第 51 卷 第 3 期 2002 年 3 月
1000-3290/2002/51(03)/0461-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.3, March, 2002

Birkhoff 系统的一类 Lie 对称性守恒量*

张 毅

(苏州科技学院城建系,苏州 215011)

(2001 年 8 月 17 日收到;2001 年 9 月 14 日收到修改稿)

给出了由 Birkhoff 系统的 Lie 对称性求守恒量的一种新方法.研究了系统仅依赖于 Birkhoff 变量 $\boldsymbol{a}$ 的 Lie 对称变换,直接由系统的 Lie 对称性得到了系统的一类守恒量,并举例说明结果的应用.

关键词:分析力学,对称性,守恒量,Birkhoff 系统

PACC:0320,1110,0220

1 引 言

上世纪末著名数学家 Lie 研究了微分方程在无限小群变换下的不变性,即 Lie 对称性.1979 年,Lutzky 将 Lie 理论应用于力学系统的运动微分方程,开始研究力学系统的 Lie 对称性与守恒量[1].此后,Lie 对称性方法得到迅速发展并取得了一系列重要成果[2—9].赵跃宇[2]将 Lie 理论用于研究完整非保守系统的 Lie 对称性与守恒量;梅凤翔[3]全面系统地研究了各类约束力学系统的 Lie 对称性,包括含伺服约束的非完整系统[4]、一阶 Lagrange 系统[5]等;傅景礼[6]研究了相对论性 Birkhoff 系统的 Lie 对称性;文献[7]研究了单面约束力学系统的 Lie 对称性;文献[8]研究了约束 Hamilton 系统的 Lie 对称性;文献[9]研究了广义经典力学系统的 Lie 对称性.

Lie 对称性方法是一种高级算法[10].为找到系统的 Lie 对称性和守恒量,需要建立并求解复杂的确定方程和结构方程,进而给出守恒量的形式.文献[11—14]给出了一种直接由 Lagrange 系统的 Lie 对称性求守恒量的方法,该方法不依赖于系统的 Lagrange 函数和 Noether 等式.

本文进一步研究 Birkhoff 系统的 Lie 对称性与守恒量.给出了系统仅依赖于 Birkhoff 变量 $\boldsymbol{a}$ 的 Lie 对称变换,建立了 Lie 对称性的确定方程,并直接由系统的 Lie 对称性得到了系统的一类新型守恒量.最后,举例说明本文结果的应用.

2 Birkhoff 系统的运动方程

Birkhoff 系统的运动微分方程的一般形式为

$$\left(\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\right)\dot{a}^\nu-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0$$
$$(\mu,\nu=1,\cdots,2n),\tag{1}$$

其中 $B=B(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数,$R_\mu=R_\mu(t,\boldsymbol{a})$ 称为 Birkhoff 函数组.设系统的 Birkhoff 变量 $a^\mu(\mu=1,\cdots,2n)$ 彼此独立.而

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu}\tag{2}$$

称为 Birkhoff 张量.用 Birkhoff 方程(1)描述运动的力学系统或描述状态的物理系统称为 Birkhoff 系统.

假设系统(1)非奇异,即设

$$\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0,\tag{3}$$

则由方程(1)可解出所有 $\dot{a}^\mu$,有

$$\dot{a}^\mu=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu}+\frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\quad(\mu=1,\cdots,2n),\tag{4}$$

其中

$$\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\tau}=\delta_{\mu\tau}.\tag{5}$$

展开方程(4),有

$$\dot{a}^\mu=h_\mu(t,\boldsymbol{a})\quad(\mu=1,\cdots,2n).\tag{6}$$

3 Birkhoff 系统的 Lie 对称性

本文仅考虑系统在 Birkhoff 变量 a^μ 的无限小群

* 国家自然科学基金(批准号:19972010)及江苏省"青蓝"工程基金资助的课题.

变换下的 Lie 对称性.取时间 t,变量 a^μ 的无限小群变换为

$$t^* = t,\quad a^{\mu^*}(t^*) = a^\mu(t) + \Delta a^\mu \quad (\mu = 1,\cdots,2n) \tag{7}$$

或其展开式

$$t^* = t,\quad a^{\mu^*} = a^\mu + \varepsilon\xi_\mu(t,\boldsymbol{a}) \quad (\mu = 1,\cdots,2n), \tag{8}$$

其中 ε 为无限小参数,ξ_μ 为无限小生成元.引进无限小生成元向量 $X^{(0)}$ 及其一次扩展 $X^{(1)}$ 为

$$X^{(0)} = \xi_\mu \frac{\partial}{\partial a^\mu},\quad X^{(1)} = X^{(0)} + \dot{\xi}_\mu \frac{\partial}{\partial \dot{a}^\mu}. \tag{9}$$

Lie 方法的基本思想是使方程(4)在无限小变换(8)式下保持不变.根据微分方程在无限小变换下的不变性理论,方程(4)在无限小变换(8)式下的不变性归结为如下命题.

命题 1[10] 当且仅当

$$X^{(1)}\left[\dot{a}^\mu - \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right] = 0 \quad (\mu = 1,\cdots,2n). \tag{10}$$

如果

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right), \tag{11}$$

那么方程(4)在无限小变换(8)式下保持不变.

由(9)和(10)式可写为

$$\dot{\xi}_\mu - X^{(0)}\left[\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t}\right)\right] = 0 \quad (\mu = 1,\cdots,2n). \tag{12}$$

称方程(12)为 Birkhoff 系统的确定方程.于是有

命题 2 如果无限小变换(8)式的生成元 ξ_μ 满足确定方程(12),则相应对称性为 Birkhoff 系统(1)的 Lie 对称性.

4 Birkhoff 系统的守恒量

Lie 对称性不一定导致守恒量.下面的定理给出了 Birkhoff 系统的一类新型 Lie 对称性守恒量存在的条件及其形式.

命题 3 对于满足确定方程(12)的无限小生成元 ξ_μ,如果存在函数 $\lambda = \lambda(a^\mu)$满足条件

$$\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\mu} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial a^\rho} h_\rho = 0, \tag{13}$$

则 Birkhoff 系统(1)存在 Lie 对称性守恒量,形如

$$I = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial a^\mu}(\lambda\xi_\mu) = \text{const}. \tag{14}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\mu}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\mu}\dot{\xi}_\mu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\mu}.\end{aligned} \tag{15}$$

由方程(6)和(9),确定方程(12)可写为

$$\dot{\xi}_\mu - \xi_\rho\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\rho} = 0 \quad (\mu = 1,\cdots,2n), \tag{16}$$

于是有

$$\frac{\partial \dot{\xi}_\mu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\xi_\rho\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\rho}\right) = 0, \tag{17}$$

即

$$\frac{\partial \dot{\xi}_\mu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial \xi_\rho}{\partial a^\mu}\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\rho} - \xi_\rho\frac{\partial^2 h_\mu}{\partial a^\rho \partial a^\mu} = 0. \tag{18}$$

利用(18)式,得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\mu} &= \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial a^\mu \partial t} + \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial a^\mu \partial a^\nu}\dot{a}^\nu\\ &= \frac{\partial}{\partial a^\mu}\left(\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu}\dot{a}^\nu\right) - \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\nu}\frac{\partial h_\nu}{\partial a^\mu}\\ &= \frac{\partial^2 h_\mu}{\partial a^\mu \partial a^\rho}\xi_\rho.\end{aligned} \tag{19}$$

将(16)和(19)式代入(15)式,有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\mu}\right)\xi_\mu + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\mu}\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\rho}\xi_\rho + \frac{\partial^2 h_\mu}{\partial a^\mu \partial a^\rho}\xi_\rho. \tag{20}$$

由(13)式,得

$$\frac{\partial^2 h_\mu}{\partial a^\mu \partial a^\rho} = -\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\nu}\right)h_\nu - \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\nu}\frac{\partial h_\nu}{\partial a^\rho}. \tag{21}$$

将(21)式代入(20)式,并注意到关系

$$\frac{\partial}{\partial a^\rho}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\nu}\right) = \frac{\partial}{\partial a^\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^\rho}\right), \tag{22}$$

有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{23}$$

因此(14)式是系统的守恒量.证毕.

由命题 3,立即可以得到一个重要推论.

命题 4 对于满足确定方程(12)的无限小生成元 ξ_μ,如果满足条件

$$\frac{\partial h_\mu}{\partial a^\mu} = 0, \tag{24}$$

则 Birkhoff 系统(1)存在 Lie 对称性守恒量,形如

$$I = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^\mu} = \text{const}. \tag{25}$$

5　算　　例

例　已知 4 阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数组和 Birkhoff 函数分别为[3]

$$R_1 = a^3, \quad R_2 = a^4, \quad R_3 = R_4 = 0, \tag{26}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[a^3 - \arc\tan bt\right]^2 + \frac{1}{2}\left[a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)\right]^2, \tag{27}$$

试研究系统的 Lie 对称性与守恒量.

首先,建立系统的运动微分方程.由(2)和(5)式,得

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

方程(4)给出

$$\begin{aligned} \dot a^1 &= a^3 - \frac{1}{b}\arc\tan bt, \\ \dot a^2 &= a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2), \\ \dot a^3 &= 0, \\ \dot a^4 &= 0. \end{aligned} \tag{29}$$

其次,建立确定方程并求解.确定方程(12),给出

$$\dot\xi_1 = \xi_3, \quad \dot\xi_2 = \xi_4, \quad \dot\xi_3 = 0, \quad \dot\xi_4 = 0. \tag{30}$$

方程(4)有如下解:

$$\xi_1 = 1 + t, \quad \xi_2 = 1 + t, \quad \xi_3 = 1, \quad \xi_4 = 1. \tag{31}$$

根据命题 2,生成元(31)式对应 Birkhoff 系统的 Lie 对称性.

最后,求系统的守恒量.由(13)式,有

$$\frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^1}\left(a^3 - \frac{1}{b}\arc\tan bt\right) + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial a^2}\left(a^4 - \frac{1}{2b}\ln(1 + b^2 t^2)\right) = 0. \tag{32}$$

容易验证,方程(32)有解

$$\lambda_1 = a^3, \tag{33}$$

$$\lambda_2 = a^4. \tag{34}$$

将无限小生成元(31)式和函数 λ 代入(14)式,分别得到守恒量

$$I_1 = \frac{1}{a^3} = \text{const.}, \tag{35}$$

$$I_2 = \frac{1}{a^4} = \text{const.} \tag{36}$$

[1] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen.* **12** 973

[2] Zhao Y Y 1994 *Acta Mech. Sin.* **26** 380(in Chinese)[赵跃宇 1994 力学学报 **26** 380]

[3] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems*(Beijing:Science Press)p1(in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京:科学出版社)第 1 页]

[4] Mei F X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1207(in Chinese)[梅凤翔 2000 物理学报 **49** 1207]

[5] Mei F X and Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901(in Chinese)[梅凤翔、尚　玫 2000 物理学报 **49** 1901]

[6] Fu J L and Wang X M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1023(in Chinese)[傅景礼、王新民 2000 物理学报 **49** 1023]

[7] Zhang Y and Mei F X 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1354

[8] Zhang Y and Xue Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 816(in Chinese)[张　毅、薛　纭 2001 物理学报 **50** 816]

[9] Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[10] Bluman G W and Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equantions*(New York:Springer-Verlag)p1

[11] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** L291

[12] Lutzky M 1998 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **33** 393

[13] Lutzky M 1999 *Inter. J. Non-Linear Mech.* **34** 387

[14] Zhang R C 2001 *PhD Thesis* Beijing Institute of Technology(in Chinese)[张睿超 2001 博士学位论文　北京理工大学]

A set of conserved quantities from Lie symmetries for Birkhoffian systems*

Zhang Yi

(*Department of Urban Construction, University of Science and Technology of Suzhou, Suzhou 215011, China*)

(Received 17 August 2001; revised manuscript received 14 September 2001)

Abstract

This paper presents a new method for obtaining conserved quantities from Lie symmetries for Brikhoffian systems. The Lie symmetrical transformations of the systems are given, which only depend on the Birkhoffian variables. A set of conserved quantities are directly obtained from the Lie symmetries of the systems, and an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: analytical mechanics, symmetry, conserved quantity, Birkhoffian system

PACC: 0320, 1110, 0220

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19972010), and the "Qing Lan" Project Foundation of Jiangsu Province, China.