第 51 卷 第 4 期 2002 年 4 月
1000-3290/2002/51(04)/0723-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.51, No.4, April, 2002

三维各向同性谐振子的径向基本算符

查新未

(西安邮电学院基础部,西安 710061)

(2000 年 8 月 31 日收到;2001 年 9 月 20 日收到修改稿)

采用新的方法,推导出三维各向同性谐振子径向基本算符$\frac{\partial}{\partial r}$,$r$,$\frac{1}{r}$对本征函数的作用结果,由此得出其升降算符及其他新的公式,并证明文献[1]中的结论有误.

关键词:基本算符,升降算符,三维谐振子
PACC:0365

1. 引 言

近年来,关于各向同性谐振子问题的讨论文章有许多[1-8],笔者认为有两个主要原因:一是各向同性谐振子是量子力学中可精确求解的问题之一;二是各向同性谐振子中的基本问题尚未解决.本文将由算符对本征函数的作用出发,导出基本算符$\frac{\partial}{\partial r}$,$r$,$\frac{1}{r}$对径向函数的作用结果,并由此得出了一些新的递推公式,从而为理论上解决三维各向同性谐振子的所有问题打下基础.

2. 三维各向同性谐振子的径向基本算符

三维各向同性谐振子的径向方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E-\frac{1}{2}\mu\omega^2r^2\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0. \tag{1}$$

令

$$\alpha=\left(\frac{\mu w}{\hbar}\right)^{1/2},$$

则其解为[5]

$$R_{nl}=N_{nl}(\alpha r)^l\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2}\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\alpha^2r^2\right)$$
$$=\alpha^{\frac{3}{2}}\left[\frac{2^{l+2-n}(2l+2n+1)!!}{\sqrt{\pi}n![2l+1]!!^2}\right]^{1/2}(\alpha r)^l\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha^2r^2}\times\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\alpha^2r^2\right). \tag{2a}$$

令

$$\rho=\alpha r,$$

则

$$R_{nl}(\rho)=N_{nl}(\rho)^l\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{2}{3},\rho^2\right), \tag{2b}$$

$\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\rho^2\right)$为合流超几何函数.

下面我们求基本算符$\frac{\partial}{\partial r}$,$r$,$\frac{1}{r}$对$R_{nl}$的作用,为方便起见,求$\frac{\partial}{\partial\rho}$,$\rho$,$\frac{1}{\rho}$对$R_{nl}(\rho)$的作用.

2.1. ρ 算符的作用

由(2b)式得到

$$\rho R_{nl}(\rho)=N_{nl}(\rho)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho^{l+1}\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\rho^2\right),$$

由递推关系

$$(\gamma-1)\mathrm{F}(\alpha,\gamma-1,z)=\alpha\mathrm{F}(\alpha+1,\gamma,z)+(\gamma-\alpha-1)\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z), \tag{3a}$$

代入上式得到

$$\rho R_{nl}(\rho)=\sqrt{n+l+\frac{3}{2}}R_{n,l+1}-\sqrt{n}R_{n-1,l+1}. \tag{4a}$$

同理,由递推关系

$$\gamma\mathrm{F}(\alpha,\gamma,Z)-Z\mathrm{F}(\alpha,\gamma+1,z)-\gamma\mathrm{F}(\alpha-1,\gamma,z)=0, \tag{3b}$$

可得到

$$\rho R_{nl}=\sqrt{n+l+\frac{1}{2}}R_{n,l-1}-\sqrt{n+1}R_{n+1,l-1}.\tag{4b}$$

2.2. $\frac{1}{\rho}$算符的作用

由(2b)式得到

$$\frac{1}{\rho}R_{nl}(\rho)=N_{nl}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho^l\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\rho^2\right),$$

利用(3a)式得到

$$\frac{1}{\rho}R_{nl}=\frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left[\sqrt{n+l+\frac{1}{2}}R_{n,l-1}+\sqrt{n}R_{n-1,l+1}\right],\tag{5a}$$

同理,利用(3b)式得到

$$\frac{1}{\rho}R_{nl}=\frac{1}{\left(l+\frac{1}{2}\right)}\left[\sqrt{n+l+\frac{3}{2}}R_{n,l+1}+\sqrt{n+1}R_{n+1,l-1}\right],\tag{5b}$$

2.3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}$算符的作用

利用

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{F}(\alpha,\gamma,z)=\frac{\alpha}{\gamma}\mathrm{F}(\alpha+1,\gamma+1,z),\tag{3c}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}R_{nl}(\rho)&=\frac{1}{\rho}R_{nl}-\rho R_{nl}\\&\quad+N_{nl}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\rho^2}p^l\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{F}\left(-n,l+\frac{3}{2},\rho^2\right)\\&=\frac{l}{\rho}R_{nl}-\rho R_{nl}-2\sqrt{n}R_{n-1,l+1}.\end{aligned}\tag{6}$$

3. 三维各向同性谐振子的升降算符

作为径向基本算符的应用之一,我们下面来推导三维各向同性谐振子的升降算符.

由(6)式得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\rho-\frac{l}{\rho}\right)R_{nl}=-2\sqrt{n}R_{n-1,l+1}.$$

若令

$$B_-(l)=\left(\rho+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{l}{p}\rho\right),$$

则

$$B_-(l)R_{nl}=-2\sqrt{n}R_{n-1,l+1}.\tag{7a}$$

同理,令

$$B_+(l)=\left(\rho-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{l+1}{\rho}\right),$$

则

$$\begin{aligned}B_+(l)R_{nl}&=\left(\rho-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{l+1}{\rho}\right)R_{nl}\\&=2\rho R_{nl}-\frac{2l+1}{\rho}R_{nl}+2\sqrt{n}R_{n-1,l+1}.\end{aligned}$$

利用(4),(5)式得到

$$\text{上式}=-2\sqrt{n+1}R_{n+1,l-1}.$$

所以

$$R_+(l)R_{nl}=-2\sqrt{n+1}R_{n+1,l-1}.\tag{7b}$$

类似地令

$$A_+(l)=\left(\rho-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{l}{\rho}\right),$$

则

$$A_+(l)R_{nl}=2\sqrt{n+l+\frac{3}{2}}R_{n,l+1}.\tag{7c}$$

令

$$A_-(l)=\left(\rho+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{l+1}{\rho}\right),$$

则

$$A_-(l)R_{nl}=2\sqrt{n+l+\frac{1}{2}}R_{n,l-1}.\tag{7d}$$

由于

$$N=2n+l,$$

所以(7a)—(7d)式也可写成

$$B_-(l)R_{Nl}=-\sqrt{2(N-l)}R_{N-1,l+1},\tag{8a}$$

$$B_+(l)R_{Nl}=-\sqrt{2(N-l+2)}R_{N+1,l-1},\tag{8b}$$

$$A_+(l)R_{Nl}=\sqrt{2(N+l+3)}R_{N+1,l+1},\tag{8c}$$

$$A_-(l)R_{Nl}=\sqrt{2(N+l+1)}R_{N-1,l-1}.\tag{8d}$$

此结果与文献[1]中结果基本相同,可看出文献[1]中的 b_l^+,b_l^- 差一负号.

显然,令

$$\begin{aligned}C_+(l)&=B_+(n+1,l+1)A_+(n,l)\\&=\left(\rho-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}-\frac{l+2}{\rho}\right)\left(\rho-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}+\frac{l}{\rho}\right),\end{aligned}\tag{9a}$$

则

$$\begin{aligned}C_+(l)R_{NL}&=B_+(N+1,L+1)A_+(N,L)R_{NL}\\&=B_+(N+1,l+1)\sqrt{2(N+l+3)}R_{N+1,L+1}\\&=-\sqrt{2(N-l+2)}\sqrt{2(N+l+3)}R_{N+2,L}\\&=-2\sqrt{(N-l+2)(N+l+3)}R_{N+2,L}.\end{aligned}\tag{10a}$$

类似,令

$$C_-(l)=B_-(N-1,L-1)A_-(N,L),\tag{9b}$$

则

$$C_-(l)R_{nl} = -2\sqrt{(N-l)(N+l+1)}R_{N-2,l}. \tag{10b}$$

令

$$D_+(l) = B_-(N+1,l+1)A_+(N,l), \tag{9c}$$

则

$$D_+(l)R_{n,l} = -2\sqrt{(N-l)(N+l+3)}R_{N,L+2}. \tag{10c}$$

令

$$D_-(l) = B_+(N-1,l-1)A_-(N,l), \tag{9d}$$

则

$$D_-(l)R_{Nl} = -2\sqrt{(N+l+1)(N-l+2)}R_{N,L-2}. \tag{10d}$$

同样(10a),(10b)式与文献[1]结果差一负号.

4. 应　　用

作为径向基本算符的另一个应用,我们来计算 $\langle nL|\rho^2|nl\rangle$,$\langle nL|\rho^4|nl\rangle$,由(4a),(4b)式知

$$\rho R_{nl} = \sqrt{n+l+\frac{3}{2}}R_{n,l+1} - \sqrt{n}R_{n-1,l+1},$$

$$\rho R_{nl} = \sqrt{n+l+\frac{1}{2}}R_{n,l-1} - \sqrt{n+1}R_{n+1,l-1},$$

所以

$$\rho|nl\rangle = \sqrt{n+l+\frac{3}{2}}|n,l+1\rangle - \sqrt{n}|n-1,l+1\rangle,$$

因此

$$\langle nl|\rho^2|nl\rangle = \left(n+l+\frac{3}{2}\right)+n = \left(2n+l+\frac{3}{2}\right). \tag{11}$$

另外,由(4a),(4b)式可推出

$$\rho^2 R_{nl} = \left(2n+l+\frac{3}{2}\right)R_{nl} - \sqrt{n\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}R_{n-1,l} - \sqrt{(n+1)\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}R_{n+1,l}, \tag{12a}$$

$$\rho^2|nl\rangle = \left(2n+l+\frac{3}{2}\right)|nl\rangle - \sqrt{n\left(n+l+\frac{1}{2}\right)}|n-1,l\rangle - \sqrt{(n+1)\left(n+l+\frac{3}{2}\right)}|n+1,l\rangle, \tag{12b}$$

$$\langle nl|\rho^4|nl\rangle = \left(2n+l+\frac{3}{2}\right)^2 + n\left(n+l+\frac{1}{2}\right) + (n+1)\left(n+l+\frac{3}{2}\right). \tag{13}$$

同理,可求其他力学量算符的平均值.

[1] Li G H 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2289(in Chinese)[李光惠 1997 物理学报 **46** 2289]

[2] Chen C Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 607(in Chinese)[陈昌远 2000 物理学报 **49** 607]

[3] Liu Y F and Zeng J Y 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 417(in Chinese)[刘宇峰、曾谨言 1997 物理学报 **46** 417]

[4] Zha X W and Wang T Z 1992 *J. Shaanxi Normal University* **20** 27(in Chinese)[查新未、王天真 1992 陕西师大学报 **20** 27]

[5] Zeng J Y 1981 *Quantum Mechanics* (Beijing :Science Press) (in Chinese)[曾谨言 1981 量子力学(北京 :科学出版社)]

[6] Hou C F, Sun X D, Zhou Z X and Li Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 385(in Chinese)[候春风、孙秀冬、周忠祥、李　焱 1999 物理学报 **48** 385]

[7] Hou C F, Jiang Y Y, Sun X D and Sun W J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1587(in Chinese)[候春风、姜永远、孙秀冬、孙万钧 1999 物理学报 **48** 1587]

[8] Ni Z X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 8(in Chinese)[倪致祥 1999 物理学报 **48** 8]

Radial basic operators of three-dimensional isotropic harmonic oscillator

Zha Xin-Wei

(*Department of Basic Courses, Xi'an Institute of Posts and Telecommunication, Xi'an 710061, China*)

(Received 31 August 2000; revised manuscript received 20 September 2001)

Abstract

By using a new method, the results of operator $\frac{\partial}{\partial r}$, r, $\frac{1}{r}$ for the eiginfuction of a three-dimensional isotropic harmonic oscillator are derived, and some new formulas are given, and the mistake of the paper published in 1997 *Acta Phys. Sin.* **46** 2289 (in Chinese) is found.

Keywords: basic operator, ladder operator, harmonic oscillator

PACC: 0365