

混沌背景下信号的盲分离*

汪芙蓉 王赞基 郭静波

(清华大学电机工程与应用电子技术系, 北京 100084)

(2001 年 4 月 19 日收到, 2001 年 8 月 23 日收到修改稿)

混沌信号与确定性小信号叠加生成的混合信号是一更高维的混沌信号, 因而不能用一般的混沌信号噪声抑制的方法进行分离. 提出了一种这类信号盲分离的方法. 在重构未知的混沌信号的动力方程时, 充分利用混沌吸引子的几何特性, 并且限定动力映射为原混沌吸引子所在流形的内部映射, 从而保证了重构的动力系统方程对应于原混沌信号, 而不是同样具有混沌特性的混合信号. 然后利用重构的动力方程, 借用混沌信号中的噪声抑制思想, 估计出原混沌信号对应的轨道, 实现信号分离. 通过对 Lorenz 系统中谐波信号、Henon 映象中自回归过程, 以及脑电信号中谐波信号进行提取的数值实验, 验证了信号盲分离方法的有效性和可行性.

关键词: 混沌, 非线性, 信号处理, 盲分离

PACC: 0545, 0540

1 引 言

将混合在混沌信号中的其他信号分离出来是混沌信号处理领域中重要的课题. 根据所关心的对象不同, 此类信号分离可分为混沌信号的噪声抑制问题和混沌背景下信号提取问题. 前者关心的是混沌信号本身, 后者关心的是被混沌信号掩蔽的小信号. 对混沌信号的噪声抑制问题已经进行了相当深入的研究. 根据先验知识的不同, 它可分为混沌动力机理已知和未知两种情况. 如果动力机理已知^[1-6], 噪声抑制的依据就是此确定性的动力机理, 噪声抑制的过程就是寻找一时间序列, 使它满足已知的混沌动力学演化规律, 同时与含噪声的观测序列足够接近. 如果混沌动力机理未知^[7-16], 噪声抑制过程中除了要估计动力系统的方程并加以利用外, 很重要的一点就是要充分利用混沌信号的几何性质, 即混沌吸引子所在的光滑流形的几何特性.

混沌信号的噪声抑制思想可以直接用来提取被混沌信号所掩蔽的小信号, 如 Kaplan 等人^[17, 18]的母体中胎儿心电信号的提取, Short^[19-21]对混沌通信系统安全性能的考察, Haykin^[22]对海洋杂波背景下小目标信号的提取研究等. 这里很重要的一点是, 对于确定性的小信号, 无法对它做统计上的一些假设, 不

能像在一般性的噪声抑制问题中那样, 根据随机噪声的统计特性, 利用一些较为严格的理论或准则, 如贝叶斯准则或最大似然准则^[4, 5], 实现信号和噪声分离. 同时, 对于确定性小信号和混沌信号直接叠加生成的混合信号, 本身也是一个混沌信号. 在混沌动力机理未知的情况下, 如何保证在信号分离中所利用的几何性质和动力机理对应于原混沌信号, 而不是混合信号, 这是成功实现信号分离的关键, 也是本文着重解决的问题.

2 原混沌系统和扩展混沌系统

记低维确定性混沌信号 $y(n)$ 和小信号 $s(n)$ 直接叠加生成的混合信号为 $r(n)$, 即 $r(n) = y(n) + s(n)$. 如果小信号 $s(n)$ 也是确定性的, 则在通常情况下, $r(n)$ 是比 $y(n)$ 更高维的混沌信号. 下面对此结论做简要说明. 记 $y(n), s(n)$ 对时间的连续形式分别为 $y(t), s(t)$, 它们是来自如下动力系统的输出:

$$\dot{x} = f(x), \quad y(t) = h(x(t)), \quad (1)$$

$$\dot{\xi} = \Psi(\xi), \quad s(t) = \phi(\xi(t)), \quad (2)$$

其中 $x(t), \xi(t)$ 为系统的状态变量, $f(\cdot), \Psi(\cdot)$ 为连续映射, $h(\cdot), \phi(\cdot)$ 为光滑函数. 由 (1) 和 (2) 式可以写出以 $r(t)$ 为输出变量的确定性系统:

* 国家重点基础研究专项基金(批准号: G1998020307)资助的课题.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), \\ \dot{\xi} = \Psi(\xi), \\ r(t) = h \cdot f(x(t)) \\ \quad + \phi \cdot \Psi(\xi(t)) = g(x(t), \xi(t)). \end{cases} \quad (3)$$

此确定性系统的状态变量为 $(x(t), \xi(t))$, 它是 (1) 和 (2) 式所表达系统的扩展系统. 根据嵌入理论, 对 $r(n), y(n)$ 进行坐标延迟重构, 相应的重构动力系统分别与 (3) 和 (1) 式的动力系统微分同胚, 因而 $r(n)$ 是比 $y(n)$ 更高维的混沌信号. 在重构相空间中, $r(n)$ 所对应的混沌吸引子比 $y(n)$ 所对应的混沌吸引子具有更高的维数, 且比较 $r(n)$ 和 $y(n)$ 对应吸引子所在光滑流形的维数, $r(n)$ 的要高. 为叙述方便, 称 $y(n), r(n)$ 对应的混沌系统分别为原混沌系统和扩展混沌系统.

3 信号盲分离

实现混沌信号和确定性小信号的分离, 依据的是混沌吸引子的几何特性和混沌系统确定性的演化规律. 在重构动力系统方程时, 由于混合信号本身也是一个混沌信号, 因而在选择动力方程的模型时, 不能选用直接定义在重构相空间中的全局模型或局部模型. 这是因为如果选用这样的模型, 则利用最小二乘 (LS) 或总体最小二乘 (TLS) 法拟合出的方程不能确定是原混沌系统方程还是扩展动力系统方程. 为保证重构方程对应原混沌系统, 本文采用的方法是将动力映射限定在特定的函数空间上. 记原混沌吸引子所在的流形为 M , 混合信号对应的流形为 M' , M 比 M' 维数低. 如果重构的动力方程对应的非线性映射 F 限定为 $M \rightarrow M$ 的内部映射, 则可以保证重构出的动力方程对应于原混沌系统. 同时, 由于确定性小信号在 M 上的投影分量可看成是随机信号, 因而对 F 的拟合可以应用 LS 或 TLS 等方法. 光滑流形 M 未知, 可以用流形上各点的局部切空间来近似. 文献 [7, 23] 详细讨论了局部切空间的估计算法. 下面对这一算法的具体步骤进行简要描述.

3.1 局部切空间的估计

按下式进行相空间重构, 得 $r(n)$ 的重构向量为

$$r(n) = [r(n-d+1), r(n-d+2), \dots, r(n)]^T. \quad (4)$$

与 $r(n)$ 对应的原混沌信号的重构向量为

$$y(n) = [y(n-d+1),$$

$$y(n-d+2), \dots, y(n)]^T, \quad (5)$$

d 为重构维数. 设 $r(n)$ 在 $n = n_0$ 的邻域 Ω_n 内的邻近点为 $r(n_i) \chi i = 1, 2, \dots, Q$, 取 $Q > d$, 则估计 $y(n)$ 所在流形的局部切空间 $T_{y(n)}M$ 的步骤如下:

1) 估计 Ω_n 的中心 $r(n_0) = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q r(n_i)$. 一般情况下, $r(n_0) \neq r(n_0)$.

2) 构造矩阵 A , 并对其奇异值分解

$$A = \begin{bmatrix} \frac{r(n_1) - r(n_0)}{\|r(n_1) - r(n_0)\|} & \frac{r(n_2) - r(n_0)}{\|r(n_2) - r(n_0)\|} & \dots & \frac{r(n_Q) - r(n_0)}{\|r(n_Q) - r(n_0)\|} \end{bmatrix},$$

$$A = [u_1, u_2, \dots, u_d]$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & & & \\ & \sigma_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \sigma_d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_Q^T \end{bmatrix}$$

3) 根据所计算的矩阵 A 的奇异值 $\sigma_i^2 (i = 1, 2, \dots, d)$, 可以确定局部切空间的维数 l , 也即流形 M 的维数. 确定 l 的准则是: 如果存在 k , 使得 $\sigma_k^2 \gg \sigma_{k+1}^2$, 并且满足 $\sum_{i=1}^k \sigma_i^2 \approx \sum_{i=1}^d \sigma_i^2$, 则 $l = k$; 否则, 可以设定接近于 1 的阈值 ν , l 等于使下式成立的最小的 k 值:

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^k \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} \right]^{1/2} \geq \nu.$$

4) 确定局部切空间 $T_{y(n)}M$ 在 R^d 空间的坐标原点为 $r(n_0)$, 它的一组正交基为 $[u_1, u_2, \dots, u_l]$.

3.2 重构混沌动力系统方程

为了限定动力映射 $F: y(n) \rightarrow y(n+1)$ 为流形 M 的内部映射, 即要求在 $y(n)$ 的小邻域内 $F: y(n) \rightarrow y(n+1)$ 是从 $T_{y(n)}M$ 到 $T_{y(n+1)}M$ 的映射, 首先需要将 $r(n)$ 的邻近点 $r(n_i) \chi i = 1, 2, \dots, Q$ 及其单位时间间隔后的向量 $r(n_i+1)$ 分别投影到切空间 $T_{y(n)}M$ 和 $T_{y(n+1)}M$ 上, 其投影表示为

$$y'(n_i) = r(n) + U_l U_l^T (r(n_i) - r(n)),$$

$$y'(n_i+1) = r(n+1) + \tilde{U}_l \tilde{U}_l^T (r(n_i+1) - r(n+1)),$$

其中 $r(n)$ 和 $r(n+1)$ 分别为 $r(n_i)$ 和 $r(n_i+1)$ 邻近 Q 个点的中心, $U_l = [u_1, u_2, \dots, u_l], \tilde{U}_l = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_l], \{u_i\}_{i=1}^l$ 和 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^l$ 分别为 $T_{y(n)}M$ 和

$T_{y(n+1)}M$ 的一组单位正交基, 映射 F 的最佳估计应为满足下式的最佳映射:

$$y'(n_i + 1) = \hat{F}(y'(n_i)), \quad i = 1, 2, \dots, Q.$$

一种自然而然的选取是取 \hat{F} 为局部线性形式, 它等价于线性映射 $L: T_{y(n)}M \rightarrow T_{y(n+1)}M$ 使得

$$a_{n_i, l} = L a_{n_i, l}, \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (6)$$

其中 $a_{n_i, l} = U_l^T(r(n_i) - \bar{r}(n))$ 为 $y'(n_i)$ 在切空间 $T_{y(n)}M$ 中以 $\bar{r}(n)$ 为坐标原点, $\{u_i\}_{i=1}^l$ 为一组单位正交基的坐标, $a_{n_i, l} = \tilde{U}_l^T(r(n_i + 1) - \bar{r}(n + 1))$ 为 $y'(n_i + 1)$ 在切空间 $T_{y(n+1)}M$ 中以 $\bar{r}(n + 1)$ 为坐标原点, $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^l$ 为一组单位正交基的坐标. 用最小二乘法确定此线性映射 L , 可得重构的动力系统方程为

$$y'(n + 1) = \hat{F}(y'(n)) = \bar{r}(n + 1) + \tilde{U}_l L U_l^T(y'(n) - \bar{r}(n)) = A_n y'(n) + b_n, \quad (7)$$

其中 $A_n = \tilde{U}_l L U_l^T$, $b_n = \bar{r}(n + 1) - A_n \bar{r}(n)$. 在 (7) 式等号右边用 $r(n)$ 替换 $y'(n)$, 可得单步预测方程^[24]:

$$y'(n + 1) = A_n r(n) + b_n. \quad (8)$$

3.3 信号分离

利用重构的动力系统方程进行信号分离的基本思路是: 在扩展混沌系统的轨道附近寻找一条轨道, 它满足重构的动力系统方程; 如果这条轨道是原混沌系统的轨道, 则它与扩展混沌系统轨道的偏移应该是需要分离的小信号. 上节已经描述了原混沌系统轨道的估计方法, 现在估计从 n 到 $n + N$ 的一段混沌轨道. 由 (7) 式, 有

$$y'(n + 1) = A_n y'(n) + b_n,$$

.....

$$y'(n + N) = A_{n+N-1} y'(n + N - 1) + b_{n+N-1}.$$

利用 $y'(n) = [y'(n - d + 1), y'(n - d + 2), \dots, y'(n)]^T$, 整理上述方程, 并令 $B_n = [0_{d \times 1} \quad I_d] - [A_n \quad 0_{d \times 1}]$, 可得下列线性方程:

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \begin{bmatrix} 0_{jd \times j} & 0_{jd \times (d+1)} & 0_{jd \times (N-j-1)} \\ 0_{d \times j} & B_{n+j} & 0_{d \times (N-j-1)} \\ 0_{(N-j-1)d \times j} & 0_{(N-j-1)d \times j} & 0_{(N-j-1)d \times (N-j-1)} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} y'(n - d + 1) \\ y'(n - d + 2) \\ \vdots \\ y'(n + N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n+1} \\ \vdots \\ b_{n+N-1} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

其中有 $N \times d$ 个方程, $N + d$ 个未知数. 从表面上看, 除个别情况外, (9) 式的方程个数多于未知数数目, 即该式为超定方程. 但实际上, (9) 式在一般情况下为不定方程. 现说明如下. $y(n) = (y(n - d + 1), y(n - d + 2), \dots, y(n))^T$ 为系统的状态变量, 因而 $y(n - d + 1), y(n - d + 2), \dots, y(n)$ 应为 d 个相互独立的变量. 混沌系统确定性机理保证了 n 时刻以后的混沌信号的取值由这 d 个变量唯一确定, 即

$$\begin{aligned} y(n + l) &= f_l(y(n - d + 1), y(n - d + 2), \\ &\dots, y(n + l)) \\ &= g_l(y(n - d + 1), y(n - d + 2), \\ &\dots, y(n)), \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

其中 $g_l(\cdot)$ 的表达式为唯一的. 所以 (9) 式中只有 N 个独立的方程.

为了对 (9) 式进行求解, 需要引入新的条件, 以保证估计出的原混沌轨道 $\{y'(j)\}_{j=n}^{n+N}$ 与含弱信号的扩展混沌系统的轨道足够接近. 文献中给出的一般的做法^[3, 25]是, 定义待估计的混沌轨道和扩展混沌系统轨道的某种距离 $D(\{r(n)\}, \{y'(n)\})$, 然后在满足 (9) 式的前提下令此距离最小. 用这种方法最终获得的方程规模非常大, 混沌运动的不稳定性将使得此方程病态^[25], 从而使得对此方程很难精确求解. 为减小方程的求解规模, 本文提出添加一个或多个形如 (7) 式的预测方程作为 (9) 式的补充方程:

$$y'(j) = A_{j-1} r(j - 1) + b_{j-1}, \quad j = n, \dots, n + N. \quad (10)$$

这个做法可以解释为以单步预测的形式, 预先设定待估计混沌轨道的某些点的初值, 这些初值当然是与扩展混沌系统轨道上相应点足够接近; 然后利用混沌轨道所遵循的动力方程对这些初值进行调整, 同时确定待估计轨道其他点的值. 这种做法能保证最终估计出的混沌轨道与扩展混沌系统轨道足够接近. 从后面给出的实际估计效果来看, 如果补充多个预测方程, 并且被置初值的点在待估计轨道上分布均匀, 结果对真实混沌轨道估计得越准确, 从而对弱信号的提取效果也越好.

3.4 计算步骤

根据以上所述, 本文关于信号盲分离的算法步骤可以归纳如下:

1) 应用时间延迟重构的方法对接收到的时间序列 $\{r(n)\}$ 进行相空间重构, 得到延迟向量序列 $\{r(n)\}$.

2) 根据 $r(k)$ 及其邻近点 $\{r(k_i)\}_{i=1}^p$, 估计 $y(k)$ 所在的局部切空间 $T_{y(k)}M$, 其中 $k = n, n+1, \dots, n+N$.

3) 将 $\{r(k_i)\}$ 及其单位时间间隔向量 $\{r(k_i + 1)\}$ 分别投影到切空间 $T_{y(k)}M$ 和 $T_{y(k+1)}M$ 上, 对 (6) 式用最小二乘法确定局部线性映射 $L: T_{y(k)}M \rightarrow T_{y(k+1)}M$, 从而重构出动力系统方程, 如 (7) 式.

4) 联立 (9) 和 (10) 式求解, 得到一段估计的混沌序列 $y'(k), k = n-d+1, \dots, n+N$. $y'(k)$ 和 $s'(k) = r(k) - y'(k)$ 即为对 $r(k)$ 进行盲分离所得的背景混沌信号和小信号.

5) 改变 n 值, 重复步骤 2) 3) 4), 实现对混合信号的逐段分离.

4 实验验证

为了检验算法的有效性, 本文给出混合在三种典型混沌源中的小信号分离的结果. 这三种混沌源分别为 Lorenz 系统、Henon 映象和脑电 (EEG) 信号. 在信号分离过程中, 假定混沌信号的动力机理未知.

Lorenz 系统的动力方程为 $\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \dot{x}_2 = x_1(R - x_3) - x_2, \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3$, 其中 $\sigma = 16.0, R = 45.92, b = 4.4$. 选取混沌信号为该系统的第一个坐标变量 x_1 , 并进行归一化, 使其均值为 0, 方差为 1. 采样间隔 $t_s = 0.01$, 即 $y(n) = x_1(nt_s)$.

Henon 映象方程为 $x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, y_{n+1} =$

bx_n , 其中 $a = 1.4, b = 0.3$. 混沌信号 $y(n) = x_n$, 并进行归一化, 使其均值为 0, 方差为 1.

EEG 信号是确定性的信号. 大量研究发现它具有混沌的特性. 以采样频率 800Hz 记录一段 EEG 信号作为混沌源, 并对其归一化, 使其均值为 0, 方差为 1.

4.1 Lorenz 混沌中谐波信号的提取

在 Lorenz 混沌信号中直接加入幅值 $A = 0.005$ 、归一化频率 $f = 0.05$ 的谐波信号, 得到混合信号. 混合信号序列长度为 10000. 重构相空间的维数 $d = 20$. 在相空间局部区域中, 典型的奇异值分布如图 1 (a) 所示. 根据准则可以确定原混沌系统对应的局部切空间维数 $l = 2$. 用本文方法分离出的一段谐波小信号波形如图 1 (b) 所示. 可以看出, 谐波信号被很好地提取出来. 然后在混合信号中加入均值为 0、标准差为 0.005 的高斯白噪声 (即相对于小信号为 200% 的噪声, 此时谐波信号相对于白噪声的信噪比 $SNR = -3.01\text{dB}$), 以模拟观测噪声. 分离出的一段谐波信号波形如图 2 (a) 所示. 对这段信号进行傅里叶变换, 所得傅里叶变换系数幅值如图 2 (b) 所示. 在归一化频率点 $f = 0.05$ 处, 可以看到明显的尖峰. 将对应于频率 $f = 0.05$ 的谱线幅值的平方与其他谱线幅值平方和求比值, 把这个比值作为提取的信号中真实信号相对于其他成分的信噪比. 这样得到的信噪比为 $SNR = -3.53\text{dB}$. 可见信号分离过程中只引入较少的算法噪声.

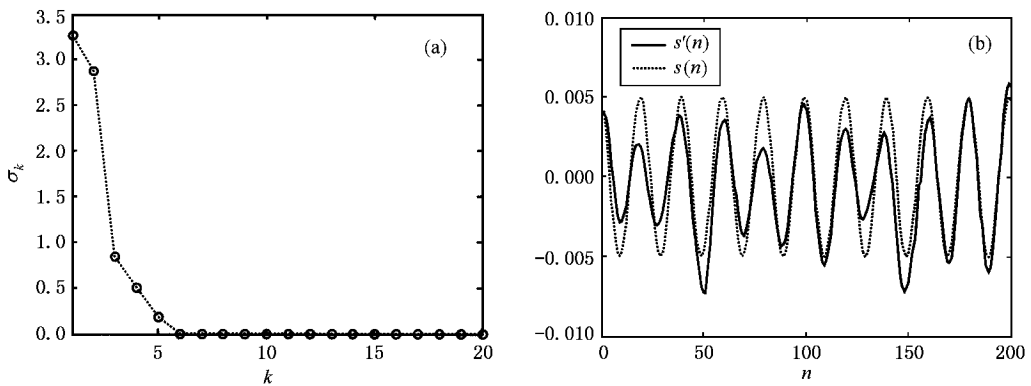


图 1 典型奇异值分布 (a) 和分离出的一段小信号 (b)

4.2 Henon 映象中自回归 (AR) 信号的提取

在 Henon 信号中加入标准差 $\sigma = 0.01$ 的 AR 信号, AR 参数为 $a_1 = -0.8, a_2 = 0.64$, 即

$$s(n) + a_1 s(n-1) + a_2 s(n-2) = v(n), \quad (11)$$

其中 $v(n)$ 为 0 均值的高斯白噪声. 混合信号序列长度为 10000. 选取相空间维数 $d = 6$, 局部切空间维数 $l = 2$. 分离出的一段 AR 信号波形如图 3 所示. 图 3

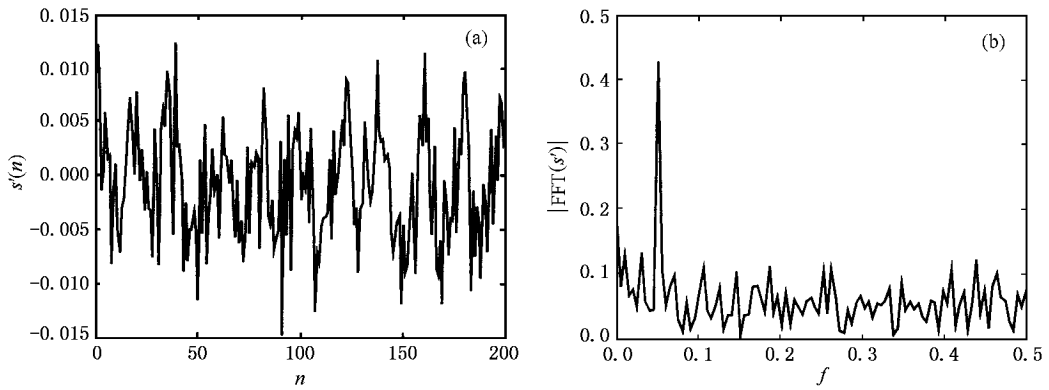


图 2 分离出的一段小信号 (a)为波形 (b)为 FFT 的幅值

中实线表示分离出的信号,虚线为真实信号,二者的波形很接近.由这一段分离出的信号估计出的 AR 参数为 $a_1 = -0.80$, $a_2 = 0.57$.估计的参数值与真实值接近.

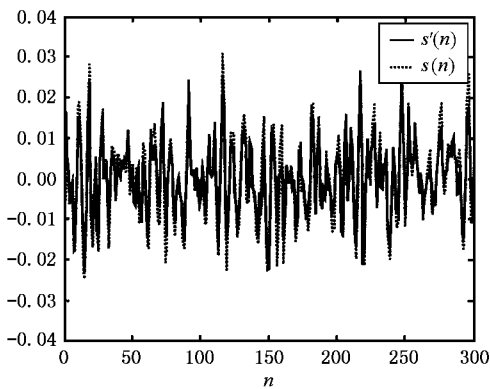


图 3 分离出的一段小信号波形

4.3 EEG 中谐波信号的提取

EEG 信号具有混沌的特性^[26].提取 EEG 中的谐波信号具有实际意义,如生物学中的稳态视诱发信号(SSVEP 信号)在一定程度上可以看成是自发电 EEG 信号和一系列谐波信号的叠加.为验证本文的方法,在自发 EEG 信号中加入幅值 $A = 0.02$ 、归一化频率 $f = 0.1$ 的谐波信号.混合信号序列长度为 10000.选取相空间维数 $d = 10$,局部切空间维数 $l = 3$.分离出的一段信号波形如图 4(a)所示.将这段提取的序列进行快速傅里叶变换,幅频特性如图 4(b)所示.将对应于频率 $f = 0.1$ 的谱线幅值的平方与其他谱线幅值平方和求比值,并把这个比值作为提取的信号中真实信号相对于其他成分的信噪比.这样得到的信噪比 $\text{SNR} = 4.1\text{dB}$.

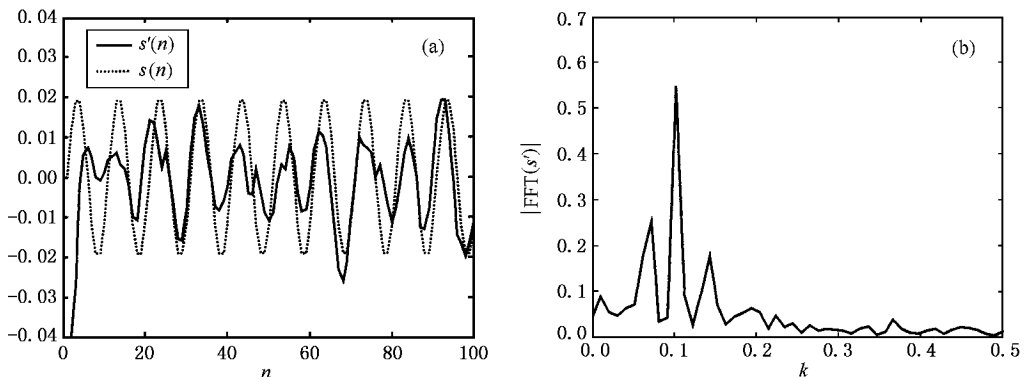


图 4 分离出的一段小信号 (a)为波形 (b)为 FFT 的幅值

5 关于本文方法的进一步讨论

本文提出的信号盲分离成功的关键在于能否准确地重构出原混沌系统动力方程. 前面数值实验结果表明, 本文提出的动力系统的重构方法行之有效. 下面将从理论上对这一结果进行分析.

非线性映射 $F: M \rightarrow M$ 和 $\tilde{F}: M' \rightarrow M'$ 分别为原混沌系统和扩展混沌系统的动力映射, 它们在 $\mathcal{r}(n)$ 邻域内的局部线性映射分别记为 F_l 和 \tilde{F}_l . 对 $\mathcal{r}(n)$ 的邻近点 $\{\mathcal{r}(n_i)\}_{i=1}^Q$, 有

$$\mathcal{r}(n_i + 1) = \tilde{F}_l \mathcal{r}(n_i) + \alpha (\|\mathcal{r}(n_i) - \bar{\mathcal{r}}(n)\|), \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (12)$$

$$\mathcal{y}(n_i + 1) = F_l \mathcal{y}(n_i) + \alpha (\|\mathcal{y}(n_i) - \bar{\mathcal{y}}(n)\|), \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (13)$$

其中 $\alpha(\cdot)$ 表示高阶项. 本文在重构动力映射时, 首先将 $\mathcal{r}(n_i)$ 及 $\mathcal{r}(n_i + 1)$ 分别投影到切空间 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 上, 重构映射 \hat{F} 是满足下式的最佳线性映射:

$$\begin{aligned} & \text{Proj}_{T_{\mathcal{r}(n+1)}M}(\mathcal{y}(n_i + 1) + \mathcal{s}(n_i + 1)) \\ &= \hat{F}(\text{Proj}_{T_{\mathcal{r}(n)}M}(\mathcal{y}(n_i) + \mathcal{s}(n_i))), \quad i = 1, 2, \dots, Q, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\text{Proj}_{T_{\mathcal{r}(n)}M}$ 表示向切空间 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 投影的算子, $\mathcal{s}(n_i) = [\mathcal{s}(n_i - d + 1), \dots, \mathcal{s}(n_i)]^T$, $\mathcal{r}(n_i) = \mathcal{y}(n_i) + \mathcal{s}(n_i)$. 由 $\mathcal{y}(n_i + 1) = \text{Proj}_{T_{\mathcal{r}(n+1)}M} \mathcal{y}(n_i + 1) + \alpha (\|\mathcal{y}(n_i + 1) - \bar{\mathcal{y}}(n + 1)\|)$, $\mathcal{y}(n_i) = \text{Proj}_{T_{\mathcal{r}(n)}M} \mathcal{y}(n_i) + \alpha (\|\mathcal{y}(n_i) - \bar{\mathcal{y}}(n)\|)$, 省略高阶项, (14) 式可改写为

$$\begin{aligned} F_l \mathcal{y}(n_i) + P_{\tilde{U}_l} \mathcal{s}(n_i + 1) &= \hat{F}(\mathcal{y}(n_i) + P_{U_l} \mathcal{s}(n_i)), \\ \tilde{F}_l \mathcal{r}(n_i) - P_{\tilde{U}_l} \mathcal{s}(n_i + 1) &= \hat{F}(\mathcal{r}(n_i) - P_{U_l} \mathcal{s}(n_i)), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, Q, \quad (15)$$

其中 $P_{U_l} = U_l U_l^T$, $P_{\tilde{U}_l} = \tilde{U}_l \tilde{U}_l^T$, $U_l = [u_1, u_2, \dots, u_l]$, $\tilde{U}_l = [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_l]$, $\{u_i\}_{i=1}^l$ 和 $\{\tilde{u}_i\}_{i=1}^l$ 分别为 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 的一组单位正交基, $P_{\tilde{U}_l}^{\perp} = I - P_{\tilde{U}_l}$, $P_{U_l}^{\perp} = I - P_{U_l}$, I 表示单位矩阵.

记

$$\begin{aligned} Y &= [\mathcal{y}(n_1), \mathcal{y}(n_2), \dots, \mathcal{y}(n_Q)], \\ R &= [\mathcal{r}(n_1), \mathcal{r}(n_2), \dots, \mathcal{r}(n_Q)], \\ S_0 &= [\mathcal{s}(n_1), \mathcal{s}(n_2), \dots, \mathcal{s}(n_Q)], \end{aligned}$$

$S_1 = [\mathcal{s}(n_1 + 1), \mathcal{s}(n_2 + 1), \dots, \mathcal{s}(n_Q + 1)]$, 最小二乘法估计出的重构映射 \hat{F} 可写成

$$\hat{F} = (F_l Y + P_{\tilde{U}_l} S_1 \ \& \ Y + P_{U_l} S_0)^{\#} \cdot [(Y + P_{U_l} S_0 \ \& \ Y + P_{U_l} S_0)^{\#}]^{-1}, \quad (16)$$

$$\hat{F} = (\tilde{F}_l R - P_{\tilde{U}_l} S_1 \ \& \ R - P_{U_l} S_0)^{\#} \cdot [(R - P_{U_l} S_0 \ \& \ R - P_{U_l} S_0)^{\#}]^{-1}. \quad (17)$$

空间的相邻性确定的时间标号 n_i , 其取值是随机的, 因而 $\mathcal{r}(n_i)$, $\mathcal{y}(n_i)$, $\mathcal{s}(n_i)$ ($i = 1, 2, \dots, Q$) 为随机向量, $\mathcal{y}(n_i)$ 和 $\mathcal{s}(n_i)$ 独立, $1 \leq i \leq j \leq Q$. 由于 $\{\mathcal{r}(n_i)\}_{i=1}^Q$ 为 $\mathcal{r}(n)$ 的邻近点, $\mathcal{s}(n) \ll \mathcal{r}(n)$, 因此有 $\mathcal{r}(n_i) \approx \mathcal{r}(n_j)$, $\mathcal{y}(n_i) \approx \mathcal{y}(n_j)$, 而 $\mathcal{s}(n_i)$ 和 $\mathcal{s}(n_j)$ 线性无关, $1 \leq i \leq j \leq Q$. 不妨设 $\mathcal{s}(n)$ 是零均值的信号, 则 (16) 和 (17) 式重构映射 \hat{F} 的均值为

$$E(\hat{F}) = (F_l C_Y + P_{\tilde{U}_l} C_{S_1, S_0} P_{U_l}^T \ \& \ C_Y + P_{U_l} C_{S_0} P_{U_l}^T)^{-1}, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{F}) &= (\tilde{F}_l C_R - \tilde{F}_l C_{S_0} P_{U_l}^T - P_{\tilde{U}_l}^{\perp} C_{S_1, S_0} + P_{\tilde{U}_l}^{\perp} C_{S_1, S_0} P_{U_l}^T) \\ &\cdot (C_R - C_{S_0} P_{U_l}^T - P_{U_l}^{\perp} C_{S_0} \\ &+ P_{U_l}^{\perp} C_{S_0} P_{U_l}^T)^{-1}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中 C_Y , C_R , C_{S_0} 表示 Y , R 和 S_0 自相关矩阵, C_{S_0, S_0} 表示 S_0 和 S_1 的互相关矩阵.

从 (18) 和 (19) 式可以看出, \hat{F} 用于重构 F_l , 它是个有偏估计, 估计的质量与切空间的方向密切相关. 小信号在切空间投影分量越小, 则重构动力映射 \hat{F} 越接近于 F_l ; 反之, \hat{F} 越接近于 \tilde{F}_l . 对确定性信号 $\mathcal{s}(n)$ 而言, 向量序列 $\{\mathcal{s}(n)\}$ 在 R^d 空间内构成规则的几何体, 可以假定 $\{\mathcal{s}(n)\}$ 位于 R^d 的线性子空间 E_s 内. 如果 E_s 是切空间 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 的子空间, 则有 $P_{\tilde{U}_l} S_1 = S_1$, $P_{U_l} S_0 = S_0$, 此时 $\hat{F} = \tilde{F}$. 如果 E_s 与 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 正交, 也即 E_s 是切空间 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 补空间的子空间, 则 $P_{\tilde{U}_l} S_1 = 0$, $P_{U_l} S_0 = 0$, 此时 $\hat{F} = F_l$. 通常情况下, E_s 与 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 和 $T_{\mathcal{r}(n+1)}M$ 是一般的相交关系, 此时 $0 < \|P_{\tilde{U}_l} S_1\| < \|S_1\|$, $0 < \|P_{U_l} S_0\| < \|S_0\|$.

切空间 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 由点 $\mathcal{y}(n)$ 唯一确定. 由于在重构混沌吸引子上, $\mathcal{y}(n)$ 的取值满足特定的概率分布, 因而 $T_{\mathcal{r}(n)}M$ 也是满足特定概率分布的随机变量. 在特定的重构相空间内, 由于 E_s 固定不变, 因而从总体上看, 事件 $B_0 = \{E_s \text{ 为切空间 } T_{\mathcal{r}(n)}M \text{ 和}$

$T_{j(n+1)}M$ 的子空间 $\mathcal{B}_1 = \{E_s$ 为切空间 $T_{j(n)}M$ 和 $T_{j(n+1)}M$ 补空间的子空间 \mathcal{B}_0 出现的概率是个常数. 由于切空间的维数 l 恒定, 与重构相空间的维数 d 无

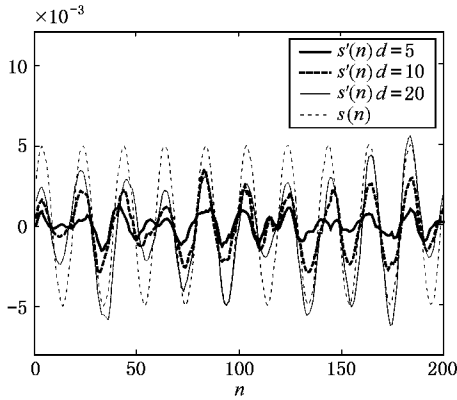


图 5 不同 d 值下, Lorenz 系统中谐波信号提取结果

关, 因而随着 d 增大, \mathcal{B}_0 出现的概率减小, 而 \mathcal{B}_1 出现的概率增大. 此时, 从总体上看, \hat{F} 作为 F_l 的估计越准确, 信号盲分离的效果越好. 如果 l 较小, 而 d 能够取得足够大, 使得 \mathcal{B}_0 出现的概率为 0, \mathcal{B}_1 出现的概率接近 1, 则信号分离能取得理想的效果. 下面以第 4 节中 Lorenz 系统中单个谐波信号提取为例说

明这个结论. 局部切空间维数为 2, E_s 的维数为 2, 取重构相空间维数 d 分别为 5, 10, 20, 谐波信号的提取结果如图 5 所示. 当 $d = 5$ 时, 提取效果很差. $d = 10$ 和 20 时, 谐波被成功提取. $d = 20$ 时, 结果最接近真实值.

6 结 论

混沌信号和确定性小信号的直接叠加生成的混合信号是比原混沌信号更高维的混沌信号. 这样, 在重构相空间中, 应用通常的局部模型或全局模型无法正确重构原混沌系统. 本文提出限定重构动力映射必须为原混沌吸引子所在流形的内部映射, 并以可行的算法实现, 这样就保证了重构动力系统必然对原混沌系统的估计, 而不是对扩展混沌系统的估计. 同时, 在提取原混沌轨道时, 本文提出以单步预测的形式添加必要的约束方程, 在一定程度上缓解了混沌运动不稳定性造成的求解矩阵的病态性, 从而能较精确地估计出原混沌轨道, 并最终成功地实现混沌信号和小信号的盲分离. 三种不同类型的数值实验结果验证了本文方法的可行性和有效性.

- [1] Farmer J D and Sidorowich J J 1991 *Physica D* **47** 373
- [2] Lee C and Williams D B 1997 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **44** 501
- [3] Jakó Z, Kolumbán G and Dedieu H 2000 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **47** 1403
- [4] Papadopoulos H C and Wornell G W 1995 *IEEE Trans. Infor. Theor.* **41** 312
- [5] Meyer R and Christensen N 2000 *Phys. Rev. E* **62** 3535
- [6] Ling C, Wu X F and Sun S G 1999 *IEEE Tran. Sig. Proc.* **47** 1424
- [7] Cawley R and Hsu G H 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3057
- [8] Grassberger P, Hegger R, Kantz H and Shaffrath C 1993 *Chaos* **3** 127
- [9] Kostelich E J 1993 *Phys. Rev. E* **48** 1752
- [10] Schreiber T and Kaplan D T 1996 *Chaos* **6** 87
- [11] Zhang J S et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 403 (in Chinese) 张家树等 2000 物理学报 **49** 403]
- [12] Zhang J S et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1221 (in Chinese) 张家树等 2000 物理学报 **49** 1221]
- [13] Zhang J S et al 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2333 (in Chinese) 张家树等 2000 物理学报 **49** 2333]
- [14] Yuan J et al 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2095 (in Chinese) 袁 坚等 1997 物理学报 **46** 2095]
- [15] Huang X G et al 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) 黄显高等 1999 物理学报 **48** 1810]
- [16] Feng G L et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) 封国林等 2001 物理学报 **50** 606]
- [17] Schreiber T and Kaplan D T 1996 *Phys. Rev. E* **53** R4326
- [18] Richter M, Schreiber T and Kaplan D T 1998 *IEEE Tran. Biom. Eng.* **45** 133
- [19] Short K M 1994 *Int. J. Bif. Chaos* **4** 957
- [20] Short K M 1996 *Int. J. Bif. Chaos* **6** 367
- [21] Short K M 1997 *Int. J. Bif. Chaos* **7** 1579
- [22] Haykin S and Li X B 1995 *Proc. IEEE* **83** 94
- [23] Wang F P et al 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 (in Chinese) 汪英平等 2001 物理学报 **50** 1019]
- [24] Wang F P, Guo J B and Wang Z J 2000 *International Conference on Signal Processing Proceedings*, Beijing 1 : 258
- [25] Abarbanel H D I 1996 *Analysis of Observed Chaotic Data* (New York : Springer-Verlag) chap. 7
- [26] Pijn J P, Neeren J V, Noest A and Lopes da Silva F H 1991 *Electroenceph. Clin. Neurophys.* **79** 371

Blind signal separation from chaotic background^{*}

Wang Fu-Ping Wang Zan-Ji Guo Jing-Bo

(*Department of Electrical Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 19 April 2001; revised manuscript received 23 August 2001)

Abstract

To separate a weak deterministic signal from a chaotic background of which the dynamic mechanism is unknown is a different problem from the noise reduction for a chaotic signal since the mixed signal is also a chaotic signal with higher dimension than the original chaotic system. This paper presents a blind separation method in which the dynamical equations of the original chaotic signal are reconstructed based on the knowledge of the geometric characteristic and the dynamical information of the chaotic attractor and the restriction that the map of the equations is limited in the estimated manifold of the original chaotic attractor. Thus, the reconstructed dynamical equations are guaranteed to be original chaotic system instead of mixed chaotic one. Having reconstructed the original chaotic equations, the trajectory of the corresponding chaotic signal can be estimated and thus the weak deterministic signal can be separated using the principles of noise reduction for a chaotic signal. Some simulations such as a harmonic extraction from Lorenz signal, an autoregressive signal extraction from Henon map and a harmonic extraction from electroencephalograph signal verified the effectiveness and adaptability of the proposed method.

Keywords : chaos, nonlinear, signal processing, blind separation

PACC : 0545, 0540

^{*} Project supported by the Special Foundation for State Major Basic Research Program of China (Grant No. G1998020307).