第 51 卷 第 3 期 2002 年 3 月
1000-3290/2002/51(03)/0465-03

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51,No.3,March,2002

(3+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程的孤子解和周期解*

李画眉
(浙江师范大学数理与信息科学学院,金华 321004)

(2001 年 11 月 13 日收到;2001 年 12 月 8 日收到修改稿)

采用行波法约化方程,建立一种变换关系,把求解(3+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov(NNV)方程的解转化为求解一维非线性 Klein-Gordon 方程的解,从而得到了(3+1)维 NNV 方程的孤子解和周期解.

关键词:(3+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov 方程,非线性 Klein-Gordon 方程,孤子解,周期解
PACC:0340K,0290,0230

1 引 言

近年来,孤子理论获得快速发展,并被广泛应用于量子场论[1]、凝聚态物理[2]、流体力学[3,4]、光学[5—7]等物理学领域以及化学[8]、生物[9]、通讯[10]等其他领域,激起了越来越多物理学家和数学家的兴趣.由于真实的物理空间是(3+1)维的,因此人们在深入研究(1+1)维、(2+1)维可积模型的同时,开始探索(3+1)维甚至更高维的可积模型,并取得了一些成就[11—15].由于(3+1)维可积模型的复杂性,要求得它的精确解就更加困难.本文首先采用行波法简化方程,然后通过变换关系,建立起(3+1)维 Nizhnik-Novikov-Veselov(NNV)可积方程与一维立方非线性 Klein-Gordon(KG)方程之间的联系,利用文献中已知的立方非线性 KG 方程丰富的孤子解和周期解[16],可以得到(3+1)维 NNV 方程的丰富的平面行波孤子解和周期解.

2 一般变换关系

在文献[14]中,利用广义 Virasoro 对称代数的高维实现,作者得到了著名的(2+1)维 NNV 方程(3+1)维的 Virasoro 可积推广:

$$u_{yzt} + (12c-2b-3a)u_{xxz}u_{yz} + au_{yyy}u_{yz} + bu_{xz}u_{xyz} + cu_{yy}u_{yyz} + (9c-2b)u_{xx}u_{yzz} + du_{xxyzz} + eu_{yyyyyz} = 0, \tag{1}$$

其中 a,b,c,d,e 为任意常数;u 为 x,y,z,t 的函数.当 $z=x$,并适当选择常数 $a-e$,(1)式即退化为通常的(2+1)维 NNV 方程.要严格求解(1)式非常困难.为了得到一些有意义的结果,现作简单的假设:

$$u = u(k_1x + k_2y + k_3z + k_4t) = u(\xi), \tag{2}$$

$\xi = k_1x + k_2y + k_3z + k_4t$;$k_1,k_2,k_3,k_4$ 为任意常数.把(2)式代入(1)式,化简并积分一次,得

$$k_4u_{\xi\xi} + \frac{1}{2}[3(7c-b-a)k_1^2k_3 + (a+c)k_2^3]u_{\xi\xi}^2 + (dk_1^2k_3 + ek_2^3)u_{\xi\xi\xi\xi} + c_1 = 0, \tag{3}$$

c_1 为积分常数.为了求解四阶的常微分方程(3),采用下述变换:

$$u_{\xi\xi} = A_0 + A_1\phi^2, \tag{4}$$

其中 ϕ 为下述方程的解:

$$\phi_\xi^2 = c_0 + \lambda\phi^2 + \frac{\mu}{2}\phi^4,$$
$$\phi_{\xi\xi} = \lambda\phi + \mu\phi^3. \tag{5}$$

把(4)和(5)式代入(3)式,按 ϕ 的幂次合并同类项,并令 ϕ 幂次前面的系数为零,得

$$\frac{1}{2}[3(7c-b-a)k_1^2k_3 + (a+c)k_2^3]A_1^2 + 3A_1(dk_1^2k_3 + ek_2^3)\mu = 0, \tag{6}$$

$$k_4A_1 + A_0A_1[3(7c-b-a)k_1^2k_3 + (a+c)k_2^3] + 4A_1\lambda(dk_1^2k_3 + ek_2^3) = 0, \tag{7}$$

* 高等学校博士学科点专项科研基金(批准号:2000024832)资助的课题.

$$k_4A_0+\frac{1}{2}[3(7c-b-a)k_1^2k_3+(a+c)k_2^3]A_0^2$$

$$2A_1c_0(dk_1^2k_3+ek_2^3)+c_1=0. \tag{8}$$

设

$$3(7c-b-a)k_1^2k_3+(a+c)k_2^3=f, \tag{9}$$

$$dk_1^2k_3+ek_2^3=g, \tag{10}$$

把(9)和(10)式代入(6)—(8)式,得

$$A_1=-\frac{6\mu g}{f}, \tag{11}$$

$$A_0=-\frac{k_4+4\lambda g}{f}, \tag{12}$$

$$c_1=-\frac{k_4^2+8g^2(3\mu c_0-2\lambda^2)}{2f}, \tag{13}$$

亦即如果 $\phi(\xi)$ 为方程(5)的解,则由(4)式表示的 $u(x,y,z,t)$(其中常数 A_0,A_1 由(11)和(12)式决定)即为(3+1)维 NNV 方程(1)的解.

3 (3+1)维 NNV 方程的孤子解和周期解

立方非线性 KG 方程(5)已在许多文献中得到深入的研究,利用(4)式和文献[16]中的(5)式的精确解,可以得到(3+1)维 NNV 方程的许多精确解,下面给出一些有意义的特例:

1)当 $\lambda=-2$,$\mu=2$,$c_0=1$ 时,方程(5)有扭结孤子解

$$\phi=\mathrm{th}\xi. \tag{14}$$

相应地,(3+1)维 NNV 可积方程(1)的势函数 $u_{\xi\xi}$ 的平面孤子解为

$$u_{\xi\xi}=A_0+A_1\mathrm{th}^2\xi, \tag{15}$$

其中 A_0,A_1 由(11)和(12)式给定;k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数.

2)$\lambda=2k^2-1$,$\mu=-2k^2$,$c_0=1-k^2$ 时,方程(5)有周期解

$$\phi=\mathrm{cn}\xi, \tag{16}$$

$\mathrm{cn}\xi$ 为 Jacobi 椭圆函数,相应地,(3+1)维 NNV 可积方程(1)的势函数 $u_{\xi\xi}$ 的周期解为

$$u_{\xi\xi}=A_0+A_1\mathrm{cn}^2\xi, \tag{17}$$

其中 A_0,A_1 由将 $\lambda=2k^2-1$,$\mu=-2k^2$,$c_0=1-k^2$ 代入(11)和(12)式决定;k_1,k_2,k_3,k_4 为任意常数.

利用文献[16]中各种精确解,还可得到许多其他形式的周期解.在此不再一一列举.

4 小 结

利用行波法将(3+1)维 NNV 方程约化后,建立了与立方非线性 KG 方程简单的代数变换关系,从而得到了(3+1)维 NNV 可积方程的许多孤子解和周期解.这种方法还可以广泛应用于其他一些高阶的非线性偏微分方程中,是求解非线性偏微分方程孤子解和周期解的一种既简单又有效的方法之一.

衷心感谢楼森岳教授的指导和帮助.

[1] Dolan L 1997 *Nucl. Phys.* B **489** 245

[2] Loutsenko I and Roubtsov D 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3011

[3] Tajiri M and Maesono H 1997 *Phys. Rev.* E **55** 3351

[4] Wang L Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 181(in Chinese)[王烈衍 2000 物理学报 **49** 181]

[5] Gedalin M, Scott T C and Band B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 448

[6] Ruan H Y and Chen Y X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 177(in Chinese)[阮航宇、陈一新 2000 物理学报 **49** 177]

[7] Ruan H Y and Chen Y X 2001 *Chin. Phys.* **10** 87

[8] Kalinikos B A, Kovshikov N G and Patton E C 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2827

[9] Shcherbakov A S, Kosarsky A Yu and Zvegintsev V N 1996 *Opt. Mum. Neural Netw.* **5** 313

[10] Niiyuma A and Koshiba M 1997 *IEICE Trans. Commun.* E **80-B** 522

[11] Lou S Y, Lin J and Yu J 1995 *Phys. Lett.* A **201** 47

[12] Lou S Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1657(in Chinese)[楼森岳 2000 物理学报 **49** 1657]

[13] Lou S Y 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5027

[14] Lin J, Lou S Y and Wang K L 2001 *Phys. Lett.* A **287** 257

[15] Lin J and Wang K L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 13 (in Chinese)[林机、汪克林 2001 物理学报 **50** 13]

[16] Lou S Y and Ni G J 1989 *J. Math. Phys.* **30** 1614

The soliton solutions and periodic solutions of (3 + 1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation*

Li Hua-Mei
(*College of Mathematics Physics and Information Science, Zhejiang Normal University, Jinhua* 321004, *China*)
(Received 13 November 2001; revised manuscript received 8 December 2001)

Abstract

(3 + 1)-Dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation was reduced by using traveling wave method. Some soliton solutions and periodic solutions of the model are obtained by using a simple transformation relation and exact solutions of the cubic nonlinear Klein-Gordon equation.

Keywords: (3 + 1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Veselov equation, nonlinear Klein-Gordon equation, soliton solution, periodic solution
PACC: 0340K, 0290, 0230

* Project supported by the Doctoral Program Foundation of Institutions of Higher Education of China (Grant. No. 2000024832).