

# 基于状态观测器实现一类混沌系统的控制\*

姚利娜 高金峰

( 郑州大学电气工程学院 , 郑州 450002 )

( 2001 年 7 月 29 日收到 )

针对一类状态不能全部测量混沌系统的控制问题 , 提出了一种基于状态观测器并结合输入-状态线性化方法的控制方案 . 理论分析与计算机模拟都表明 , 该控制方案可以将一类混沌系统控制到给定的目标 .

关键词 : 状态观测器 , 输入-状态线性化 , 混沌控制

PACC : 0545

## 1 引 言

自从实现混沌控制的 OGY 方法<sup>[1]</sup>提出以来 , 混沌系统的控制问题引起了人们的广泛重视 , 并取得了一些成果<sup>[2-4]</sup> . 各类传统或改进的控制方法在一定条件下实现了混沌系统的控制目标<sup>[5-8]</sup> . 由于混沌系统控制问题的复杂性 , 寻求不同的优化控制方法实现混沌系统的控制 , 仍是今后一定时期内研究的重点 .

采用非线性控制理论中的输入-状态线性化方法进行混沌系统的控制研究<sup>[9,10]</sup>取得了良好的控制效果 . 该方法在一定条件下通过状态变换将非线性系统转换为线性系统 , 并利用线性系统的控制方法实现非线性混沌系统的控制目标 . 采用输入-状态线性化方法实现非线性乃至混沌系统控制的关键是要求系统的全部状态变量都能测量并用于反馈 . 但从实际物理过程来看 , 一般非线性系统的状态并不都是可以得到的 .

本文将输入-状态线性化方法与非线性状态观测器估计混沌系统的状态相结合 , 实现了一类状态不能全部测量的混沌系统的控制目标 .

## 2 输入-状态线性化方法

考虑单输入非线性系统 :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (1)$$

其中  $x \in R^n$  ,  $u \in R^1$  分别为状态变量和控制输入 ,  $g(x)$  和  $f(x)$  为  $R^n$  上的光滑向量场 . 若在  $R^n$  中存在一个区域  $\Omega$  , 微分同胚  $\Phi : \Omega \rightarrow R^n$  及反馈控制律

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \quad (2)$$

使得新的状态变量  $z = \Phi(x)$  及输入  $v$  有线性定常关系

$$\dot{z} = Az + bv, \quad (3)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

则称(1)式是输入-状态可线性化的 . 状态  $z$  称为线性化状态 , 控制律(3)式称为线性化控制律 .

定理 1<sup>[11]</sup> 对于非线性系统(1) , 当且仅当存在一个区域  $\Omega$  使得下列条件成立时 , 则该非线性系统是输入-状态可线性的 .

1) 向量场  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  在  $\Omega$  内线性无关 .

2) 集合  $\{g, ad_f g, \dots, ad_f^{n-1} g\}$  在  $\Omega$  内是对合的 .

通常在进行输入-状态线性化时 ,  $z$  中的第一个状态  $z_1$  应满足 :

$$\begin{cases} \nabla_{z_1} ad_f^1 g = 0, & (5) \\ \nabla_{z_2} ad_f^{m-1} g \neq 0, & (6) \end{cases}$$

并取变换后的状态变量为

$$\xi(x) = [z_1, L_f z_1, \dots, L_f^{n-1} z_1]^T, \quad (7)$$

\* 河南省教育厅自然科学基金( 批准号 : 1999470002 ) 资助的课题 .

因而有(3)式中的关系:

$$\begin{cases} \alpha(x) = -\frac{L_f^n z_1}{L_g L_f^{n-1} z_1}, \\ \beta(x) = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} z_1}. \end{cases} \quad (8)$$

于是得线性化可控系统

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = z_3, \dots, \dot{z}_{n-1} = z_n, \dot{z}_n = \nu. \quad (9)$$

对(9)式,可用

$$\nu = K^T z \quad (10)$$

的线性反馈控制律选择适当的反馈增益  $K$  配置(9)式的极点,实现闭环系统(3)的控制.

### 3 非线性状态观测器及其设计

考虑如下一般的非线性系统:

$$\dot{x} = Ax + g(t, u, y) + f(t, u, x), \quad (11)$$

$$y = Cx, \quad (12)$$

其中  $x \in R^n$  为系统的状态,  $A \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{m \times n}$ ;  $y \in R^m$ ,  $u \in R^p$  分别为系统的输出、输入  $g(\cdot, \cdot, \cdot): R^+ \times R^p \times R^m \rightarrow R^n$ ,  $f(\cdot, \cdot, \cdot): R^+ \times R^p \times R^n \rightarrow R^n$  分别为非线性映射,且  $f(t, u, x)$  满足如下的 Lipschitz 条件:

$$\begin{aligned} \|f(t, u, x_1) - f(t, u, x_2)\| &< r \|x_1 - x_2\|, \\ \forall u \in R^p, t \in R^+, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $r$  为 Lipschitz 常数,并设  $A, C$  可观.

对于(11)和(12)式,建立如下观测器:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + g(t, u, y) + f(t, u, \tilde{x}) + L(y - C\tilde{x}), \quad (14)$$

其中  $\tilde{x} \in R^n$  为观测变量,  $L \in R^{n \times m}$  为增益矩阵.定义  $w = x - \tilde{x}$ , 则可得

$$\dot{w} = (A - LC)w + f(t, u, x) - f(t, u, \tilde{x}). \quad (15)$$

观测器设计的问题为:选取适当的反馈阵  $L$ ,使(15)式渐近稳定,即保证如下关系:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0. \quad (16)$$

引理 1<sup>[12]</sup> 对于函数  $h(t) > 0$ , 常数  $a, c, \lambda$ , 如果

$$h(t) \leq ce^{\lambda t} + \int_0^t ae^{\lambda(t-\tau)} h(\tau) d\tau, \quad (17)$$

那么

$$h(t) \leq ce^{(\lambda+a)t}. \quad (18)$$

为方便并不失一般性,设  $A_c = A - LC$  具有非亏损结构,并且  $\lambda_i(A_c) < \alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则存在

$V \in R^{m \times n}$ ,  $\det V \neq 0$ , 使得

$$VA_c V^{-1} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \Lambda. \quad (19)$$

令  $\lambda = \max_i \lambda_i$ , 则可得如下观测器收敛条件:

定理 2 对于满足条件(13)式的系统(11)(12)及其观测器(14)式,若有

$$\lambda + \|V\| \cdot \|V^{-1}\| \cdot r < 0, \quad (20)$$

则(16)式成立.

证明 由(15)式得

$$\begin{aligned} w(t) = e^{A_c t} w(0) + \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} [f(\tau, u, x(\tau)) \\ - f(\tau, u, \tilde{x}(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

由(19)式可得

$$e^{A_c t} = V^{-1} e^{\Lambda t} V. \quad (22)$$

代入(21)式,

$$\begin{aligned} Vw(t) = e^{\Lambda t} Vw(0) + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} V [f(\tau, u, x) \\ - f(\tau, u, \tilde{x})] d\tau, \end{aligned} \quad (23)$$

上式等号两边取范数,可得

$$\begin{aligned} \|Vw(t)\| \leq e^{\lambda t} \|Vw(0)\| + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} r \|V\| \\ \cdot \|w(\tau)\| d\tau, \end{aligned} \quad (24)$$

又由于

$$\|w(\tau)\| = \|V^{-1} Vw(\tau)\| \leq \|V^{-1}\| \cdot \|Vz(\tau)\|, \quad (25)$$

故上述不等式成立

$$\begin{aligned} \|Vz(t)\| \leq e^{\lambda t} \|Vz(0)\| + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} r \|V\| \\ \cdot \|V^{-1}\| \cdot \|Vz(\tau)\| d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

由引理 1 及(20)(26)式,可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Vw(t)\| = 0, \quad (27)$$

即(16)式成立.故定理(2)成立.

从以上定理可以看出,观测器收敛的条件可归结为  $A_c$  阵的特征矢量矩阵  $V$  及其逆  $V^{-1}$  的范数条件.这样,如果能够得到矩阵  $V$  的参数化表示,就可以通过优化的方法,来确定满足(20)式的矩阵  $V$ .

对于能观对  $[A C]$  存在如下右互质分解:

$$(sI - A^T)^{-1} C^T = N(s)D^{-1}(s), \quad (28)$$

同时,由于

$$\text{rank}[sI - A^T \quad C^T]Q(s) = [0 \quad I], \quad (29)$$

满足(28)式的  $N(s), D(s)$  可由  $Q(s)$  中求得

$$Q(s) = \begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} \tilde{Q}(s). \quad (30)$$

由于只需进行(29)式所示的初等变换,故  $N(s), D(s)$  的求取十分简便.

取  $n$  个互异的  $\lambda_i \in C, \operatorname{Re} \lambda_i < 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 若  $\lambda_i$  带有虚部,应共轭出现.令

$$\nu_i = N(\lambda_i) \beta_i, \quad (31)$$

$$p_i = D(\lambda_i) \beta_i, \quad (32)$$

$$V = [\nu_1 \nu_2 \dots \nu_n], \quad (33)$$

$$P = [p_1 p_2 \dots p_n], \quad (34)$$

其中  $\beta_i \in C^m$  为自由参变量,满足如下约束:

$$1) \lambda_i = \bar{\lambda}_j \text{ 时, } \beta_i = \bar{\beta}_j;$$

$$2) \det V \neq 0.$$

利用线性系统的特征结构配置理论<sup>[13]</sup>,可得

定理 3 取

$$L = -V^{-T} P^T, \quad (35)$$

$$A_c = A - LC, \quad (36)$$

其中  $P, V$  的选取如(31)至(34)式所示,  $V, \beta_i (i = 1, 2, \dots, n)$  满足约束 1) 2)

$$VA_c V^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (37)$$

由于  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  互异,故  $A_c$  具有对角标准型.从定理 3 中可以看出,当  $V$  满足约束 2) 时,  $V$  成为  $A_c$  阵以  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为特征值的特征矢量矩阵,而约束 1) 是为了保证由(25)式所得的  $L$  为实矩阵.在算例中,选取  $\lambda_i \in R^-$ ,此约束条件自然得到满足.按上述方法选取  $L$ ,则在完成  $A_c$  阵极点配置的同时,给出了特征矢量矩阵  $V$  的全参数化表示,并且这些参数给出了特征结构配置的全部自由度<sup>[13]</sup>.这样,  $\|V\|$  和  $\|V^{-1}\|$  成为  $\lambda_i, \beta_i$  的函数,通过求解如下优化问题:

$\min J(\lambda_i, \beta_i) = \min_i ((\max_i \lambda_i) + r \cdot \|V\| \cdot \|V^{-1}\|)$  来寻找满足(20)式的矩阵  $V$ .实际上,上述优化问题不必进行到底,只需指标  $J$  小于零即可结束寻优过程.

#### 4 基于非线性观测器的混沌控制步骤

为实现状态不能全部测量的一类混沌系统的控制目标,可按以下步骤进行:

1) 对一类非线性混沌系统,依输入-状态线性化方法设计出可实现控制目标的控制律  $u$ ,一般情况下,  $u$  中包含了系统的所有状态变量  $x$ .

2) 由于系统的状态不能全部测量到,按文中给出的状态观测器设计方法,设计出混沌系统的观测

器,得到系统的估计状态.

3) 用系统的估计状态代替控制输入  $u$  中的状态用作反馈得到基于观测器的控制律.

#### 5 数值算例

考虑如下的 Rössler 混沌系统的控制问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 0.2x_2, \\ \dot{x}_3 = x_3(x_1 - 5.7) + 0.2 + u. \end{cases} \quad (38)$$

控制目标是设计一控制器,控制系统状态到一给定的目标值  $x^g$ .现将系统状态控制到原点.首先取如下的非线性反馈控制律:

$$u = 14.24x_1 + 17.048x_2 - 6.2x_3 - [x_3(x_1 - 5.7) + 0.2], \quad (39)$$

使混沌系统(38)转换为线性系统.

设计一个非线性状态观测器估计混沌系统的状态,系统(38)可写成如下形式,并设仅能观测  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -5.7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_3 + u + 0.2 \end{bmatrix}, \\ y &= [0 \quad 1 \quad 0] x, \end{aligned}$$

则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -5.7 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad 1 \quad 0],$$

$$f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_1 x_3 + u + 0.2 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

再求得

$$N(s) = \begin{bmatrix} s + 5.7 \\ s^2 + 5.7s \\ -1 \end{bmatrix},$$

$D(s) = s^3 + 5.5s^2 - 0.14s + 5.7$ , 经寻优后可得满足(20)式的  $V$

$$V = \begin{bmatrix} 3.1040 & 0.0960 & -0.1546 \\ -4.9119 & -0.4522 & 1.1922 \\ -0.7538 & -0.0968 & -0.0769 \end{bmatrix},$$

相应地

$$\lambda_1 = -1.5825, \lambda_2 = -4.7077, \lambda_3 = -7.7103,$$

$$\beta_1 = 0.7538, \beta_2 = 0.0968, \beta_3 = 0.0769,$$

那么对应的

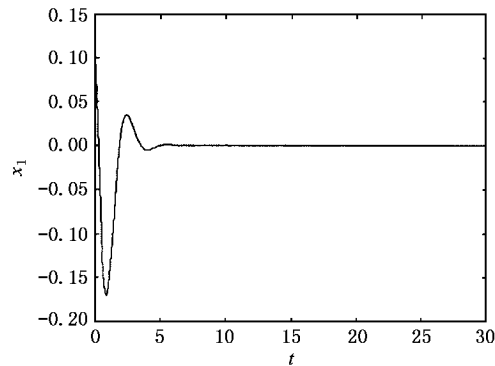
$$L = \begin{bmatrix} 27.0815 \\ 39.8847 \\ -138.7930 \end{bmatrix}.$$

于是就求得状态观测器为

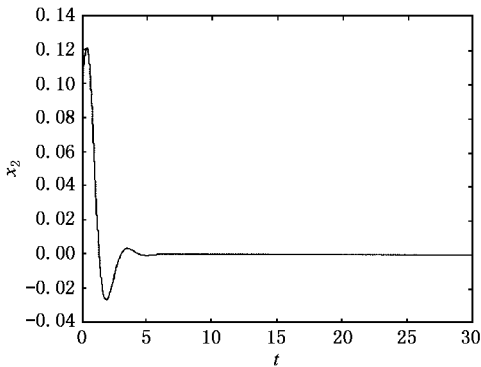
$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -5.7 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 + u + 0.2 \end{bmatrix} + K(y - C\tilde{x}).$$

用  $\tilde{x}$  代替(39)式中的  $x$ , 即可得基于状态观测器的控制律.

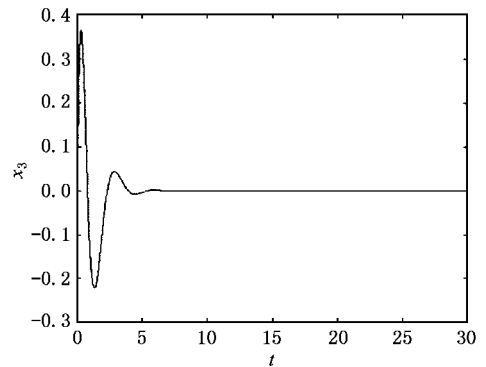
仿真结果如图 1 所示. 从图 1 可看出受控后的 Rössler 系统是稳定的, 且 3 个状态变量均收敛到零.



(a)  $x_1$  随时间变化曲线



(b)  $x_2$  随时间变化曲线



(c)  $x_3$  随时间变化曲线

图 1 基于观测器控制律的状态变化曲线

## 6 结 论

本文基于状态观测器并结合输入-状态线性化方法给出了一类状态不能全部测量的混沌系统的控

制方案. 在一定条件下该控制方案可将非线性混沌系统控制到给定的目标. 仿真结果也证实了方案的有效性. 今后要解决的问题是如何提高控制方案的鲁棒性.

- [ 1 ] Ott E, Grebogi C and Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196  
 [ 2 ] Gao J F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1618 (in Chinese) [ 高金峰等 1999 物理学报 **48** 1618 ]  
 [ 3 ] Gao J F, Luo X J and Ma X K 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 838 (in Chinese) [ 高金峰、罗先觉、马西奎 2000 物理学报 **49** 838 ]

- [ 4 ] Gao J F, Luo X J and Ma X K 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1235 (in Chinese) [ 高金峰、罗先觉、马西奎 2000 物理学报 **49** 1235 ]  
 [ 5 ] Chen G and Dong X 1992 *Int. J. Bifurc. Chaos* **2** 407  
 [ 6 ] Qu Z L, Hu G and Ma B K 1993 *Phys. Lett. A* **178** 265  
 [ 7 ] Yin W Y, Dai J H and Zhang H J 1994 *Phys. Rev. Lett.* **74** 1736

- [ 8 ] Yu J Z and Su N 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 397 ( in Chinese ] 余建祖、苏楠 1998 物理学报 **47** 397 ]
- [ 9 ] Baglio S *et al* 1994 *IEEE Sympos. Circ. Syst.* ( 8 ) 1389
- [ 10 ] Yin X H *et al* 2000 *Control and Decision* **15** 605 ( in Chinese ] 尹逊和等 2000 控制与决策 **15** 605 ]
- [ 11 ] Slotine J J E and Li W 1991 *Applied Nonlinear Control* ( New Jersey : Prentice Hall )
- [ 12 ] Vidyasagar M 1978 *Nonlinear Systems Analysis* ( America : Prentice-Hall )
- [ 13 ] Duan G R *et al* 1993 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **2** 276

## The control for a class of chaotic systems using observers<sup>\*</sup>

Yao Li-Na Gao Jin-Feng

( School of Electrical Engineering , Zhengzhou University , Zhengzhou 450002 , China )

( Received 29 July 2001 )

### Abstract

Using the input-state linearization method and observer theory , we investigate the control design for a class of chaotic systems in which state variables cannot be all measured. The proposed method is developed based on the observer , which estimates the state variables that are not measured. Computer simulation results illustrate the validity of the method.

**Keywords** : observer , input-state linearization , chaos , control

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of the Education Bureau of Henan Province , China ( Grant No. 1999470002 ).