 [5] Wang J S, Han B C, Sun C Y 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 1187 (in Chinese) [王继锁、韩保存、孙长勇 1998 物理学报 **47** 1187]  
 [6] Ling R L 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2343 (in Chinese) [凌瑞良 1999 物理学报 **48** 2343]  
 [7] Wang J S, Feng J, Zhan M S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 299 (in Chinese) [王继锁、冯健、詹明生 2001 物理学报 **50** 299]

[8] Long C Y, Liu B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1011 (in Chinese) [龙超云、刘波 2001 物理学报 **50** 1011]  
 [9] Ji Y H, Lei M S, Xie F S et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1064 (in Chinese) [嵇英华、雷敏生、谢芳森等 2001 物理学报 **50** 1064]  
 [10] Liang X T, Fan H Y 2001 *Chinese Physics* **10** 486  
 [11] Gu Y J 2001 *Chinese Physics* **10** 490  
 [12] Wang X G, Pan S H 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 171  
 [13] Lei M S, Ji Y H, Xie F S 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 163  
 [14] Fan H Y, Liang X T 2000 *Chin. Phys. Lett.* **17** 174  
 [15] Yan S S, Gan Z Z 1995 *Mesoscopic Physics*. (Beijing: Peking University Press) p149 (in Chinese) [阎守胜、甘子钊 1995 介观物理 (北京: 北京大学出版社) p149]

- [ 16 ] Wang C , Bai C L 1998 *Electron Tunneling Effect in Surface Sciences* ( Wuhan :Hua Zhong Normal University Press ) p83 ( in Chinese 王琛、白春礼 1998 表面科学中的电子隧道效应( 武汉 :华中师范大学出版社 ) p83 ] **64** 1824
- [ 17 ] Devoret M H , Eeteve D , Grabert H *et al* 1990 *Phys. Rev. Lett.*
- [ 18 ] Higurashi H , Iwabuchi S , Nagaoba Y 1995 *Phys. Rev.* **B51** 2387
- [ 19 ] Iafiat G J , Hess K , Krieger J B *et al* 1995 *Phys. Rev.* **B52** 10737
- [ 20 ] Wang J , Guo H , Mozos J L *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 4277

## Quantum tunneling effect in the mesoscopic $LC$ circuit\*

Ji Ying-Hua Rao Jian-Ping Lei Min-Sheng

( Department of Physics , Jiangxi Normal University , Nanchang 330027 , China )

( Received 5 March 2001 ; revised manuscript received 4 August 2001 )

### Abstract

Considering that the movement of an electron in the nano-capacitor is a single electron process through a tunnel , we regarded the nano-capacitor as a metal tunneling junction in this paper. And using the stationary state method , we studied the current-voltage characteristic in the mesoscopic  $LC$  circuit. Our results indicate that there is a threshold voltage  $V_T$  in the circuit due to the effect of Coulombian force. When the external voltage is less than  $V_T$  , the tunneling current is zero , which displays the Coulomb blockade. But when the external voltage is larger than  $V_T$  , the tunneling current is proportional to the voltage.

**Keywords** : mesoscopic  $LC$  circuit , Coulomb blockade , single electron tunneling effect

**PACC** : 7335 , 0365

\* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province ( Grant No. 001004 ) ,