

# 研究多中心奇异吸引子混沌相位的新方法\*

陈永红<sup>1)</sup> 周 桐<sup>1)</sup> 何岱海<sup>2)</sup> 徐健学<sup>1)</sup> 苏文田<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> 西安交通大学非线性动力学研究所,西安 710049)

<sup>2)</sup> 北京师范大学物理系,北京 100875)

<sup>3)</sup> 河南南阳油田工程院,南阳 473132)

(2000 年 10 月 8 日收到,2001 年 9 月 21 日收到修改稿)

对一般混沌轨迹的相位定义进行了研究,考虑到大量的混沌运动投影到相平面后不是只有一个转动中心的正规转动,给出了两种计算瞬时相位的简单方法.一种方法称之为直接分解方法,它是基于分解的思想.另一种是切线方法,它需要计算轨迹在切空间中的角度.通过对一些算例结果的比较,可以看出这两种方法的优越性.综合而言,切线方法是对任意混沌振动适用的,因此可以被广泛应用于混沌相位同步的研究中.

关键词:混沌同步,相位同步,正规转动

PACC: 0545

## 1. 引 言

近年来关于混沌同步的发现使人们对混沌有了更加深入的认识,并使混沌有着更加巨大的应用前景,不仅在保密通讯中应用潜力巨大,而且在医学、生态学中也有着诱人的应用前景.特别是 1996 年 Rosenblum 等<sup>[1]</sup>基于周期振子的同步特征提出的混沌的相位同步(phase synchronization 缩写为 PS),近年来在医学中特别引起关注.所谓混沌的相位同步指两系统的相位差恒定,而振幅保持混沌样振荡.多年来神经学科的一个主要工作集中在同步的寻找,以前同步的分析方法限于交叉相关分析(cross-correlation)这实际上是一种线性分析方法,而混沌相位同步方法可以提供揭示内在非线性同步关系的手段,并且混沌相位同步在人类的心肺系统和帕金森病的研究中有重要的发现<sup>[2-4]</sup>,因此关于混沌相位同步的研究有重要的理论和应用意义.但是欲讨论混沌的相位同步,首先必须合理计算出混沌的瞬时相位.

首先需要说明的是,这里所讨论的混沌可以是由微分方程所产生的混沌轨道,也可以是从某实际系统采集到的混沌信号.对于混沌轨道,可在任意一个投影平面上讨论相位;对于混沌信号可以采用解

析信号的概念将其变换为一个复平面上的轨道<sup>[1]</sup>,从而定义相位.因此本文涉及混沌的转动如不特别说明,既指相平面上的轨道,也指复平面上的轨道.

平面上围绕某个中心的转动,某点的相位即为该点相对于转动中心的转动角,因此目前在混沌相位同步的研究中所讨论的混沌都限于正规转动,即轨道是绕某个转动中心的缠绕.对于更多的绕多个转动中心缠绕的混沌,一般也是想办法找到一个轨道为正规转动的投影平面<sup>[5,6]</sup>,再在这样的平面上用常规方法讨论.这样避开主要矛盾,限制混沌的拓扑结构来讨论混沌的相位同步显然太局限.对于这样一大类一般的混沌如何定义其瞬时相位,有着更大的研究价值.1997 年 Yalcinkaya 和 Lai<sup>[7]</sup>已经意识到这个问题的重要性,采用 Huang 的经验模式分解方法(the empirical-mode-decomposition method)将任意一个非正规转动的混沌信号分解为多个正规转动的组合,然后对每一个正规转动分别计算瞬时相位.这种分解方法解决了一般混沌信号瞬时相位难以刻画的问题,但是这种分解方式只适用于混沌信号而不能直接用于混沌轨道,并且也只是将研究一般混沌信号的瞬时相位问题转化为了多个正规转动的瞬时相位来研究,得到的某瞬时混沌信号的相位不是单值的,因而很难对两个系统的相位作同步比较.本文将给出另外两种计算一般混沌的瞬时相位的方法,

\* 国家自然科学基金(批准号:19702015 和 19972051)资助的课题.

并对计算结果作以比较.

## 2. 对正规转动的混沌, 瞬时相位的计算方法<sup>[1]</sup>

### 2.1. 相平面方法

对于在相平面(  $x-y$  )中表现为绕某个转动中心( 不失一般性地设为原点 )缠绕的正规转动的混沌轨道, 其瞬时相位可直接用下式得到:

$$\alpha(t) = \arctan \frac{y(t)}{x(t)}, \quad (1)$$

$$\phi(t) = \alpha(t) + 2\pi n(t), \quad (2)$$

式中反正切函数采用四个象限内的( 以后的计算均如此 ), 整数  $n(t)$  可由下式确定:

$$n(t) = \begin{cases} n(t-1) + 1 & \alpha(t) < \alpha(t-1); \\ n(t-1) & \alpha(t) \geq \alpha(t-1), \end{cases} \quad (3)$$

$$n(0) = 0.$$

### 2.2. 解析信号方法

对于任意一个信号  $s(t)$ , 可以通过引入解析信号的概念来唯一地确定该信号的振幅  $A(t)$  和相位  $\phi(t)$ , 其解析信号  $\psi(t)$  是由下式定义的关于时间的复函数:

$$\psi(t) = s(t) + j\bar{s}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}, \quad (4)$$

式中  $\bar{s}(t)$  函数为  $s(t)$  的 Hilbert 变换<sup>[1]</sup>

$$\bar{s}(t) = \frac{1}{\pi} \text{P. V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t-\tau} d\tau, \quad (5)$$

式中 P. V. 表明该积分是 Cauchy 主值意义下的积分, 则

$$\alpha(t) = \arctan \frac{\bar{s}(t)}{s(t)}. \quad (6)$$

解析信号方法实际上将时间序列信号转化成复平面上转动轨道, 其中实轴是原信号, 虚轴是其 Hilbert 变换, 即对原信号移相  $\pi/2$  后的信号. 因此混沌信号在复平面上也可以表现为轨道性质, 从这个意义上看混沌轨道与混沌信号是相通的. 为了保持相位的连续性, 也可采用(2)和(3)式的计算方式.

### 2.3. 基于 Poincaré 映射的定义方法

Rosenblum 等<sup>[1]</sup>对这类混沌还给出了另外一种定义相位的方式, 即假定每个转动周期内相位是线性变化的, 因此有

$$\phi_M = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1}. \quad (7)$$

显然这种定义方式非常粗糙, 本文暂不讨论.

## 3. 一般混沌瞬时相位的计算方法

### 3.1. 经验模式分解方法<sup>[7]</sup>

文献[7]认为, 对于任意一个混沌信号, 要恰当地计算其相位变量, 最基本的前提是要确定一个唯一的转动中心和方向, 才能使得瞬时角速率不为负. 对于那样一类只围绕一个转动中心缠绕的正规转动(如 Rössler 振子)按照(1)–(3)式计算相位是满足这个前提的. 而对于一大类有多个转动中心的混沌轨道(如 Duffing 振子)或在复平面上的轨迹呈现为绕多个中心缠绕的混沌信号, 如果选定一个中心为计算相位的转动中心, 那么围绕另一个中心的转动必然是反方向的(如图1所示), 即围绕多个转动中心缠绕的混沌运动方向不确定, 因此再按照(1)–(3)式计算相位显然不合理.

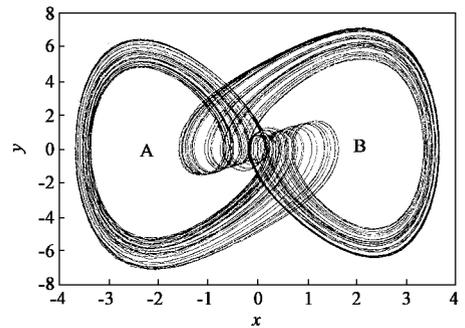


图1 有多个转动中心的转动 Duffing 混沌

为了克服这一难点, 他们采用经验模式分解方法将一个复杂的混沌信号根据转动频率分解为多个正规转动的组合, 然后对每个正规转动分别求取相位, 这样混沌信号的相位就由所分解得到的这些正规转动的相位来反映. 具体的分解过程如下:

1) 对信号  $x(t)$  构造两个光滑样条分别将其所有的极大值和极小值连接起来得到  $x_{\max}(t)$  和  $x_{\min}(t)$ ;

2) 计算

$$\Delta x(t) = x(t) - [x_{\max}(t) + x_{\min}(t)]/2;$$

3) 对  $\Delta x(t)$ , 重复 1) 和 2), 直至最终得到一个正规转动, 记为  $C_1(t)$ , 这就是分解得到的第一个模式;

4) 对  $x_1(t) = x(t) - C_1(t)$ , 重复 1) 至 3), 得到

第二个模式  $C_2(t)$ ;

5)重复以上过程,直至最后得到的模式  $C_M(t)$  不再有明显变化.则原来的混沌信号  $x(t)$  就分解为

$x(t) = \sum_{i=1}^M C_i(t)$ ,其中  $C_i(t)$  是近似正交的.对每一个模式  $C_i(t)$  都对应有一个解析信号  $\Psi_i(t) = A_i(t)e^{j\phi_i(t)}$  因而各有一个相位  $\phi_i(t)$ ,原来混沌信号的相位就通过这  $M$  个相位  $\phi_i(t)$  来表现.

从以上介绍我们知道,这种经验模式分解方法并不能得到混沌在某时刻的确切相位,只能得到分解后的各模式在相应时刻的相位,不具有单值性,并且这种方法是基于时间序列的波动特征提出,因此只适用于混沌信号.按照分解的思路,我们不难想到下面的直接分解方法.

### 3.2. 直接分解方法

对于转动中心只有很少几个的混沌(如 Lorenz, Duffing 等系统的混沌只有两个转动中心),一般直观上就能确定各个转动中心,这样我们就可以直接根据转动中心将混沌分解.以图 1 所示的 Duffing 振子的混沌为例,转动中心可以选择为  $A(-2, 0)$  和  $B(2, 0)$ .实际上转动中心不一定要严格选择在各个转动的正中心,只要每一圈的转动把所选择的中心圈在里面就可以,这样按照(1)–(3)式计算出的相位才是合理的.

### 3.3. 切向量法

文献 [8] 在切空间中定义了离散系统混沌的相位,这一思想实际上在文献 [9] 中已有体现,但是文献 [9] 只是提到这种定义方法,因不是文中讨论的重点,故未作深入探讨.文献 [8] 将  $s_1-s_2$  平面上离散系统混沌的相位定义为

$$\phi(t+1) = \arctan\left(\frac{s_2(t+1) - s_2(t)}{s_1(t+1) - s_1(t)}\right), \quad (8)$$

$$\phi(t) = \phi(t) + 2\pi m(t), \quad (9)$$

整数  $m(t)$  由下式确定:

$$m(t+1) = \begin{cases} m(t) + 1 & \phi(t+1) < \phi(t); \\ m(t) & \text{否则,} \end{cases} \quad (10)$$

$$m(1) = 0.$$

在这个定义中(10)式对离散系统意味着平面上的相点不仅在跳转过一周时相位要增加  $2\pi$ ,而且在向反方向跳时也增加  $2\pi$ (如文献 [8] 中图 1 的  $(t+3)$  时刻).这样处理可能是为了使得到的相位单调

增加,却不甚合理,特别是若直接用于连续系统的混沌,会使连续的转动得到不连续的相位,这可能也是至今未见用于连续系统的原因.实际上若将(10)式作下面的修正,即可推广用于计算连续系统混沌的相位:

$$m(t+1) = \begin{cases} m(t) + 1 & \phi(t) \text{ 由第 4 象限,变} \\ & \text{到第 1 象限;} \\ m(t) - 1 & \text{除了以上情况之外的} \\ & \phi(t+1) < \phi(t); \\ m(t) & \text{其他,} \end{cases} \quad (11)$$

$$m(1) = 0.$$

## 4. 方法的比较

以上介绍的三种方法中,后两种是基于轨道的转动特征提出的,不仅适用于混沌信号,而且适用于混沌轨道,且得到的相位是单值的.由于第一种方法不具有这些特点,故这里只针对后两种方法作比较分析.

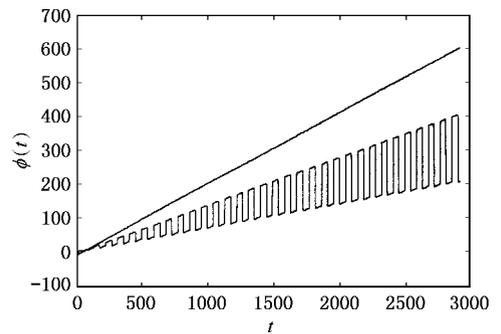


图 2 Duffing 混沌振子的相位

图 2 给出了用直接分解方法和切向量法计算出的图 1 所示的 Duffing 振子的混沌的相位.图 2 中连续的曲线是用切向量法计算出的相位,阶梯状的曲线是用直接分解方法计算出的结果.显然用直接分解方法得到的相位不连续,但阶梯的上沿线和下沿分别表示围绕两个转动中心的转动,每一个台阶的宽度就表示了该转动绕每个转动中心的相对时间的长短,因而可以明显看到转动从一个转动中心附近绕到另一个转动中心附近的节律.

图 4 给出了用这两种方法计算出的图 3 所示 Lorenz 混沌振子的相位.用直接分解方法计算时选择的两个转动中心为  $(-8, 25)$  和  $(8, 25)$ .Lorenz 混沌振子与 Duffing 混沌振子最主要的区别在于 Lorenz

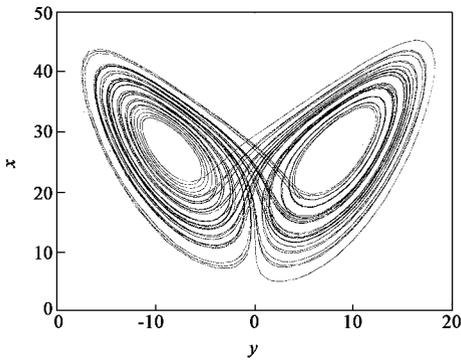
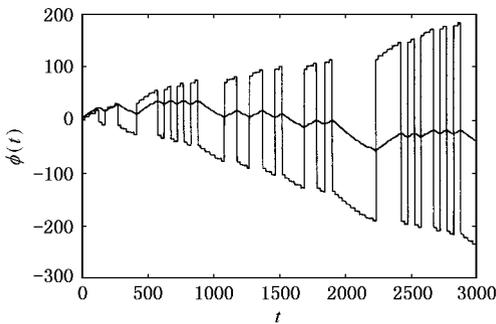
图3 Lorenz 混沌在  $(y, x)$  平面上的投影

图4 Lorenz 混沌振子的相位

混沌振子有反方向的转动,而 *Duffing* 混沌振子只是一个方向的转动.显然对于有反方向转动的混沌,用

直接分解方法得到的相位还是阶梯状的,只是此时阶梯的上沿线和下沿线分别向上、下发散,而不同于图2中的上、下沿线均向上发散的阶梯线,这是因为如果定义了一个方向的转动为相位增加,则另一个方向的转动一定是相位减小.图4中的连续曲线是切向量法得到的,此时的曲线虽然连续但不再是单调增加的,其中的单调减少部分也正反映了转动中的反向部分.

通过以上比较我们知道,直接分解方法和切向量法对绕多个转动中心缠绕的混沌都适用,但直接分解方法得到的相位不连续,且计算中选择的转动中心带有有人为因素,转动中心不明显或过多时,难以计算,而切向量法不管系统的转动中心多少,也不管转动方向如何,总能得到唯一的瞬时相位,虽然对反方向的转动相位不再是单调增加的,但是,定义一个方向的转动为正(如逆时针),另一方向的转动必然为负,这也是符合人的直觉的.因此通常情况下,切向量法可能是最佳选择.

## 5. 结 论

本文分析了目前在混沌相位同步中所涉及到的混沌相位的计算方法问题,指出现有方法存在的问题,提出两种新的计算方法,通过对这两种方法作比较分析,认为切向量方法比较客观,是目前计算一般混沌系统相位的最佳方法.

- [1] Rosenblum M G, Pikovsky A S & Kurths J 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 1804
- [2] Schafer C, Rosenblum M G, Abel H H *et al* 1999 *Phys. Rev. E* **60** 857
- [3] Makarenko V, Llinas R 1998 *Pratl Acad Sciusa*, **95** 15747
- [4] Fitzgerald R 1999 *Phys. Today*, **52** 17
- [5] Shuai J W and Durand D M 1999 *Phys. Lett. A* **264** 289
- [6] Rosenblum M, Pikovsky A and Kurths J 1997 *IEEE Trans. Circuits*

and System I **44** 874

- [7] Yalcinkaya T & Lai Y C 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 3885
- [8] Chen J Y, Wong K W, Chen Z X, Xu S C and Shuai J W 2000 *Phys. Rev. E* **61** 2559
- [9] Ma W Q, Yang J Z, Liu W J, Bao G, Hu G *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 787 (in Chinese) [马文麒、杨俊忠、刘文吉、包刚、胡岗等 1999 物理学报 **48** 787]

# New methods to study the phase of chaos with multiple rotating center<sup>\*</sup>

Chen Yong-Hong<sup>1)</sup> Zhou Tong<sup>1)</sup> He Dai-Hai<sup>2)</sup> Xu Jian-Xue<sup>1)</sup> Su Wen-Tian<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup>*(Institute of Nonlinear Dynamics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)*

<sup>2)</sup>*(Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)*

<sup>3)</sup>*(Department of Engineering, Henan Oil Field Company, Nanyang 473132, China)*

(Received 8 October 2000; revised manuscript received 21 September 2001)

## Abstract

In studying the phase synchronization of chaotic oscillators, the most fundamental is to define a proper phase variable for the chaotic oscillation. The definitions of the phase of a general chaotic trajectory are investigated in this paper. Considering a great deal of chaos whose trajectory projected on a plan is not a proper rotation, we present two simple procedures to get its instantaneous phase. One procedure called the direct – decomposition method is based on the idea of decomposition. The other called the tangency method is implemented by calculating angles in the tangent space. By the comparison of the numerical results for some examples, the advantages of these methods are discussed. In conclusion, the tangency method is proper for any chaotic oscillation and therefore may be widely used in the phase synchronization of chaos.

**Keywords**: chaotic synchronization, phase synchronization, proper rotator

**PACC**: 0545

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 19702015 and 19972051).