

(2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的局域相干结构 *

张解放¹⁾ 韩 平²⁾

¹⁾ 浙江师范大学非线性物理研究室, 金华 321004)

²⁾ 浙江海洋学院物理系, 舟山 316004)

(2001 年 5 月 30 日收到, 2001 年 8 月 28 日收到修改稿)

利用推广的齐次平衡方法, 研究了(2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的局域相干结构. 首先根据领头项分析, 给出了这个模型的一个变换, 并把它变换成一个线性化的方程, 然后由具有两个任意函数的种子解构造出它的一个精确解, 发现(2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程存在相当丰富的局域相干结构. 合适的选择这些任意函数, 一些特殊型的多 dromion 解, 多 lump 解, 振荡型 dromion 解, 圆锥曲线孤子解, 运动和静止呼吸子解和似瞬子解被得到. 孤子解不仅可以存在于直线孤子的交叉点上, 也可以存在于曲线孤子的交叉点或最临近点上. 呼吸子在幅度和形状上都进行了呼吸. 本方法直接而简单, 可推广应用一大类(2 + 1) 维非线性物理模型.

关键词: 扩展齐次平衡法, Broer-Kaup 方程, (2 + 1) 维, 孤子解, dromion 解

PACC: 0230, 0340

1. 引 言

孤子是基于一类非线性物理模型的一个复杂数学结构^[1]. 随着对(1 + 1) 维非线性物理模型的孤子结构的研究和理解的深入, 高维非线性可积模型的似孤子结构的研究引起了物理学家和数学家的极大兴趣. 由于 Boiti, Leon, Martina 和 Pempinelli 的开拓性工作^[2], 近十多年来, 关于在(2 + 1) 维非线性物理模型中, 在各方向上都是指数衰减的, 被称为 dromion 的局域孤子解的研究受到了人们的高度关注. 至今不仅已获得一大类(2 + 1) 维非线性可积模型的 dromion 解结构, 如(2 + 1) 维 Davey-Stewartson(DS) 方程^[1, 2], (2 + 1) 维 Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程^[3], (2 + 1) 维广义 Nizhnik-Novikov-Vesselov(NNV) 方程^[4], (2 + 1) 维破裂孤子方程^[5], (2 + 1) 维长耗散波方程^[6], (2 + 1) 维标量非线性 Schrödinger 方程^[7], 而且(3 + 1) 维非线性 Korteweg-de Vries(KdV) 方程^[8]和 Jimbo-Miwa-Kadomtsev-Petviashvili(JMKP) 方程^[9]的似 dromion 解结构也被给出. 最近, 还进一步发现了(2 + 1) 维非线性 KdV 方程^[10], (2 + 1) 维破裂孤子方程^[11], (2 + 1) 维长耗散波方程和标量非线性 Schrödinger 方程^[12]等广义 dromion 解结构. 通常, dro-

mion 解由两个及以上的非平行直线隐形孤子形成, 如 DS 方程^[1, 2], NNV 方程^[4], 它们的 dromion 解由两个垂直的隐形孤子所形成, 而 KP 方程^[3], dromion 解则由两个非垂直的隐形孤子所形成. 对于某些非线性物理模型, 如 DS 方程^[1, 2], NNV 方程和反对称 NNV 方程^[4], dromion 解可以存在于物理场本身, 而对于某些非线性物理模型, 如 KP 方程和破裂孤子方程^[2], 则 dromion 解只对某种势场才存在. 一般而言, dromion 解存在于两个非平行直线孤子的交叉点上. 随后人们还进一步发现, 某些高维非线性物理模型的 dromion 解, 如(2 + 1) 维 KdV 方程^[10], (2 + 1) 维破裂孤子方程^[11], (2 + 1) 维耗散长波方程^[12]和(2 + 1) 维非线性 Schrödinger 方程^[13], 不仅可以由一些垂直的或非垂直的隐形孤子构成, 也可以由一些曲线孤子构成. 最近, 楼森岳等利用分离变量方法, 得到了(2 + 1) 维 KdV 方程^[14], (2 + 1) 维 NNV 方程^[15]和非线性 Schrödinger 方程^[16]的具有两个任意函数的相当丰富的局域相干结构, 而且还发现, 合适地选择这些函数, 局域相干结构可以是多 dromion 解, 多 lump 解, 振荡型 dromion 解, 环孤子解, 运动和静止呼吸子解, 似瞬子解. 而且 dromion 解既可以存在于一些直线孤子的交叉点上, 也可以存在于一些曲线孤子的交叉点或最临近点上. 呼吸子在形状和幅度

* 浙江省“151 人才工程”(批准号:1998)资助的课题.

† E-mail addresses: jfzhang@mail.jhptt.zj.cn

上都进行了呼吸。

寻求非线性物理模型的孤子解已创立了许多行之有效的方法,如逆散射变换方法,双线性方法, Bäcklund 和 Drboux 变换方法,对称约化方法等等。其中近年来建立的齐次平衡方法也是一种相当有效的方法^[17]。这种方法提供了一种构造非线性物理模型准确解便利的分析技术,已被推广用来得到非线性物理模型的多孤子解^[18-20], dromion 解^[21]和自 Bäcklund 变换^[22]。本文中将进一步利用推广的齐次平衡法研究 (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程

$$H_{ty} = H_{xxy} - \alpha (HH_x)_y - 2G_{xx}, \quad (1)$$

$$G_t = -G_{xx} - \alpha (GH)_x \quad (2)$$

的丰富的局域相干结构。方程 (1) 和 (2) 可用对称约束从 KP 方程中约化得到^[22], 并且该方程已在统计物理、等离子体物理和非线性光纤通信等许多科技

领域中得到应用。它的 Painlevé 性质和具有任意时间变量 t 或空间变量 y 的无穷多对称也已被讨论^[23]。

2. (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的线性化

为了部分平衡方程 (1) 中的非线性项 $-2(HH_x)_y$ 和三阶导数项 H_{xxy} 和方程 (2) 中的非线性项 $-\alpha (GH)_x$ 和二阶导数项 $-G_{xx}$, 根据推广的齐次平衡方法, 假定方程 (1) 和 (2) 的形式解取下列形式:

$$H = f(w)w_x + \alpha(x, t), \quad (3)$$

$$G = g'(w)w_xw_y + g'(w)w_{xy}, \quad (4)$$

式中 $f(w), g(w), w(x, y, t)$ 为待定函数, $\alpha(x, t)$ 为有意选择的函数的 $\{x, t\}$ 。

把 (3) 和 (4) 式代入方程 (1) 和 (2), 整理后得到

$$\begin{aligned} H_{ty} - H_{xxy} + \alpha(HH_x)_x + 2G_{xx} &= (2f''^2 + 2f'f^{(3)} - f^{(4)} + 2g^{(4)})w_x^3w_y \\ &+ f^{(3)}(w_xw_yw_t - 3w_x^3w_{xy} - 3w_xw_yw_{xx} + 2aw_x^2w_y) + f''(w_{xy}w_t + w_xw_{ty} + w_yw_{xt} \\ &- 3w_{xy}w_{xx} - 3w_xw_{xxy} - w_yw_{xxx} + 4aw_xw_{xy} + 2aw_{xx}w_y + 2a_xw_xw_y) + f'(w_{xyt} - w_{xxy} + 2aw_{xxy} \\ &+ 2a_xw_{xy}) + 2g'w_{xxy} + g^{(3)}(6w_xw_{xx}w_y + 6w_x^2w_{xy}) + g''(2w_{xxx}w_y + 6w_{xx}w_{xy} + 6w_xw_{xxy}) \\ &+ f'f''(6w_xw_{xx}w_y + 4w_x^2w_{xy}) + f'^2(2w_{xx}w_{xy} + 2w_xw_{xxy}) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} G_tG_{xx} + \alpha(HG)_x &= (g^{(4)} + 2g^{(3)}f' + 2g''f'')w_x^3w_y + g^{(3)}(3w_xw_{xx}w_y \\ &+ 3w_x^2w_{xy} + w_xw_yw_t + 2aw_x^2w_y) + g''(w_{xxx}w_y + 3w_{xx}w_{xxy} + w_{xy}w_{yt} + w_yw_{xt} \\ &+ 2aw_{xx}w_y + 4aw_xw_{xy} + 2a_xw_xw_y) + g'(w_{xyt} + w_{xxy} + 2aw_{xxy} + 2a_xw_{xy}) \\ &+ f'g''(4w_xw_{xx}w_y + 4w_x^2w_{xy}) + 2f''g'w_x^2w_{xy} + f'g'(2w_xw_{xxy} + w_{xx}w_{xy}) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

为了简化方程 (5) 和 (6), 令方程 (5) 和 (6) 中 $w_x^3w_y$ 前的系数为零, 可得到一组 $f(w)$ 和 $g(w)$ 所满足的常微分方程

$$2f'' + 2f'f'' - f^{(4)} + 2g^{(4)} = 0, \quad (7)$$

$$g^{(4)} + 2g^{(3)}f' + 2f''g'' = 0. \quad (8)$$

从方程 (7) 和 (8), 可求得一组特解

$$f(w) = g(w) = \ln w. \quad (9)$$

因此进一步有

$$f'f'' = -\frac{1}{2}f^{(3)}f'^2 = -f''. \quad (10)$$

利用 (9) 和 (10) 式, 方程 (5) 和 (6) 变成

$$\begin{aligned} f'(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_{xy} + f''[w_{xy}(w_t + w_{xx} + 2aw_x) + w_x(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_y \\ + w_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_x] + f^{(3)}[w_xw_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x)] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} g'(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_{xy} + g''[w_{xy}(w_t + w_{xx} + 2aw_x) + w_x(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_y \\ w_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_x] + g^{(3)}[w_xw_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x)] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

令方程 (11) 和 (12) 中 $f^{(3)}, f'', f'$ 或 $g^{(3)}, g'', g'$ 前的系数为零, 可得一组关于 $w(x, y, t)$ 的偏微分方程组

$$(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_{xy} = 0, \quad (13)$$

$$w_xw_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x) = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} w_{xy}(w_t + w_{xx} + 2aw_x) + w_x(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_y \\ + w_y(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_x = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$(w_t + w_{xx} + 2aw_x)_{xy} = 0, \quad (16)$$

对 (13) — (16) 式进行分析后发现, 只要 $u(x, y, t)$ 满足

$$w_t + w_{xx} + 2aw_x = 0, \quad (17)$$

上面各个方程均自动满足. 由此可见方程 (1) 和 (2) 经过变换式 (3) 和 (4) 后可线性化.

3. (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的特殊局域相干解

对于方程 (17), 我们能构造多种不同的特解. 由于 $\alpha(x, t)$ 是一个变量为 $\{x, t\}$ 的待定函数, 因此可以选择以下分离变量解:

$$u(x, y, t) = 1 + c_1 p(x, t) + c_2 q(y) + Cp(x, t)q(y),$$
$$\alpha(x, t) = -\frac{p_t + p_{xx}}{2p_x}, \quad (18)$$

式中 $p(x, t)$ 是变量 $\{x, t\}$ 的任意函数, $q(y)$ 是变量 y 的任意函数, c_1, c_2 和 C 是三个任意常数. 把 (9) (18) 式代入 (3) 和 (4) 式, 可以求得 (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的一个精确解

$$H(x, y, t) = \frac{(c_1 + Cq)p_x}{1 + c_1 p + c_2 q + Cpq} - \frac{p_t + p_{xx}}{2p_x}, \quad (19)$$

$$\alpha(x, y, t) = \frac{(A - c_1 c_2)p_x q_y}{[1 + c_1 p + c_2 q + Cpq]}. \quad (20)$$

从解 (19) 和 (20) 式可知, 由于引入了三个任意函数, 使得 (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的孤子解具有相当丰富的结构. 下面我们讨论一些有意义的情况.

3.1. 多个直线隐形孤子形成的多 dromion 解

一般而言, 多 dromion 解是由具有某种色散关系的多个直线孤子所构成, 并且发生在直线的交点上. 若我们选择

$$q(y) = \sum_{i=1}^n \exp[l_i y + y_{0i}],$$
$$p(x, t) = \sum_{l=1}^m \exp[k_l x + \omega_l t + x_{0l}], \quad (21)$$

式中 $k_l, l_i, \omega_l, x_{0l}, y_{0i}$ 是任意常数, m, n 是任意正整数. 这样我们就求得了一种特殊类型的多解. 而且 k_l 与 ω_l 之间没有任何色散关系. 图 1 给出的是当 $m = n = k_1 = l_1 = c_1 = C = 1, x_{01} = y_{01} = 0, c_2 = 2$ 时场变量 $\alpha(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 的单 dromion 解.

3.2. 多直线和多曲线诱导的多 dromion 解

为了便于进一步讨论, 可以作如下变换:

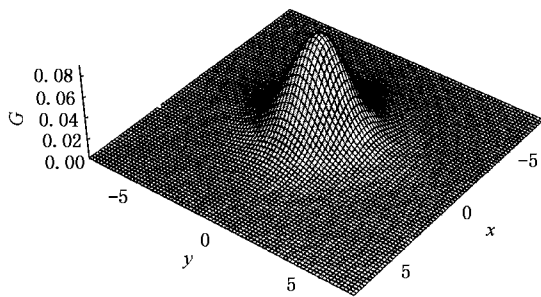


图 1 由两条直线孤子形成的 dromion 解

$$p = \exp(2F(x, t)), q = \exp(2R(y))$$
$$c_1 = c_2 = 0, C = 1, \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (20) 式后 (20) 式变为

$$\alpha(x, y, t) = F_x R_y \operatorname{sech}^2(F + R). \quad (23)$$

从 (23) 容易看出一族平行于 y 轴的直线孤子 F_x 、一族平行于 x 轴的直线孤子 R_y 和一族曲线孤子 $\operatorname{sech}^2(F + R)$ 可以诱导出场变量 $\alpha(x, y, t)$ 各种各样的多 dromion 解. 图 2 描绘了当取

$$F = \exp[(x + \omega t)^2], R = \exp(-2y^2) \quad (24)$$

场变量 $\alpha(x, y, t)$ 在 $t = 0$ 时的多 dromion 解图象.

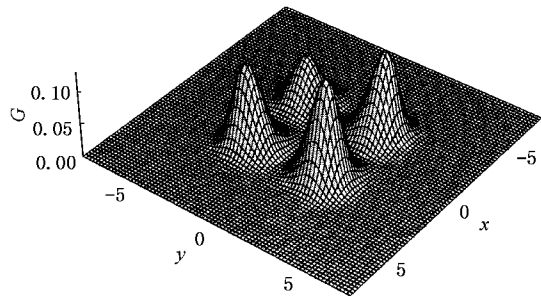
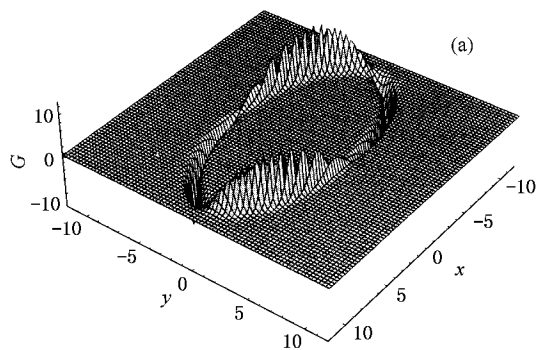


图 2 四孤子结构

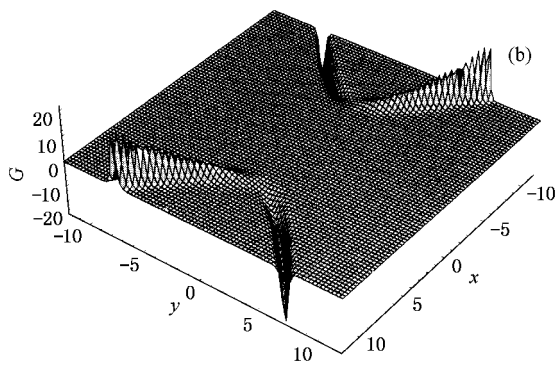
3.3. 圆锥曲线孤子解

在高维情况下, 除了通常的单峰和多峰 (即点局域) 的所有方向都指数衰减的 dromion 解外, 还可能存在其他形式的所有方向都指数衰减的 dromion 解, 如在一些 (2 + 1) 维和 (3 + 1) 维的非线性模型中, 存在环形 (碟形、盆形、碗形) 孤子解. 这些孤子解也可在 (2 + 1) 维 Broer-Kaup 方程的解中构造出特殊的多 dromion 孤子解. 如当取 $p + q = 0$ 描述一条圆锥曲线时 (20) 式即表示一种特殊类型的圆锥曲线孤子解. 图 3 显示了选择参数 $c_1 = c_2 = 0$ 和 $C = 1$ 后,

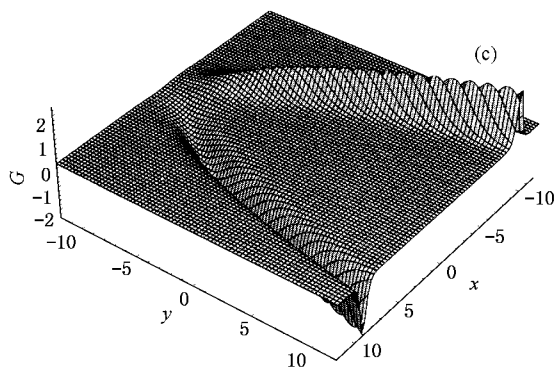
(a) 当



(a) 椭圆形



(b) 双曲线形



(c) 抛物线形

图3 各种形式的孤子结构

$$p = \exp\left[-\frac{(x - \omega t)^2}{4} + 25\right], q = \exp(-y^2), \quad (25)$$

在 $t=0$ 时场变量 $b(x, y, t)$ 的椭圆孤子结构;

(b) 当

$$p = \exp\left[\frac{(x - \omega t)^2}{4} - 9\right], q = \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \quad (26)$$

在 $t=0$ 时场变量 $b(x, y, t)$ 的双曲线孤子结构;

(c) 当

$$p = \exp\left[-\frac{(x - \omega t)^2}{4}\right], q = \exp(-y), \quad (27)$$

在 $t=0$ 时场变量 $G(x, y, t)$ 的抛物线孤子结构.

3.4. 多 lump 解

在高维情况下,如 KP 方程中已经发现一种被叫做 lump 解的特殊型的局域结构,它是由比例函数所形成.这种情况也出现在 $(2+1)$ 维 Broer-Kaup 方程中.

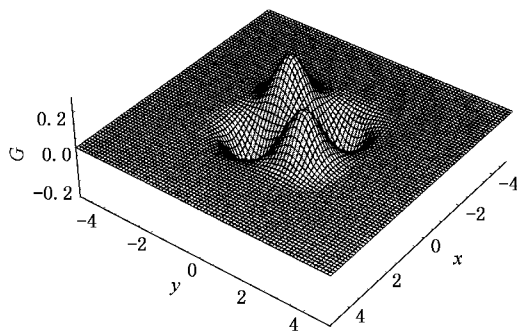


图4 多 lump 孤子结构

图4 就是一幅由

$$p = \exp(x - \omega t)^2, q = \exp(-y^2), \quad (28)$$

当选择参数 $c_1 = c_2 - 1 = C = 1$ 后在 $t=0$ 的多 lump 解.

3.5. 振荡型的 dromion 解

如果某些空间变量的周期函数包含在函数(27)式的 p 和 q 中,可获得由(28)式表示的场 $G(x, y, t)$ 某些方向具有振荡型尾部的 dromion 解.如取

$$p = \exp[(x - \omega t) \cos x], q = \exp(y), \quad (29)$$

就可得到在方向振荡的 dromion 解.图5是一幅由(29)式所确定的(20)式表示的场 $G(x, y, t)$ 的一种的振荡型 dromion 结构,其中 $c_1 = c_2/2 = C = 1, t=0$.

3.6. 静止和运动呼吸子

若上面给出的局域解中含有时间的周期函数,那么所有的这些局域解就成为相应的呼吸子.例如,图6给出的就是取

$$p = \exp\left(x \left(\cos t + \frac{20}{19}\right)\right), q = \exp(-y), \quad (30)$$

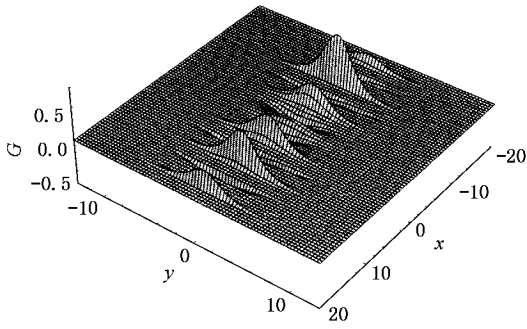
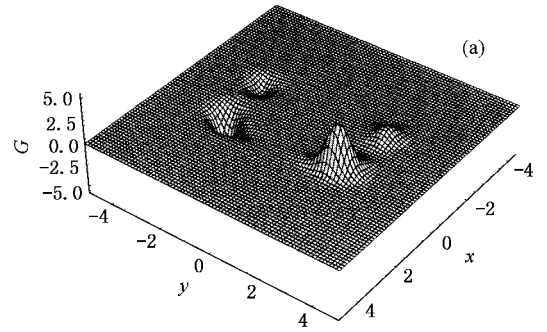
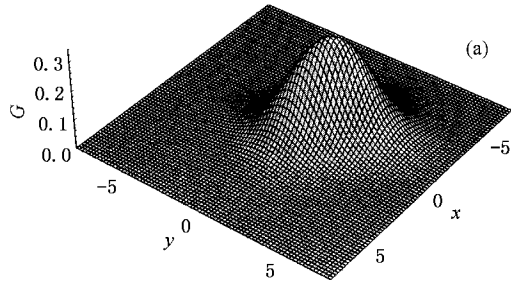


图 5 振荡型 dromion 解

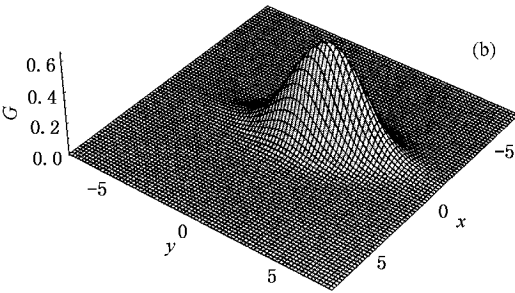


(a) $t = 0$

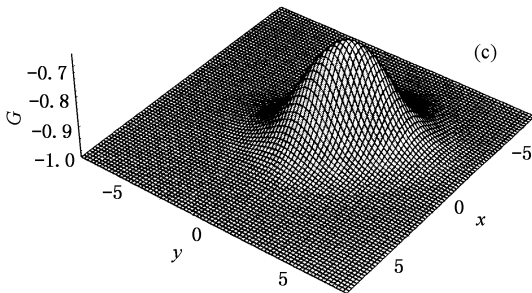
并选择 $c_1 = c_2/2 = C = 10$, 在时间分别为 $t = -\pi/2$, $0, \pi/2$ 的图象. 从图 6 中可以看出, 这种类型的呼吸子在形状和幅度上都进行了呼吸.



(a) $t = -\pi/2$

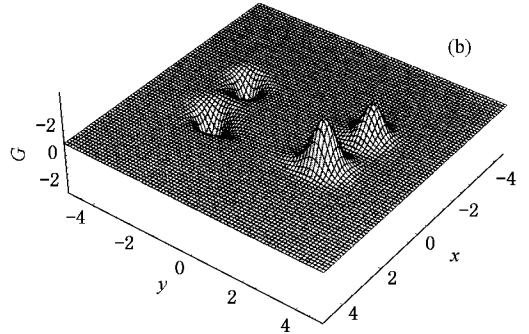


(b) $t = 0$

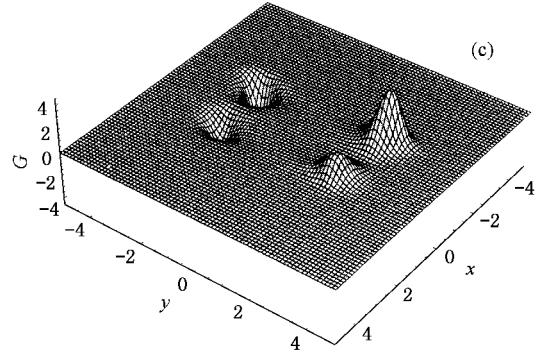


(c) $t = \pi/2$

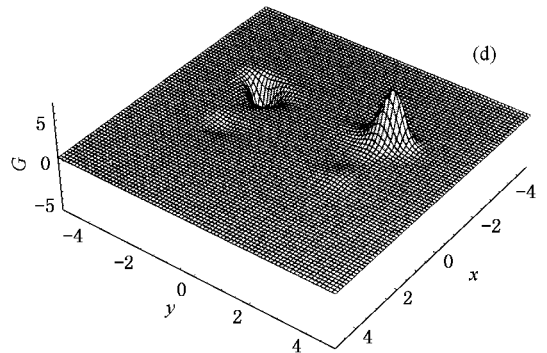
图 6 单 dromion 型呼吸子



(b) $t = \pm 1.0$



(c) $t = \pm 1.5$



(d) $t = \pm 2.0$

图 7 瞬子结构

3.7. 似瞬子解

如果在 (20) 式的函数 p 或 q 含有随时间增长而衰减的因子, 比如说用 $\text{sech}(t)$ 去乘 p 或 q , 那么在 3.1.—3.6. 讨论过的所有局域结构都成为似瞬子解.

图 7 显示一种特殊的由 (20) 式表示的场变量 $U(x, y, t)$ 的似瞬子解. 其中

$$p = \exp(x^3 + t^2 - 2), q = \exp(-y^2 + 4), \quad (31)$$

且 $c_1 = C = c_2/2 = 5$, 在 $t = 0; \pm 1.0; \pm 1.5; \pm 2.0$.

4. 结 论

我们利用推广的齐次平衡方法, 首先将 (2+1)

维 Broer-Kaup 方程线性化, 然后由分离变量解, 得到许多新的丰富的多孤子结构. 由于种子解中含有任意函数, 因此合适的选择这些函数, 同样可以得到 (2+1) 维 Broer-Kaup 方程类似于 (2+1) 维 KdV 方程、(2+1) 维 NNV 方程和 nonlinear Schrödinger 方程的多直线孤子解、多 dromion 解、多 lump 解、环孤子解、呼吸子解和似瞬子解.

齐次平衡方法已经得到广泛的应用, 这里我们又进一步拓展了它的应用. 这种方法对其他高维的非线性物理模型的推广值得深入研究.

-
- [1] Boiti M, Leon J J P, Martina L and Pempinelli F 1988 *Phys. Lett. A* **132** 432
- [2] Fokas A S and Santini P M 1990 *Physica D* **44** 99
Hietarinta J and Hirota R 1990 *Phys. Lett. A* **145** 237
- [3] Hietarinta J 1990 *Phys. Lett. A* **149** 113
- [4] Radha R and Lakshmanan M 1994 *J. Math. Phys.* **35** 4746
- [5] Radha R and Lakshmanan M 1995 *Phys. Lett. A* **197** 7
- [6] Radha R and Lakshmanan M 1997 *J. Math. Phys.* **38** 292
- [7] Radha R and Lakshmanan M 1997 *J. Phys. A* **38** 3229
Radha R and Lakshmanan M 1997 *Chaos, Solitons & Fractals* **8** 17
- [8] Lou S Y 1996 *J. Phys. A* **29** 5989
- [9] Ruan H Y and Lou S Y 1997 *J. Math. Phys.* **38** 3123
- [10] Lou S Y 1995 *J. Phys. A* **28** 7227
- [11] Lou S Y 1996 *Commun. Theor. Phys.* **26** 487
- [12] Radha R and Lakshmanan M 1999 *Chaos, Solitons & Fractals* **10** 1821
- [13] Zhang J F 2001 *Communication in Nonlinear Science & Numerical Simulation*, **6** 50
- [14] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
- [15] Lou S Y and Ruan H Y 2001 *J. Phys. A: Math Gen.* **34** 305
- [16] Ruan H Y and Chen X Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 586
- [17] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
- [18] Zhang J F 1999 *Acta Phys. Sin. (Over. Ed.)* **8** 326
- [19] Zhang J F 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1416 [in Chinese] 张解放 1999 *物理学报* **48** 1416]
Zhang J F 1999 *Chin. Phys. Lett.* **16** 659
- [20] Zhang J F 2000 *Commun. Theor. Phys.* **33** 577
- [21] Fang E G and Zhang H Q 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 1254 [in Chinese] 范恩贵、张鸿庆 1997 *物理学报* **46** 1254]
- [22] Lou S Y and Wu X B 1998 *Commun. Theor. Phys.* **29** 145
- [23] Ruan H Y and Chen Y X 1998 *Acta Phys. Sin. (Over. Ed.)* **7** 241

Localized coherent structures of the (2 + 1) dimensional Broer-Kaup equations *

Zhang Jie-Fang¹⁾ Han Ping²⁾

¹⁾ (Institute of Nonlinear Physics, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

²⁾ (Department of Physics, College of Zhejiang Ocean, Zhoushan 316004, China)

(Received 30 May 2001; revised manuscript received 28 August 2001)

Abstract

The linearization form of (2 + 1)-dimensional Broer-Kaup equations is established by using the improved homogeneous balance method. Starting from this linearization form of the equation, a variable-separation solution with the entrance of some arbitrary functions is obtained, and the very rich localized coherent structures are revealed. Some special types of the dromion solutions, breathers, instantons and ring soliton solutions are discussed by appropriately selecting arbitrary functions. The dromion solutions can be driven by some sets of straight-line and curved-line ghost solitons. These solutions may be located not only at the cross points of the lines, but also at closed points of the curves. The breather may breath both in amplitude and in shape.

Keywords: Broer-Kaup equation, (2 + 1) dimensions, coherent structure, homogeneous balance method

PACC: 0230, 0340

* Project supported by the "151 Talent Youth Engineering" Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. 1998).