第 51 卷 第 3 期 2002 年 3 月
1000-3290/2002/51(03)/0532-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51,No.3,March,2002

消除简并双光子过程中二能级原子的消相干性*

张登玉

(衡阳师范学院物理系,衡阳 421008)

(2001 年 8 月 19 日收到;2001 年 9 月 1 日收到修改稿)

研究了置于外部环境(热库)中的二能级原子在外加驱动场时原子的消相干问题.得到简并双光子过程中原子约化密度算符非对角元.在二能级原子的消相干被消除的情况下,讨论外加驱动场的特性.

关键词:简并双光子过程,二能级原子,消相干性

PACC:4250,0365

1 引 言

近几年,由于量子计算这一新学科的兴起,二能级原子更加引人注目,这是因为二能级原子作为两态系统可充当量子信息的载体——量子位[1—7].量子位既可作为量子计算中的存储单元,用于存储量子信息,也可作为量子逻辑运算的目标位和控制位,并利用目标位和控制位之间的可调控作用构造量子逻辑门[8,9].按照量子计算原理,量子位状态的演化必须是幺正变换,这就要求最好能够使量子位完全隔离于宏观的环境,但实际中二能级原子(量子位)不可能完全与外界隔离,量子位与环境之间总存在某种相互作用,这种作用将使得量子位的演化不是幺正变换,产生错误的计算结果,这种现象被称为消相干(decoherence)[10—13].消除量子位的消相干性,是量子计算成为现实的关键.

文献[14]利用 Markoff 近似,推导了一个二能级原子(量子位)处于任意温度的热库中的主方程及约化密度矩阵,讨论了单光子过程对量子位消相干的影响.郝三如等人讨论了具有热槽相互作用两态量子系统在外加驱动场作用下的消相干问题,建立了消相干被消除时外加驱动场必须满足的条件[15].对于处于热库中的二能级原子,在某一时刻,原子可能通过单光子过程与热库发生作用,也可能通过双光子过程甚至多光子过程与热库发生作用,热辐射场越强时,发生双光子过程的概率随之增大,其效应不可忽略.本文针对处于热库中的二能级原子,通过外加驱动场,以便消除简并双光子过程原子的消相干.本文采用小系统(原子个数很小)与热库相互作用的方法求解问题具有普适性,比文献[15]直接求解演化酉算符的方法更为简便.

2 二能级原子的约化密度算符

假定原子所处的热库可用热辐射场阻尼模来描述[16].对于二能级原子与热辐射场(热库)通过简并双光子相互作用,则系统的哈密顿量为(设 $\hbar=1$)

$$H = \omega_0\sigma_z/2 + \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + \sum_k g_k(S^+ a_k^2 + a_k^{+2} S), \tag{1}$$

外加驱动场 $E(t)$ 的偶极矩 d 对二能级原子的耦合项为

$$H_1 = -\frac{1}{2}d[S^+E(t) + SE^*(t)]. \tag{2}$$

在相互作用表象中,相互作用的哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_1 = {} & c[E(t)\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)S^+ + E^*(t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)S] \\ & + \sum_k g_k[S^+a_k^2\exp[\mathrm{i}(\omega_0 - 2\omega_k)t] \\ & + a_k^{+2}S\exp[-\mathrm{i}(\omega_0 - 2\omega_k)t], \end{aligned} \tag{3}$$

式中 $c=-d/2$,ω_0 为原子的跃迁频率,ω_k 为 k 模光子的频率,S^+,S 为原子向上、向下跃迁算符,g_k 为热库与原子耦合常数,设它为实数.a_k^+,a_k 为 k 模光子产生、湮没算符.整个系统的密度算符 $\rho_I(t)$ 满足[16,17]

* 湖南省中青年科技基金(批准号:00JZY2136)和湖南省教育厅科研基金(00C263)资助的课题.

$$\mathrm{i}\frac{\partial\rho_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t}=[H_{\mathrm{I}}(t),\rho_{\mathrm{I}}(t)],\qquad(4)$$

式中已取初始时刻 $t_0=0$. 利用微扰理论，将(4)式迭代到 $\rho_{\mathrm{I}}(t)$ 的二次项为止，得

$$\frac{\partial\rho_{\mathrm{I}}(t)}{\partial t}=\dot{\rho}_{\mathrm{I}}(t)=\mathrm{i}^{-1}[H_{\mathrm{I}}(t),\rho_{\mathrm{I}}(0)]-\int_0^t[H_{\mathrm{I}}(t),[H_{\mathrm{I}}(t'),\rho_{\mathrm{I}}(t')]]\mathrm{d}t',\qquad(5)$$

$\rho_{\mathrm{I}}(0)$ 为体系初始时刻总的密度算符

$$\rho_{\mathrm{I}}(0)=\rho_{\mathrm{qI}}(0)\rho_{\mathrm{rI}}(0),\qquad(6)$$

$\rho_{\mathrm{qI}}(0)$，$\rho_{\mathrm{rI}}(0)$ 分别为初始时刻原子和热库的密度算符. 热库的密度算符 $\rho_{\mathrm{rI}}(0)$ 可表示为

$$\rho_{\mathrm{rI}}(0)=\prod_k\rho_k(0)=\prod_k\left[1-\exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{kT}\right)\right]\cdot\exp\left(-\frac{\hbar\omega_k}{kT}a_k^+a_k\right),\qquad(7)$$

式中取热平衡时玻尔兹曼分布，$\rho_k(0)$ 为初始时 k 模光子的密度算符. 因初始时刻原子与热库未耦合，可认为 $H_{\mathrm{I}}(t)$ 与 $\rho_{\mathrm{I}}(0)$ 对易，即(5)式中 $[H_{\mathrm{I}}(t),\rho_{\mathrm{I}}(0)]=0$. 设原子约化密度算符为 $\rho_{\mathrm{qI}}(t)$，则

$$\dot{\rho}_{\mathrm{qI}}(t)=\mathrm{Tr}_r\dot{\rho}_{\mathrm{I}}(t)=-\int_0^t\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t),[H_{\mathrm{I}}(t'),\rho_{\mathrm{I}}(t')]]\mathrm{d}t'.\qquad(8)$$

如果热库很大，虽然热库与原子耦合时整个体系的密度算符随时间变化，但可以认为热库没有改变，此时可取近似

$$\rho_{\mathrm{I}}(t)\approx\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0),\qquad(9)$$

并认为 $\rho_{\mathrm{I}}(t')\approx\rho_{\mathrm{I}}(t)$ (Markoff 近似)[15]，由此(8)式变为

$$\dot{\rho}_{\mathrm{qI}}(t)=-\int_0^t\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t),[H_{\mathrm{I}}(t'),\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)]]\mathrm{d}t',\qquad(10)$$

其中

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t),[H_{\mathrm{I}}(t'),\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)]]\\&=\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t)H_{\mathrm{I}}(t')\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)\\&\quad-H_{\mathrm{I}}(t)\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)H_{\mathrm{I}}(t')\\&\quad-H_{\mathrm{I}}(t')\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)H_{\mathrm{I}}(t)\\&\quad+\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)H_{\mathrm{I}}(t')H_{\mathrm{I}}(t)],\end{aligned}\qquad(11)$$

式中等号右边第一项为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t)H_{\mathrm{I}}(t')\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rho_{\mathrm{rI}}(0)]\\&=\langle H_{\mathrm{I}}(t)H_{\mathrm{I}}(t')\rho_{\mathrm{qI}}(t)\rangle_R\\&=\sum_k g_k^2[S^+S\rho_{\mathrm{qI}}\exp[\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)(t'-t)]<a_k^2a_k^{+2}>_R\\&\quad+SS^+\rho_{\mathrm{qI}}\exp[-i(2\omega_k-\omega_0)(t'-t)]]<a_k^{+2}a_k^2>_R\\&\quad+c^2|E(t)|^2\exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\rho_{\mathrm{qI}}.\end{aligned}\qquad(12)$$

在得到上式过程中用到 $SS^++S^+S=1$，并作近似 $E(t')\approx E(t)$. 通过计算，可得

$$<a_k^2a_k^{+2}>_R=2(\bar{n}_k+1)^2,\qquad(13)$$

$$<a_k^{+2}a_k^2>_R=2\bar{n}_k^2,\qquad(14)$$

式中

$$\bar{n}_k=1/[\exp(\hbar\omega_k/kT)-1].\qquad(15)$$

因此

$$\begin{aligned}&\int_0^t\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t)H_{\mathrm{I}}(t')\rho_{qI}(t)\rho_{rI}(0)]\mathrm{d}t'\\&=c^2\rho_{qI}(t)|E(t)|^2\int_0^t\exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t'\\&\quad+2SS^+\rho_{qI}(t)\sum_k g_k^2\bar{n}_k^2\frac{1-\exp[\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)}\\&\quad+2S^+S\rho_{qI}(t)\sum_k g_k^2(\bar{n}_k+1)^2\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)}.\end{aligned}\qquad(16)$$

同理可求出(11)式等号右边第二项的积分为

$$\begin{aligned}&\int_0^t\mathrm{Tr}_r[H_{\mathrm{I}}(t)\rho_{qI}(t)\rho_{rI}(0)H_{\mathrm{I}}(t')]\mathrm{d}t'\\&=c^2S^+\rho_{qI}(t)S^+E^2(t)\int_0^t\exp[\mathrm{i}\omega_0(t+t')]\mathrm{d}t'\\&\quad+c^2S^+\rho_{qI}(t)S|E(t)|^2\int_0^t\exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t\\&\quad+c^2S\rho_{qI}(t)S^+|E(t)|^2\int_0^t\exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\mathrm{d}t\\&\quad+c^2S\rho_{qI}(t)S\int_0^tE^{*2}(t)\exp[-\mathrm{i}\omega_0(t+t')]\mathrm{d}t'\\&\quad+2S\rho_{qI}(t)S^+\sum_k g_k^2(\bar{n}_k+1)^2\frac{1-\exp[\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)}\\&\quad+2S^+\rho_{qI}(t)S\sum_k g_k^2\bar{n}_k^2\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)},\end{aligned}\qquad(17)$$

式中等号右边第一、四项为快速振荡项，因而可以将它忽视. 第二、三项对于约化密度矩阵非对角元的值为零，即

$$\langle 0|S^+\rho_{\mathrm{qI}}(t)S|1\rangle=\langle 1|S^+\rho_{\mathrm{qI}}(t)S|0\rangle=0,\qquad(18a)$$

$$\langle 0|S\rho_{\mathrm{qI}}(t)S^+|1\rangle=\langle 1|S\rho_{\mathrm{qI}}(t)S^+|0\rangle=0,\qquad(18b)$$

因而在本问题的研究中不起作用. 同理可求出(11)式等号右边第三、四项的积分，最后得 $[\rho_{\mathrm{qI}}=\rho_{\mathrm{qI}}(t)]$

$$\dot{\rho}_{\mathrm{qI}} = -2\Big[c^2\rho_{\mathrm{qI}}\,|E(t)|^2\int_0^t \exp[\mathrm{i}\omega_0(t-t')]\,\mathrm{d}t' + SS^+\rho_{\mathrm{qI}}\Omega_1 + S^+S\rho_{\mathrm{qI}}\Omega_2 - S\rho_{\mathrm{qI}}S^+\Omega_3 - S^+\rho_{\mathrm{qI}}S\Omega_4 - S\rho_{\mathrm{qI}}S^+\Omega_2 - S^+\rho_{\mathrm{qI}}S\Omega_1 + \rho_{\mathrm{qI}}SS^+\Omega_4 + \rho_{\mathrm{qI}}S^+S\Omega_3\Big], \tag{19}$$

式中

$$\Omega_1 = \sum_k g_k^2\bar{n}_k^2\,\frac{1-\exp[\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)},$$

$$\Omega_2 = \sum_k g_k^2(\bar{n}_k+1)^2\,\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)},$$

$$\Omega_3 = \sum_k g_k^2(\bar{n}_k+1)^2\,\frac{1-\exp[\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)},$$

$$\Omega_4 = \sum_k g_k^2\bar{n}_k^2\,\frac{1-\exp[-\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)t]}{\mathrm{i}(2\omega_k-\omega_0)}. \tag{20}$$

3 二能级原子作为量子位时消相干性的消除

当原子处于$|i\rangle$，其中 $i=0,1$ 分别为原子处于低、高能级，设 $\dot{\rho}_{ii'}=\langle i|\dot{\rho}_{\mathrm{qI}}|i'\rangle$，二能级原子作为量子位的消相干性可以通过密度算符非对角元随时间演化反映出来，因此我们确定 ρ_{10}，ρ_{01} 随时间的变化规律.

利用 $S|1\rangle=|0\rangle$，$S|0\rangle=0$，$S^+|0\rangle=|1\rangle$，$S^+|1\rangle=0$ 及其共轭矢(左矢)，得

$$\dot{\rho}_{01} = \langle 0|\dot{\rho}_{\mathrm{qI}}|1\rangle = -2\Big[\frac{1-\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)}{-\mathrm{i}\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega_1+\Omega_3\Big]\rho_{01}, \tag{21}$$

$$\dot{\rho}_{10} = \langle 1|\dot{\rho}_{\mathrm{qI}}|0\rangle = -2\Big[\frac{1-\exp(\mathrm{i}\omega_0 t)}{-\mathrm{i}\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega_2+\Omega_4\Big]\rho_{10}. \tag{22}$$

如果忽略 Lamb 移位项[16]，则在(21)和(22)式中的 Ω_i ($i=1,2,3,4$)取实部 Ω'_i ($i=1,2,3,4$)即可.

$$\Omega'_1+\Omega'_3 = \Omega'_2+\Omega'_4 = \sum_k g_k^2\big[\bar{n}_k^2 + (\bar{n}_k+1)^2\big]\,\frac{\sin[(2\omega_k-\omega_0)t]}{(2\omega_k-\omega_0)}. \tag{23}$$

求解(21)和(22)式，得

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0)\exp\Big[\int_0^t\Big(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega'_1+\Omega'_3\Big)\mathrm{d}t\Big], \tag{24}$$

$$\rho_{10}(t) = \rho_{10}(0)\exp\Big[\int_0^t\Big(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega'_2+\Omega'_4\Big)\mathrm{d}t\Big] = \rho_{10}(0)\exp\Big[\int_0^t\Big(\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega'_1+\Omega'_3\Big)\mathrm{d}t\Big]. \tag{25}$$

由以上两式知，$\rho_{01}(t)$，$\rho_{10}(t)$随时间演化规律相同，但初始值不同.当

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega'_1+\Omega'_3 = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}c^2|E(t)|^2 + \Omega'_2+\Omega'_4 = 0, \tag{26}$$

即 $E(t)$满足

$$|E(t)|^2 = \frac{\omega_0}{c^2\sin(\omega_0 t)}\sum_k g_k^2\big[\bar{n}_k^2+(\bar{n}_k+1)^2\big]\cdot\frac{\sin[(2\omega_k-\omega_0)t]}{\omega_0-2\omega_k} \tag{27}$$

或

$$E(t) = \Big\{\frac{2\omega_0}{d\sin(\omega_0 t)}\sum_k g_k^2\big[\bar{n}_k^2+(\bar{n}_k+1)^2\big]\cdot\frac{\sin[(2\omega_k-\omega_0)t]}{\omega_0-2\omega_k}\Big\}^{1/2}\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t) \tag{28}$$

时，则有

$$\rho_{01}(t) = \rho_{01}(0),\quad \rho_{10}(t) = \rho_{10}(0). \tag{29}$$

(27)式中 $E(t)$有一个位相因子的不确定性，(28)式中将位相因子取作 $\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)$.(28)和(29)式的物理意义:当(28)式的条件满足时，密度矩阵的非对角元 $\rho_{01}(t)$，$\rho_{10}(t)$，不随时间衰变，而是各自等于它的初始值，即二能级原子的消相干被消除.如果没有外加驱动场，单光子过程中 $\rho_{01}(t)$，$\rho_{10}(t)$，按指数时间衰减[14]，消相干指数因子大致与 $\bar{n}$成比例，双光子过程中 $\rho_{01}(t)$，$\rho_{10}(t)$也是按指数时间衰减，消相干指数因子大致与 $\bar{n}^2$ 成比例.如果外加驱动场不满足(28)式，从(24)和(25)式可看出，双光子过程中$\rho_{01}(t)$，$\rho_{10}(t)$也是按指数时间衰减，同样存在消相干现象.

从(28)式可看出外加驱动场的时间演化$E(t)$与原子偶极矩 d、原子跃迁频率 ω_0、k 模光子频率 ω_k、热库与原子耦合常数 g_k，以及热库的温度 T($\bar{n}_k$ 表达式中含有 T)有紧密的关系，这种关系并不是一般的函数关系，而是表现为无穷多项求和.对于不同的外部环境(热库)，由于 ω_k，g_k，$\bar{n}_k$ 不同，$E(t)$也不一样.因此，理论上可以在二能级原子与环境相互作

用系统中通过外加驱动场 $E(t)$ 达到消除二能级原子消相干的目的，但在实际中制备这种场并不容易．换言之，要消除量子计算中量子位（两态系统，如二能级原子的上下能态、光子的水平偏振和竖直偏振或者一个自旋为 1/2 粒子的两个自旋分量等）的消相干比较困难．正因为如此，研究消除量子位消相干性的理论和实验方法，成为量子计算中最重要的课题．近几年，制备高精细微波或量子光学腔的技术取得了长足的进步，因此制备满足（28）式的外加驱动场 $E(t)$ 成为可能，从而消除二能级原子的消相干性．

在本文书写过程中，与刘堂昆、王继锁、冯 健教授进行了有成效的讨论，在此向他们表示衷心感谢．

[1] DiVincenzo D P 1995 *Science* **270** 255
[2] Benett C H 1995 *Phys*. *Today* **48** 24
[3] Jin Z and Guo G C 1998 *Acta Phys*. *Sin*.（*Overseas Edition*）**7** 437
[4] Fang M F，Zhou Q P and Zhou P 1999 *Acta Phys*. *Sin*.（*Overseas Edition*）**8** 401
[5] Shi M J，Du J F and Zhu D P 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 825（in Chinese）［石名俊、杜江峰、朱栋培 2000 **物理学报** **49** 825］
[6] Fang X M，Zhu X W，Feng M，Gao K L and Shi L 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1405（in Chinese）［方细明、朱熙文、冯 芒、高克林、施 磊 1999 **物理学报** **48** 1405］
[7] Song K U，Guo G C 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 661（in Chinese）［宋克慧、郭光灿 1999 **物理学报** **48** 661］
[8] Zhang D Y and Zhan M S 1999 *Acta Phys*. *Sin*.（*Overseas Edition*）**8** 269
[9] Zhang D Y and Zhan M S 1997 *Acta Phys*. *Sin*. **46** 2344（in Chinese）［张登玉、詹明生 1997 **物理学报** **46** 2344］
[10] Zhang D Y and Zhan M S 1998 *Chin*. *J*. *Quantum Electron*. **15** 344（in Chinese）［张登玉、詹明生 1998 **量子电子学报** **15** 344］
[11] Zhang D Y 1999 *Optoelectron* · *Laser* **10** 465（in Chinese）［张登玉 1999 **光电子·激光** **10** 465］
[12] Unruh W G 1995 *Phys*. *Rev*. A **51** 992
[13] Shor P W 1995 *Phys*. *Rev*. A **52** R2493
[14] Chen P X，Li C Z，Huang M Q and Liang L M 2000 *Acta Photon*. *Sin*. **29** 5（in Chinese）［陈平形、李承祖、黄明球、梁林海 2000 **光子学报** **29** 5］
[15] Hao S R and Wang L Y 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 610（in Chinese）［郝三如、王麓雅 2000 **物理学报** **49** 610］
[16] Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation*（New York：Wiley）
[17] Peng J S and Li G X 1996 *Introduction of Modern Quantum Optics*（Beijing：Science Press）p98（in Chinese）［彭金生、李高翔著 1996 近代量子光学导论（北京：科学出版社）第 98 页］

Elimination of two-level atom's decoherence by an external driving field in degenerate two-photon processes*

Zhang Deng-Yu
（*Department of Physics*，*Hengyang Teachers College*，*Hengyang* 421008，*China*）
（Received 19 August 2001；revised manuscript received 1 September 2001）

Abstract

We have studied the problem of decoherence of two-level atoms which are put in a thermal reservoir through an external controllable driving field. The non-opposite angle element of two-level atom's reducible density rectangular array is obtained. We discuss the properties of an external driving field when the atom's decoherence is eliminated.

Keywords：degenerate two-photon processes，two-level atom，decoherence
PACC：4250，0365

* Project supported by the Science Foundation of Hunan Province，China（Grant No.00JZY2136），and the Science Foundation of the Education Bureau of Hunan Province，China（Grant No.00C263）.