

(2 + 1) 维非线性薛定谔方程的环孤子, dromion, 呼吸子和瞬子*

阮航宇^{1) 2)} 陈一新²⁾

¹⁾ (宁波大学物理系, 宁波 315211)

²⁾ (浙江大学近代物理中心, 杭州 310027)

(2000 年 9 月 5 日收到)

利用分离变量法, 研究了 (2 + 1) 维非线性薛定谔 (NLS) 方程的局域结构. 由于在 Bäcklund 变换和变量分离步骤中引入了作为种子解的任意函数, 得到了 NLS 方程丰富的局域结构. 合适地选择任意函数, 局域解可以是 dromion, 环孤子, 呼吸子和瞬子. dromion 解不仅可以存在于直线孤子的交叉点上, 也可以存在于曲线孤子的最近邻点上. 呼吸子在幅度和形状上都进行了呼吸.

关键词: 非线性薛定谔方程, 分离变量法, 孤子结构

PACC: 0230, 0340

1 引 言

(1 + 1) 维孤子和孤波解已被人们熟知, 并广泛应用于物理学的众多领域, 如凝聚态物理、流体力学、等离子体物理、纤维光学等^[1]. 在 (2 + 1) 维情况下, 许多有实际物理意义的可积模型也已在非线性物理中建立^[2-5]. 最近, 由于 Boiti 等人^[6]的开拓性工作 (2 + 1) 维模型中指数局域的 dromion 解引起了人们极大的关注. 一般而言, dromion 解由直线孤子形成, dromion 位于两条直线的交叉点上^[7, 8]. 文献 [9, 10] 中指出 dromion 也可以由曲线孤子形成. 从对称性研究中, 发现 (2 + 1) 维可积模型的对称结构远比 (1 + 1) 维可积模型丰富. 这就给了一个启示 (2 + 1) 维可积模型应该存在一些尚未发现的相干结构.

本文的兴趣是探索 (2 + 1) 维 NLS 方程

$$\begin{aligned} u_{xx} &= uQ_x - iu_t, \\ u_{xx}^* &= u^*Q_x + iu_t, \\ Q_y &= uu^* \end{aligned} \quad (1)$$

的孤子结构. (2 + 1) 维 NLS 方程是众所周知的 (1 + 1) 维 NLS 方程非各向同性 Lax 可积的推广. 该方程可以从 KP 方程的对称限制中获得^[11].

寻找非线性偏微分方程特殊解有许多可行的方法, 最重要的一些方法是反散射变换、双线性方法、对称约化、Bäcklund 变换和 Darboux 变换^[12-15]. 在线性物理中, 傅里叶变换和分离变量法是两个重要的方法. 反散射方法是傅里叶变换方法在非线性物理中的推广. 分离变量法在非线性的推广, 直到最近才在两个方向有所发展. 一个方向是形式变量分离法^[16], 在这种方法中独立变量并没有实现真正的分离. 第二个方向是本文所采用的独立变量实现真正分离的分离变量法^[17].

2 NLS 方程的变量分离步骤

为了利用分离变量法, 现在做下面的 Bäcklund 变换:

$$u = g/f + u_0, \quad Q = -\chi(\ln f)_x + Q_0, \quad (2)$$

式中 f 和 g 分别为实函数和复函数, $\{u_0, Q_0\}$ 为 NLS 方程的一个任意的已知解, 在 (2) 式的变换下, NLS 方程 (1) 成为双线性形式

$$(D_x^2 + iD_t + u_0 D_x^2)gf - Q_0 g f = 0, \quad (3)$$

$$D_x D_y f f + g g^* - u_0^* g f - u_0 f g^* = 0, \quad (4)$$

符号 D 为 Hirota 意义下的双线性算符^[12].

* 国家自然科学基金 (批准号: 19875041) 浙江省自然科学基金 (批准号: 100033) 教育部中青年骨干教师专项 (批准号: X0001) 资助的课题.

† 通讯地址.

为了进一步深入讨论,把种子解 $\{u_0, Q_0\}$ 选为如下形式:

$$u_0 = 0, \quad Q_{0x} = p_0(x, t), \quad (5)$$

式中 $p_0 \equiv p_0(x, t)$ 为变量 $\{x, t\}$ 的任意函数. 经过一些繁琐但直接的运算,发现 NLS 系统 (3) 和 (4) 式拥有分离变量解

$$\begin{aligned} f &= a_1 p(x, t) + a_2 q(y, t) + a_3 p(x, t)q(y, t), \\ g &= p_1 q_1 \exp(ir + is), \end{aligned} \quad (6)$$

$\{a_1, a_2, a_3\}$ 为任意常数, $\{p, p_1, r\}$ 为 $\{x, t\}$ 的函数, $\{q, q_1, s\}$ 为 $\{y, t\}$ 的函数. 将方程 (6) 代入 (3) 和 (4) 式,并令实部和虚部分别为零,得到

$$p_1 = \sqrt{\sqrt{2a_1 a_2} p_x}, \quad q_1 = \sqrt{\sqrt{2a_1 a_2} q_y}, \quad (7)$$

$$s_t = 0, \quad (8)$$

$$-2p_x p_{xxx} + p_{xx}^2 + 4p_x^2 r_x^2 + 4r_t p_x^2 + 4p_x^2 p_{0x} = 0, \quad (9)$$

$$p_t + 2p_x r_x = c_1(a_2 + a_3 p^2) + c_2(a_2 + a_3 p) + a_1 a_2 a_3 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} q_t &= -c_3(a_1 + a_3 q^2) - c_2(a_1 + a_3 q) \\ &\quad - a_1 a_2 c_1, \end{aligned} \quad (11)$$

(10) 和 (11) 式中的 $c_i \equiv c_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 为 t 的任意函数.

由于函数 p_0 的任意性, NLS 方程的局域解有着相当丰富的结构. 从 (8) 和 (10) 式,可以看出函数 r 可由 p 表示, s 为 y 的任意函数. 而任意函数 p_0 通过 (9) 式又和 p 联系在一起. 实际上在这个问题中可将 p 看作任意函数,由 (9) 式来固定 p_0 , 即

$$p_{0x} = (4p_x^2)^{-1} (2p_x p_{xxx} - p_{xx}^2 - 4p_x^2 r_x^2 - 4r_t p_x^2). \quad (12)$$

由于 c_1, c_2 和 c_3 为 t 的任意函数,可以较为方便地给出方程 (11) 的普遍解. 若取 c_1, c_2 和 c_3 为

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{a_1 a_2 a_3 A_1} [(a_1 + a_3 A_2)^2 A_{3t} \\ &\quad + (a_1 a_3 + a_3^2 A_2) A_{1t} - A_1 A_3^2 A_{2t}], \end{aligned} \quad (13)$$

$$c_2 = -\frac{1}{a_3^2 A_1} [A(a_1 + a_3 A_2) A_{3t} + a_3 A_{1t}], \quad (14)$$

$$c_3 = \frac{A_{3t}}{a_3^2 A_1}, \quad (15)$$

式中 $A_1 \equiv A_1(t), A_2 \equiv A_2(t)$ 和 $A_3 \equiv A_3(t)$ 为 t 的任意函数,那么 (11) 式成为

$$q_t = \frac{-1}{A_1} [A_{3t} q^2 - (A_{1t} + 2A_2 A_{3t}) q$$

$$- A_1 A_{2t} + A_2 A_{1t} + A_3^2 A_{3t}]. \quad (16)$$

可以直接验证 (16) 式的普遍解具有以下形式:

$$q = \frac{A_1}{A_3 + F_2(y)} + A_2, \quad (17)$$

式中 $F_2 \equiv F_2(y)$ 为 y 的任意函数.

最后,将拥有 (7) 式的 (6) 式代入 (2) 式,可以得到 NLS 方程场量 u 模的具体形式

$$U = |u|^2 = \frac{2a_1 a_2 p_x q_y}{(a_1 p + a_2 q + a_3 p q)^2}, \quad (18)$$

$$= \frac{Q_y P_x}{(A_1 \cosh(P + Q) + A_2 \cosh(P - Q))^2} \quad (19)$$

式中 A_1 和 A_2 为任意常数. 在合适地选择常数 C_1, C_2, C_3 和 C_4 后, P 和 Q 与 p 和 q 的关系可以表示为 $p = C_1 + C_2 \exp(P), q = C_3 + C_4 \exp(Q)$. 考虑到 $p(x, t), A_1(t), A_2(t)$ 和 $F_2(y)$ 的任意性, P 仍为 $\{x, t\}$ 的任意函数, $Q = Q_1(y) + Q_2(t), Q_1(y)$ 和 $Q_2(t)$ 分别为 y 和 t 的函数.

3 一些特殊类型的局域解

函数 $p(x, t), F_2(y)$ 和 $A_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 的任意性,使 (18) 式拥有相当丰富的孤子结构. 事实上从 (18) 式很容易看出对于任意的 p 和 q ,只要满足边界条件 $p|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow B_1, p|_{x \rightarrow +\infty} \rightarrow B_2, q|_{y \rightarrow -\infty} \rightarrow B_3, q|_{y \rightarrow +\infty} \rightarrow B_4, B_1, B_2, B_3$ 和 B_4 可以是无限大的任意常数, $|u|^2$ 是一个所有方向都指数局域的相干结构. 下面是几个有趣的特殊例子.

3.1 多个直线隐形孤子形成的无色散关系的多 dromion 解

一般而言,多 dromion 解是由具有某种色散关系的多直线孤子所构成,并且 dromion 局域在直线的交叉点上. 若取 p 和 q 为下述形式:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{i=1}^N \exp(k_i x + \omega_i t + x_{0i}) + 1 \\ &\equiv \sum_{i=1}^N \exp(\xi_i) + 1, \end{aligned} \quad (20)$$

$$q = \sum_{i=1}^N \exp(K_i y + y_{0i}) \sum_{j=1}^N \exp(\Omega_j t), \quad (21)$$

式中 $x_{0i}, y_{0i}, k_i, \omega_i, K_i$ 和 Ω_i 为任意常数, M, N 和 J 为任意正整数,这样就得到了第一种特殊类型的多 dromion 解. (21) 式的选择与任意函数

$$A_3(t) = 0, F_2^{-1} = \sum_{i=1}^M \exp(K_i y + y_{0i}),$$

$$A_1 = \sum_{i=1}^J \exp(\Omega_i t), A_2 = 0 \quad (22)$$

的选取相对应. 式中 k_i, ω_i, K_i 和 Ω_i 之间无任何色散关系.

3.2 曲线隐形孤子形成的多 dromion 解

最近,我们发现某些(2+1)维模型存在的 dromion 解不仅可由直线隐形孤子构成,也可由曲线隐形孤子形成. 从(19)式可看到 NLS 方程的 dromion 解,也是既可由直线孤子又可由曲线孤子形成. 形成 dromion 的一组直线孤子由因子

$$Q_y = \sum_{i=1}^N Q_i(y - y_{i0}) \quad (23)$$

确定,其中 $Q_i = Q_i(y - y_{i0})$ 为在直线 $y = y_{i0}$ 上有限,离开直线迅速衰减的直线孤子. 另一组直线孤子由因子 P_x 确定. 实际上,任意(1+1)维可积模型的多 dromion 解均可选为 P_x . 当然,也可选 P_x 与(23)式相似的形式. 曲线孤子可由因子

$$P + Q = \text{mir}(P + Q),$$

$$P - Q = \text{mir}(P - Q) \quad (24)$$

确定.(24)式的分枝数确定了曲线孤子的数量.

图1为两个隐形曲线孤子在 Q 取 $y^2 - 4 + \chi(1.44)^2$, P 取 $x^3 - 2 + (1.44)^2$ 时形成的 dromion ($A_1 = 1, A_2 = 2$). 相应的曲线

$$x^3 + y^2 - 6 + \chi(1.44)^2 = 0,$$

$$x^3 - y^2 - 4 + \chi(1.44)^2 = 0, \quad (25)$$

如图1(b)所示. 从图1(b)可清楚地看到两条曲线没有交叉点,但有最近点. 该现象揭示了形成 dromion 的新机制. dromion 不仅可在直线或曲线孤子的交叉点上形成,也可在曲线隐形孤子的最近邻点上存在.

3.3 具有振荡形尾部的 dromion 解

如果某些空间变量的周期函数包含在函数 p 和 q 内,可以获得某些方向具有振荡形尾部的 dromion 解. 取

$$p = \exp(x(\cos x + 4/3)) + 1, q = \exp(y), \quad (26)$$

得到了在 x 方向振荡的 dromion 解.

图2为一幅由(26)式所确定的振荡形 dromion 结构. 图中 $a_1 = a_2/2 = a_3 = 1$.

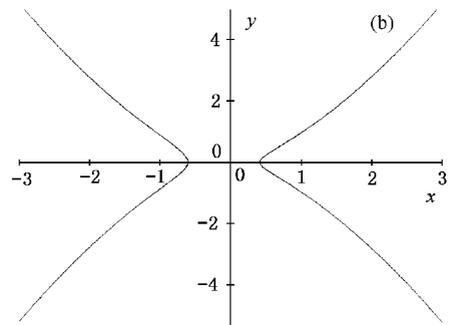
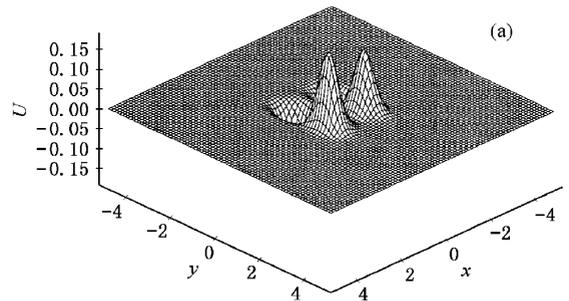


图1 两个曲线隐形孤子 $x^3 + y^2 - 6 + \chi(1.44)^2 = 0$ 和 $x^3 - y^2 + 2 - (1.44)^2 = 0$ 形成的 dromion 解 相应的曲线为 $P = x^3 - 2 + (1.44)^2, Q = y^2 - 4 + \chi(1.44)^2 = 0, A_1 = 1, A_2 = 2$

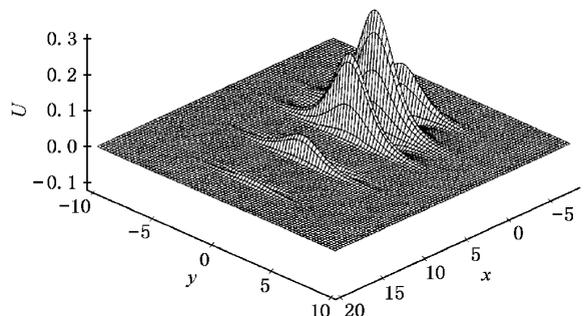


图2 由(26)式所确定的振荡形 dromion 解($a_1 = a_2/2 = a_3 = 1$)

3.4 环孤子解

在高维情况下,除了点局域形的相干激发,可能存在某些其他类型的有意义的局域激发. 例如对于 2DsG 系数,存在环形(碟形、盆形、碗形)孤子解. 这些孤子解在闭合曲线的内部不为零,闭合曲线的外部指数衰减. 对于 NLS 方程,也可以找到一些特殊类型的环孤子解. 若在(19)式中取

$$P = \frac{1}{2}x^2 - 3, Q = y^2 - 6, \quad (27)$$

那么(24)式的第一个方程为椭圆形, 环方程为 $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 9 = 0$.

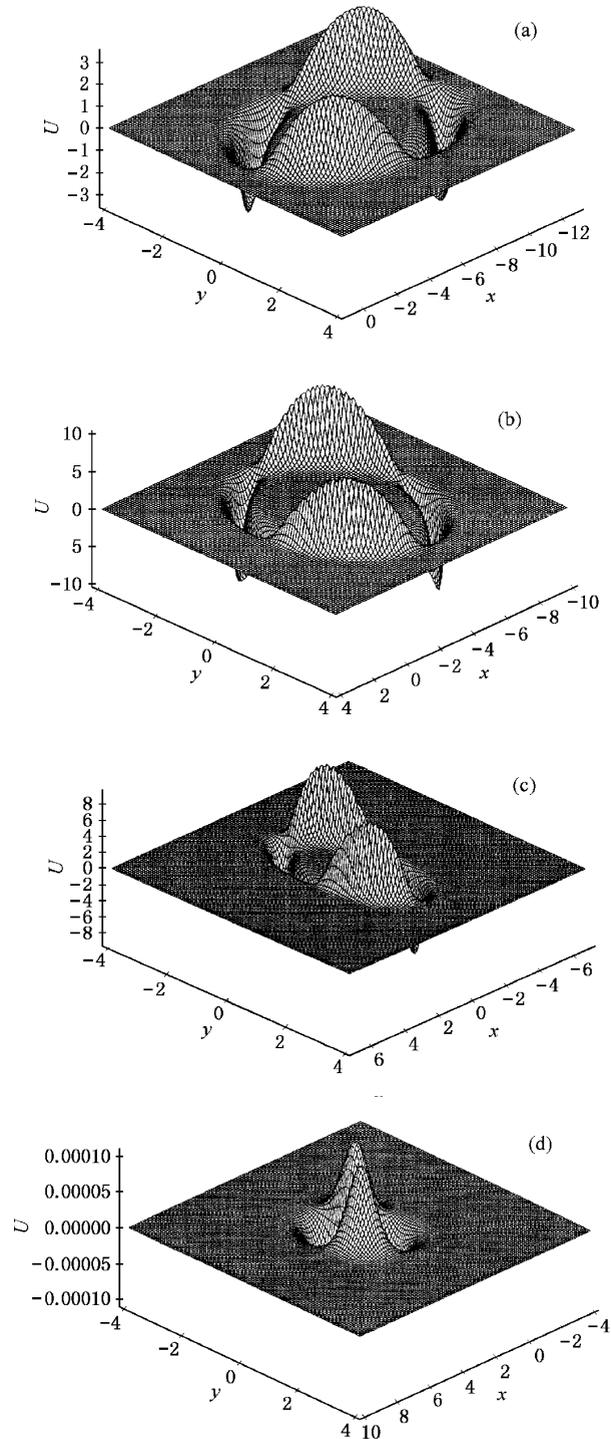


图3 环形运动呼吸子, 其中(19)式 U 中的 P 和 Q 由(28)式表示 ($A_1=1, A_2=0$) 时间为 (a) $t = -\pi$ (b) $t = -\pi/2$ (c) $t = 0$ 和 (d) $t = \pi/2$

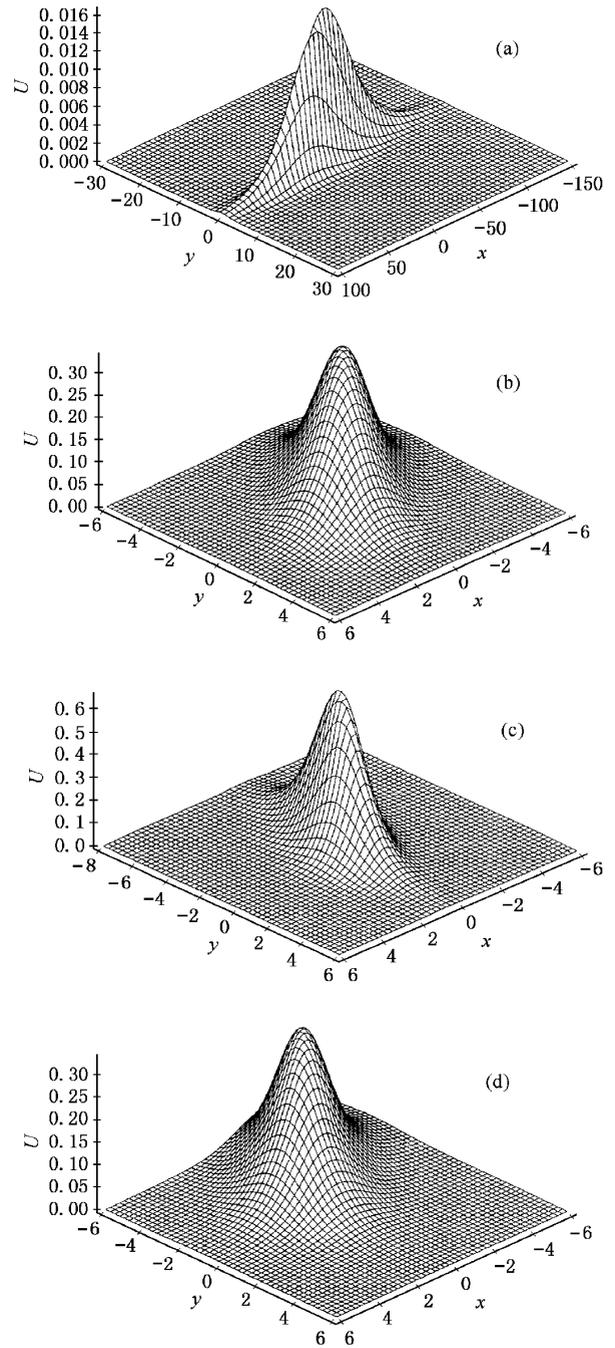


图4 单 dromion 形的呼吸子, 其中(18)式 U 中的 p 和 q 由(29)式表示 ($a_1=a_3=10, a_2=20$) 时间为 (a) $t = -\pi$ (b) $t = -\pi/2$ (c) $t = 0$ 和 (d) $t = \pi/2$

3.5 静止和运动呼吸子

若上面给出的局域解中含有时间 t 的周期函数, 那么所有的这些解成为相应的呼吸子. 例如与(27)式相应的 P 和 Q 取下述形式:

$$P = \frac{1}{2} \exp[(\cos t)(x - v_1 t)^2 - 3],$$

$$Q = 5 \exp(\sin t) + y^2 - 6, \quad (28)$$

静态的环孤子成为运动的呼吸环孤子 ($v_1 = 0$, 则为静态的呼吸环孤子)。

图 3 示出由 (28) 式所确定的 NLS 方程解 (19) 式的运动呼吸子的图形 ($A_1 = 1, A_2 = 0$)。图 3 (a) — (d) 的时间分别为 $t = -\pi, -\pi/2, 0$ 和 $\pi/2$ 。从图 3 清楚地看到, 这种类型的呼吸子在幅度和形状上都进行了呼吸。

图 4 为 (18) 式在 p 和 q 取

$$p = \frac{1}{10} + \exp(x(\cos t) + 20/19),$$

$$q = \exp(y) \exp(\sin t), \quad (29)$$

$a_1 = a_3 = 10, a_2 = 20$ 时的另一类型的呼吸子现象。图 4 时间 t 为 $-\pi, -\pi/2, 0$ 和 $\pi/2$ 。从图 4 可看到呼吸子的尺寸变化很大。在 $t = -\pi$ 时, 呼吸子在 x 方向具有很大的尺寸, 在 $t = 0$ 时, 呼吸子在 x 方向具有最小的范围。

3.6 瞬子

如果在解 (18) 式的函数 p 和 q 中含有随时间增长而衰减的因子, 比如说用 $\text{sech}(t)$ 去乘 p 或 q , 那么前面所讨论的所有局域结构都成为瞬子解。

图 5 为另一种类型的瞬子解, 解由 (19) 式表示, 其中

$$P = x^3 + t^2 - 2, Q = y^2 + 2t^2 - 4,$$

$$A_1 = 1/20, A_2 = 1/2. \quad (30)$$

图 5 (a) — (e) 的时间分别为 $t = 0, \pm\sqrt{2} \equiv t_0, \pm 1.75, \pm 2, \pm 2.5$ 。图 5 清晰地显示了 dromion(s) 幅度随时间 $|t|$ 增加而衰减的现象。图中 dromion 由局域在两条曲线

$$x^3 + y^2 + 3t^2 - 6 = 0, \quad (31)$$

$$x^3 - y^2 - t^2 + 2 = 0 \quad (32)$$

上的孤子构成。当 $|t| < t_0$, 曲线 (31) 和 (32) 式有两个交点, 相应的 dromion 解 (19) 式为双 dromion 解。图 5 (a) 为 $|t| = 0 < t_0$ 的情况。当 $|t| = t_0$, 两个相交点 (或两个 dromion) 合并为一个。当 $|t| > t_0$, 曲线 (31) 和 (32) 式无交点, 此时在曲线的最近邻点上形成了一个 dromion。随着 $|t|$ 继续增加, 曲线间的距离增加, 由曲线近邻点形成的 dromion 的幅度迅速衰减。图 5 清晰地显示了该现象, $|t|$ 从零增加到 2.5, dromion 的幅度从约 60 降至约 10^{-6} 。

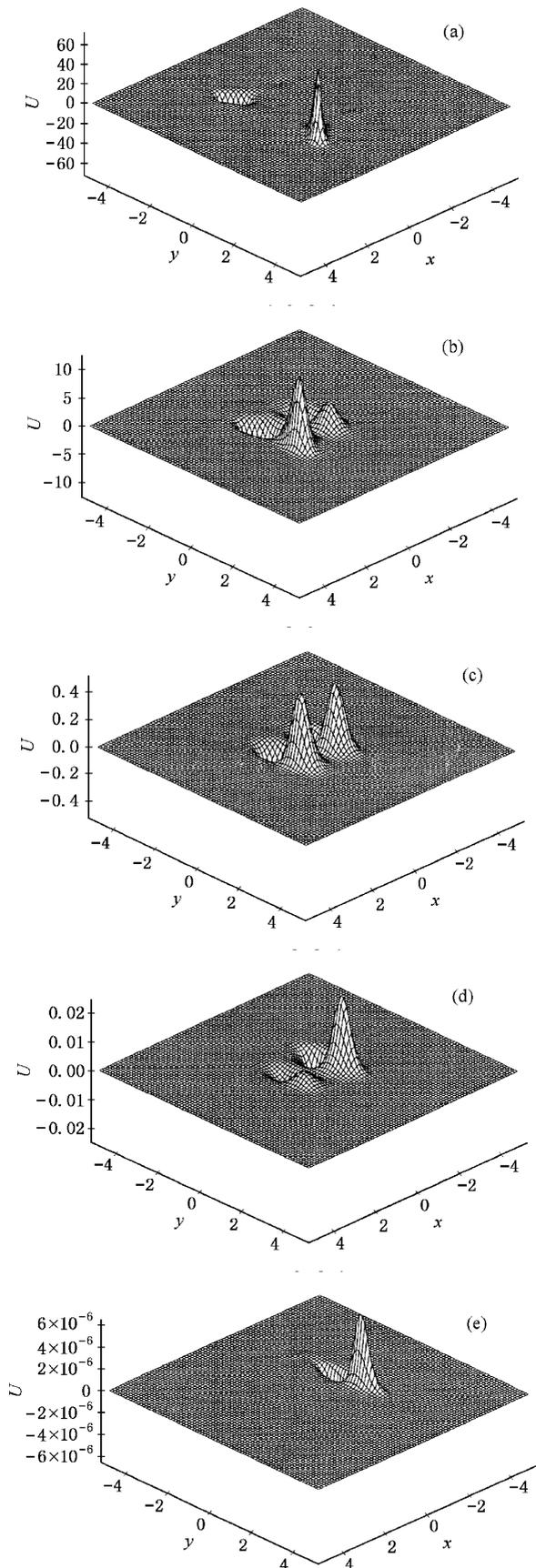


图 5 由 (30) 式所确定的瞬子解 (19) 式在时间 (a) $t = 0$ (b) $t = \pm\sqrt{2}$ (c) $t = \pm 1.75$ (d) $t = \pm 2$ 和 (e) $t = \pm 2.5$ 的演化图

4 结 论

将分离变量法应用于 NLS 方程, 可以获得许多新的多孤子类型. 由于种子解含有任意函数, 合适地选择任意函数, NLS 方程的局域解可以是 dromions, 环孤子、呼吸子和瞬子等.

Dromion 可以由直线孤子, 也可以由曲线孤子形成. Dromion 不仅局域在直线或曲线的交点上, 也可以存在于曲线的近邻点上. (2+1) 维模型中的呼吸子在幅度和形状上都可以进行呼吸. 在 (2+1) 维模型中, 瞬子具有相当丰富的结构, 如 dromion, 环孤子, 呼吸子等. 高维情况下, 由任意函数引起的丰

富的孤子结构可能是一种普遍现象. 如方程 (18) 及涉及到的所有图像和讨论均适合于 DS 方程的 $|u|^{2[18]}$. 在文献 [19] 中, 作者也已指出 2DsG 方程拥有十分丰富的 (盆形、碟形、碗形) 孤子结构. 因此我们认为高维可积模型, 甚至某些不可积模型都应存在相当丰富的孤子结构 [19].

分离变量法在线性物理中是十分重要的方法. 在非线性物理中, 我们也将推广的分离变量法应用于 NLS 方程和反对称的 NNV 方程. 这种方法是否适合于其他的 (2+1) 维可积模型值得进一步探讨.

感谢楼森岳教授的帮助和讨论.

该工作得到宁波市博士基金 (批准号 0011016) 资助.

- [1] I. Loutsenko, D. Roubtsov, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 3011; M. Tajiri, H. Maesono, *Phys. Rev.*, **E55**(1997), 3351; G. C. Das, *Phys. Plasmas*, **4**(1997), 2095; M. Gedalin, T. C. Scott, Y. B. Band, *Phys. Rev. Lett.*, **78**(1997), 448; S. Y. Lou, *Commun. Theor. Phys.*, **33**(2000), 7.
- [2] B. B. Kadomtsov, V. I. Petviashvili, *Sov. Phys. Dokl.*, **15**(1970), 539.
- [3] A. Davey, K. Stewartson, *Proc. Roy. Soc. London*, **A338**(1974), 17.
- [4] S. Y. Lou, *Commun. Theor. Phys.*, **27**(1997), 249.
- [5] L. P. Nizhnik, *Sov. Phys. Dokl.*, **25**(1980), 706; A. P. Veselov, S. P. Novikov, *Sov. Math. Dokl.*, **30**(1984), 588; S. P. Novikov, A. P. Veselov, *Physica*, **D18**(1986), 267.
- [6] M. Boiti, J. J. P. Leon, M. Manna, F. Pempinelli, *Phys. Lett.*, **132A**(1988), 432.
- [7] A. S. Fokas, P. M. Santini, *Physica*, **D44**(1990), 99.
- [8] R. Radha, M. Lakshmanan, *J. Math. Phys.*, **35**(1994), 4746.
- [9] J. Hietarinta, *Phys. Lett.*, **149A**(1990), 133.
- [10] S. Y. Lou, *L. Phys. A: Math. Gen.*, **28**(1995), 7227; **26**(1993), 4387; **27**(1994), 3235, L207; *J. Math. Phys.*, **35**(1994), 1755.
- [11] S. Y. Lou, *Commun. Theor. Phys.*, **27**(1997), 249.
- [12] C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1095; R. Hirota, *Phys. Rev. Lett.*, **27**(1971), 1192.
- [13] P. J. Olver, *Application of Lie Group to Differential Equation* (Springer New York, 1986).
- [14] P. A. Clarkson, M. D. Kruskal, *J. Math. Phys.*, **30**(1989), 2201; S. Y. Lou, *Phys. Lett.*, **A151**(1990), 133.
- [15] V. B. Matveev, M. A. Salle, *Darboux Transformations and Soliton* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991).
- [16] S. Y. Lou, L. L. Chen, *J. Math. Phys.*, **40**(1999), 6491.
- [17] S. Y. Lou, J. Z. Lu, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **29**(1996), A209; H. Y. Ruan, Y. X. Chen, *Acta Phys. Sin. (Overseas Edition)*, **8**(1999), 241.
- [18] S. Y. Lou, *J. Math. Phys.*, **41**(2000), 6509.
- [19] S. Y. Lou, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**(1999), A521.

RING SOLITONS , DROMIONS , BREATHERS AND INSTANTONS OF THE NLS EQUATION^{*}

RUAN HANG-YU^{a,b)} CHEN YI-XIN^{b)}

^{a)}*(Department of Physics , Ningbo University , Ningbo 315211 , China)*

^{b)}*(Center of Modern Physics , Zhejiang University , Hangzhou 310027 , China)*

(Received 5 September 2000)

ABSTRACT

We Study the abundant localized coherent structures of the $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger (NLS) equation which was derived from the fluid dynamics and plasma physics. Using a Bäcklund transformation and the variable separation approach , we find there exist much more abundant localized structures for the $(2 + 1)$ -dimensional NLS equation. The abundance of the localized structures of the model is introduced by the entrance of an arbitrary function of the seed solution. Some special types of the dromion solutions , breathers , instantons and ring type of solitons are discussed by selecting the arbitrary functions appropriately. The dromion solutions can be driven by some sets of straight-line and curved line ghost solitons. The dromion solutions may be located not only at the cross points of the lines , but also at the closed points of the curves. The breathers may breath both in amplitudes and in shapes.

Keywords : nonlinear Schrödinger equation , variable separation approach , soliton structures

PACC : 0230 , 0340

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation (Grant No. 19875041) , by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province , China (Grant No. 100033) , and by the Foundation for University Key Teachers by the Ministry of Education , China (Grant No. C0001) .