

# 一类混沌系统的同步方法\*

杨 涛 邵惠鹤

(上海交通大学自动化系, 上海 200030)

(2001 年 6 月 13 日收到, 2001 年 9 月 23 日收到修改稿)

针对一类混沌系统的特点, 任意构造满足一定条件的响应系统, 根据滑模控制策略得到实现两者同步的反馈控制器. 在可测同步误差基础上, 利用扩张状态观测器来估计驱动系统与“构造”的响应系统之间的差异, 把上述反馈控制策略转变为物理可实现的控制器并实现两者的同步. 以 Duffing 和 Chua's 电路为例的仿真表明效果良好.

关键词: 混沌同步, 滑模控制, 扩张状态观测器

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌同步由于广阔的应用前景而成为当今研究的热点, 出现了各种实现混沌信号或混沌系统同步控制的机理与方法<sup>[1-6]</sup>. 尽管各种方法千差万别, 但大多是建立在混沌系统精确数学模型的基础上, 即驱动、响应系统都是结构已知且相同的混沌系统<sup>[7,8]</sup>. 混沌同步的目的是在响应端重构出驱动混沌系统的吸引子信息. 然而许多动力系统具有参数或模型的不确定性, 尤其是随着环境的改变, 系统的参数可能会发生变化. 因此在响应端使用与驱动端结构相同的混沌系统而实现同步是不现实的. 能否“构造”结构简单的响应系统, 并由其输出来得到驱动混沌系统的吸引子信息? Naresh, Sharma 等<sup>[9]</sup>对这个问题进行了初步探讨, 他们构造三维二次方程组作为响应系统, 并使用优化方法实现驱动、响应系统的同步. 但其中待确定参数太多(13 个), 同步精度较低. Ricardo Femat 等<sup>[10,11]</sup>指出大多数混沌系统可以描绘成完全线性化或部分线性化的非线性系统, 如 Chua's 电路, Lorenz 系统, Duffing 系统等. 本文根据这一点, 构造满足一定条件的响应系统, 并采取策略来实现驱动、响应系统的同步.

滑模控制是一种非线性控制策略, 曾经广泛用于具有不确定性的非线性系统控制中<sup>[12]</sup>, 文献<sup>[13]</sup>使用滑模控制思想对混沌系统进行控制<sup>[14]</sup>, 文献

[11] 把滑模控制和变结构控制相结合, 实现了离散混沌系统的控制和同步, 但使用了大量的系统信息, 所得到的控制方式在实际工程中实现的难度较大. 本文把滑模控制和扩张状态观测器(ESO)<sup>[10,11,15]</sup>的思想相结合, 根据驱动混沌系统的特点, 构造满足条件的“响应”系统, 先根据滑模控制原理求取混沌同步控制形式, 再利用 ESO 对系统结构信息进行渐近估计, 把复杂的滑模控制策略变为可实现的控制方式, 以此实现驱动、“响应系统”的同步, 并讨论了这种同步方式在信息传输中的应用. 值得指出的是, 该课题也是非混沌系统混沌化的一个研究内容. 同时这种研究对于混沌通信、化工控制等很多领域均具有重要意义.

## 2. 混沌系统的规范化描述

对于  $n$  维驱动混沌系统,

$$\dot{X} = F(X, p), y_M = C_M X, \quad (1)$$

式中  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ ,  $p = \{p_i, i = 1, \dots, m\}$  为系统参数,  $y_M$  为系统的输出. 定义可逆变换  $Z = \Phi(X)$ , 使系统(1)式具有如下的规范型或类规范型(变换  $\Phi$  对于许多混沌动力系统都是存在的<sup>[10]</sup>):

$$\dot{z}_i = z_{i+1}, \dot{z}_\rho = A(Z, V, p),$$

$$1 \leq i \leq \rho - 1, \dot{V}_j = \xi(Z, V),$$

\* 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: G1998030415)资助的课题.

$$\rho \leq j \leq n, \rho \leq n, y = \varphi(Z, V), \quad (2)$$

式中  $y$  为输出,  $A(\cdot), \varphi(\cdot)$  体现了系统的结构信息, 由混沌吸引子的特性知道两者是有界的. 对于系统 (2) 式而言, 当  $\rho = n$  时, 则 (1) 式为完全可线性化的非线性混沌系统 (FLNS);  $\rho < n$  时 (1) 式为部分可线性化的非线性混沌系统 (PLNS)<sup>[11]</sup>, 分别进行讨论:

1.  $\rho = n$  (如 Duffing, Vander Pol 等),

此时系统 (2) 式变为标准规范型

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= z_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{z}_n &= A(Z, \rho), & y = \varphi(Z). \end{aligned} \quad (3)$$

2.  $\rho < n$  (如 Chua's 电路, Lorenz 系统等).

尽管 (2) 式不能转换为型如 (3) 式的标准规范型, 由于混沌系统的一个显著特性是其轨迹表现出整体有界性, 及吸引子内部的相互作用, 一般满足  $\xi(0, V)$  是渐近稳定 (如 Lorenz, Chua's 系统等)<sup>[10, 11]</sup>, 即非线性化部分具有内部稳定性 (minimum-phase: MP). 以 Lorenz 为例进行说明, 对于 Lorenz 系统

$$\dot{x} = \alpha(y - x), \dot{y} = rx - y - xz, \dot{z} = xy - \beta z, \quad (4)$$

$\sigma, r, \beta$  为系统参数. 定义  $z_0 = z_1, z_1 = x, v_1 = y, v_2 = z$  则 (4) 式变为

$$\dot{z}_0 = z_1, \dot{z}_1 = \alpha(y - x) = A(\cdot), \dot{V} = CV + Du, \quad (5)$$

式中  $V = (v_1, v_2)^T, \rho = 1, C = \begin{bmatrix} -1 & -z_1 \\ z_1 & -\beta \end{bmatrix}, D =$

$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix}, u = z_1$ . 对于 Lorenz 系统而言, 其状态变量满足如下关系<sup>[14]</sup>:

$$x^2(t) + y^2(t) + [z(t) - r - \sigma]^2 \leq (\sigma + r)^2 K^2, \quad (6)$$

式中  $K^2 = 1/4 + (\beta/4)\max(\sigma^{-1}, 1)$ , 因此  $z_1$  是有界的, 则  $u$  也是有界的. 所以对于恰当的参数  $\beta, C$  所有特征值实部为负, 故 (5) 式是渐近稳定的, 即  $\xi(0, V)$  是渐近稳定, 取 (4) 式具有内部稳定性 (MP). 对于其他的混沌系统 (Chua's 电路, Rössler 等), 可以得到类似的结论<sup>[7]</sup>. 因此本文的目的是根据驱动混沌系统 (2) 式, 构造“响应”系统, 并采取策略实现它们的同步, 进而由  $\Phi^{-1}$  得到驱动混沌系统 (1) 式的信息. 在此基础上实现各种工程应用, 如信息传输、化工控制等.

### 3. 基于滑模控制策略和扩张状态观测器的混沌系统同步

根据实际情况, 对于驱动混沌系统作如下假设: (a) 驱动混沌系统 (1) 式能描述成为 (2) 式的情况; (b) 只有  $x_1$  (即  $z_1$ ) 可测量; (c) 驱动系统的不确定性体现在  $A(\cdot)$  中, 即  $A(\cdot)$  为未知且有界; (d) 驱动系统具有内部稳定性, 即  $\xi(0, V)$  是渐近稳定. 根据混沌吸引子的特点和工程应用的实际情况, 这些假设都是合理的. 很多已经报道的混沌系统都可以描述为  $\rho < n$  (PLNS: Lorenz, Chua's 等) 或  $\rho = n$  (FLNS: Duffing, Vand pol 等) 的规范或类规范型. 在工程实际中, 并不是系统的任何信息都是可测量的, 例如为了提高混沌通信的安全性能, 不可能把所有状态均传输到响应端, 而只利用某一个变量来构成驱动信号; 由于许多动力系统具有参数或模型的不确定性, 尤其是随着环境的改变, 系统的参数可能会发生变化, 即  $A(\cdot)$  可能会随着环境的改变而变化; 由于混沌吸引子内部的相互作用, 很多混沌系统具有 MP 特点 (如 Chua's, Lorenz, Rössler 等常用的混沌<sup>[11]</sup>).

#### 3.1. FLNS ( $\rho = n$ ) 系统的同步

首先讨论 FLNS. 对于形如 (3) 式的 FLNS 混沌系统, 构造如下的响应系统:

$$\begin{aligned} \dot{w}_i &= w_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{w}_n &= M(W) + u, & y' = w_1, \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $W = (w_1, \dots, w_n)^T$  为响应系统状态变量,  $M(\cdot)$  为任意的有界函数,  $u$  为待定的控制策略,  $y'$  为响应系统的输出. 后面的过程将表明  $M(\cdot)$  的具体形式对 (3) (7) 式的同步无任何影响, 只要其为有界即可. 由 (3) (7) 式得到如下的同步误差系统:

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\dot{e}_n = [M(W) - A(Z, G)] + u, \quad (8)$$

$E = (e_n, \dots, e_1)^T = (w_i - z_i, i = 1, 2, \dots, n)^T$  为同步误差, 于是需要求合适的控制策略使  $\lim_{t \rightarrow \infty} E = \bar{0}$ . 我们用滑模控制策略来解决该问题. 对于误差系统 (8) 式, 得到如下的扩张状态观测器:

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$\dot{e}_n = e_{n+1}, \quad \dot{e}_{n+1} = \Xi(E, u) + \dot{u}, \quad (9)$$

式中  $\Xi(\cdot) = \sum_{k=1}^{n-1} e_{k+1} \partial_k [M(\cdot) - A(\cdot)] + ([M(\cdot) - A(\cdot)] + u) \partial_n [M(\cdot) - A(\cdot)], \partial_k[\cdot] =$

$\mathcal{A} \cdot \mathcal{Y} \partial e_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , 表示了驱动、响应系统的结构信息, 即我们把两系统的结构信息包含在一个新的状态  $e_{n+1}$  中. 根据滑模控制思想, 定义如下的滑动面<sup>[16, 17]</sup>:

$$S = e_{n+1} - e_{\alpha(n+1)} + \int_0^t \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j dt = 0, \quad (10)$$

式中  $e_{n+1}$  的初始状态为  $e_{\alpha(n+1)}$ . (10) 式也可以描述:

$$\dot{e}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j, \quad (11)$$

初始条件为  $e_{n+1}(0) = e_{\alpha(n+1)}$ , 于是得到如下的滑模动力系统 (具有理想特性的系统):

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \dot{e}_{n+1} = - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j \quad (12)$$

或用矩阵描述为

$$\dot{E} = HE, \quad (13)$$

式中

$$ZE = (e_1 \dots e_{n+1})^T, \\ H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_1 & -c_2 & \dots & \dots & -c_{n+1} \end{bmatrix},$$

初始条件为  $E(0) = (e_1(0) \dots e_{n+1}(0))^T$ . 于是通过选择合适的参数  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n+1$  使 (12) 式是渐近稳定, 即使  $H$  所有特征值的实部为负即可. 于是要求设计控制策略把误差系统 (9) 式控制到该滑动面上以获得渐近稳定特性. 使用如下的到达规则<sup>[13]</sup>:

$$\dot{S} = \alpha S - \beta \text{sgr}(S), \quad (14)$$

式中  $0 \leq \alpha < 1$ ,  $\text{sgr}(\cdot)$  为符号函数, 变换增益  $\beta > 0$  以保证滑动条件和滑动的发生.

由 (10), (14) 式得到

$$\alpha S - \beta \text{sgr}(S) = \dot{e}_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j, \quad (15)$$

即有

$$\dot{e}_{n+1} = \mathcal{A}(E, \eta, u) + \dot{u} = \alpha S - \beta \text{sgr}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j, \quad (16)$$

于是有

$$\dot{u} = \alpha S - \beta \text{sgr}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j - \mathcal{A}(e, \eta, u), \quad (17)$$

即有控制策略

$$u(t) = \int_0^t [\alpha S - \beta \text{sgr}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j - \mathcal{A}(E, \eta, u)] dt. \quad (18)$$

控制量  $u$  的初始条件一般取为 0. 其中足够大的  $\beta$  对于混沌同步的实现具有重要意义, 其大小与系统结构信息有关, 可以通过如下的 Lyapunov 定理来定性讨论. 把 (17) 式代入扩张系统 (9) 式得到

$$\dot{e}_i = e_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \dot{e}_n = e_{n+1} \\ \dot{e}_{n+1} = \alpha S - \beta \text{sgr}(S) - \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j. \quad (19)$$

定义 Lyapunov 函数为  $V = \frac{1}{2} S^2$ , 有

$$\dot{V} = \mathcal{A}(\dot{e}_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} c_j e_j) = \mathcal{A}(\alpha S - \beta \text{sgr}(S)) \\ = \alpha S^2 - \beta |S| \leq |S| (|S| - \beta). \quad (20)$$

由 (10) 式看出,  $S = L(e_1, \dots, e_n) = N(Z, W)$ , 且混沌系统一个典型的特征是其整体稳定性, 并且函数  $M(\cdot)$  有界, 故  $Z, W$  是有界的, 故  $S$  是有界, 所以选择足够的  $\beta$  以保证  $\dot{V} \leq 0$ , 即该动力系统是稳定的. 这里虽然没有定量给出  $\beta$  的值, 但得到的结论与文献 [12] 是相同的: 即当  $\beta$  足够大时,  $S$  将收敛到 0, 同步误差系统具有 (12) 式的特性, 即 (10) (18) 式保证同步的实现.

从滑模控制策略 (10) (18) 式知道其实现需要驱动、响应系统的结构信息 ( $A(\cdot), M(\cdot)$ ), 由于本文假设  $A(\cdot)$  为未知, 且  $M(\cdot)$  可选择为任意有界函数, 则  $\mathcal{A}(\cdot)$  是未知的; 同时 (10) (18) 式的实现需要所有状态 ( $e_i = w_i - z_i$ ) 可测, 这在实际工程中是不可能实现的. 故 (10) (18) 式在物理上是不可实现的. 混沌同步过程中, 可测的同步误差中包含了大量的系统结构信息, 曾被用来对信道噪声进行补偿<sup>[9]</sup>, 本文挖掘可测同步误差 (本文为  $e_1$ ) 所包含的信息来对  $\mathcal{A}, e_i, i = 2, 3, \dots$  进行估计. 对于如下的观测器<sup>[11, 15]</sup>:

$$\dot{\hat{e}}_i = \hat{e}_{i+1} - \theta_i \phi_i(\hat{e} - e_1), \quad 1 \leq i \leq n-1, \\ \dot{\hat{e}}_n = \hat{e}_{n+1} - \theta_n \phi_n(\hat{e}_1 - e_1), \\ \dot{\hat{e}}_{n+1} = -\theta_{n+1} \phi_{n+1}(\hat{e}_1 - e_1). \quad (21)$$

选择合适的参数  $\theta_i$  和函数  $\phi_i$  (21) 式将实现对驱动、响应系统信息的估计  $\hat{e}_i \rightarrow e_i, i = 1, \dots, m$ ,

$\hat{e}_{n+1}$  将包含系统的结构信息  $\mathcal{A}$ , 本文选择如下的参数和函数形式<sup>[10, 11, 15]</sup>:

$$\theta_i = L^i \lambda_i \phi_i(\hat{e}_1 - e_1) = (abs(\hat{e}_1 - e_1))^p \text{sgn}(\hat{e}_1 - e_1),$$

$$p > 0, i = 1, 2, \dots, m, \quad (22)$$

式中  $L$  为增益因子, 定义变量

$$v_1 = L^n (abs(\hat{e}_1 - e_1))^p \text{sgn}(\hat{e}_1 - e_1),$$

$$v_i = L^{n+1-i} (\hat{e}_i - e_i), \quad 1 < i \leq n,$$

$$v_{n+1} = (\hat{e}_{n+1} - e_{n+1}).$$

并且有

$$\dot{v}_1 = L^n [abs(\hat{e}_1 - e_1)^p \text{sgn}(\hat{e}_1 - e_1)] (\dot{\hat{e}}_1 - \dot{e}_1),$$

式中  $[\bullet]$  表示对时间的导数. 由于混沌系统和构造的响应系统的有界性, 我们知道  $abs(\hat{e}_1 - e_1)^p \text{sgn}(\hat{e}_1 - e_1)$  是有界的, 不失一般性设其上限为  $\chi$ , 即有

$$\dot{v}_1 \leq L^n \chi (\dot{\hat{e}}_1 - \dot{e}_1).$$

于是有如下的误差系统:

$$\dot{v} = L\mathcal{T}(\chi, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})v + \mathcal{Q}(\cdot), \quad (23)$$

式中  $v = (v_1, \dots, v_{n+1})^T$  表示了估计误差,  $\mathcal{Q}(\cdot) = [0, 0, \dots, \varepsilon]^T$  且

$$\mathcal{T}(\chi, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \chi & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_2 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda_n & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\lambda_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

由于  $\mathcal{Q}(\cdot)$  是有界的, 因此在根据经验选择  $\chi$  后, 选择参数  $\lambda_i, 1 \leq i \leq n+1$  以保证  $\mathcal{T}(\cdot)$  的所有特征值具有负实部, 则(23)式是渐近稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} v_i \rightarrow 0, 1 \leq i \leq n+1$ , 即“估计误差”系统是全局渐近稳定的, 则有  $\hat{e}_i \rightarrow e_i, 1 \leq i \leq n+1$ . 故我们能从(21)式中获得系统的未知结构信息  $(\hat{e}_{n+1})$  和系统的不可测状态  $(\hat{e}_i, 1 \leq i \leq n)$ , 从而使控制量(10)(18)式可实现. 注意到(21)式中  $\dot{\hat{e}}_{n+1} \rightarrow \mathcal{E}(\cdot)$ , 故有  $e_{n+1} = (M(\cdot) - A(\cdot)) + u = \hat{e}_{n+1} + u$ . 于是(10)(18)式变为

$$S = \hat{e}_{n+1} + u - \hat{e}_{\alpha(n+1)} + \int_0^t \left[ \sum_{j=1}^n c_j \hat{e}_j + c_{n+1}(\hat{e}_{n+1} + u) \right] dt, \quad (25)$$

$$u(t) = \int_0^t \left[ \alpha S - \beta \text{sgn}(S) - \left[ \sum_{j=1}^n c_j \hat{e}_j + c_{n+1}(\hat{e}_{n+1} + u) \right] - \dot{\hat{e}}_{n+1} \right] dt. \quad (26)$$

由于(25)(26)式中的各项由(21)式得到, 而(21)式仅仅使用可测量的同步误差, 因此(25)(26)式满足

物理可实现的要求, 即在(25)(26)式作用下, 驱动混沌系统(3)式和任意满足有界性的“响应系统”实现了同步, 则在响应端即可根据响应系统的状态重构出驱动混沌系统的吸引子结构, 于是可以使用各种信息传输方式进行信息传输, 而在响应端仅仅利用响应系统的信息即可实现信息解调<sup>[19,20]</sup>. 同时在整个过程中, 没有用到响应系统的任何结构信息, 即任何满足有界性的系统均可, 且响应系统是否是混沌系统也不重要, 但在控制作用下, 构造的响应系统将呈现出与驱动系统相同的混沌特性, 即由结构简单的系统得到复杂的混沌系统特性, 在此基础上实现各种工业应用.

### 3.2. PLNS( $\rho = n$ )系统的同步

对于  $\rho < n$  的且具有内部稳定性的 PLNS 混沌系统而言, 构造如下的响应系统:

$$\dot{w}_i = w_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad \dot{w}_n = M(W) + u,$$

$$\dot{U} = \xi'(U, W), \quad y' = w_1, \quad (27)$$

式中  $M(\cdot)$  为有界的任意函数,  $\xi'(\cdot)$  应满足条件:  $\xi'(W, U) - \xi'(Z, V)$  在  $W - Z \rightarrow 0$  时是渐近稳定. 根据具体驱动混沌系统的结构特点是不难实现的, 此时要求对驱动混沌系统的结构  $\xi(\cdot)$  有一定的了解, 而无需  $A(\cdot)$  的任何信息. 于是根据 3.2 节的方法使  $W \rightarrow Z$  后, 由于  $\xi'(W, U) - \xi'(Z, V)$  的渐近稳定性, 知道  $U \rightarrow V$ , 则可实现响应、驱动系统的同步. 值得指出的是, 对于驱动混沌系统而言, 如果使用  $z_i, i = 1, \dots, \rho$  即可重构出其吸引子特征信息, 则响应系统可以构造为类似(7)式的形式而无需任何驱动系统结构信息  $(\xi(\cdot))$ .

## 4. 仿真实例

为了验证上述方法在混沌同步和信息传输中的应用, 以 Duffing 和 Chua's 电路为例进行仿真, 效果良好.

### 4.1. FLNS 的同步情况

对于如下的 Duffing 系统:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = A(x_1, x_2, p), \quad (28)$$

未知的  $A(x_1, x_2, p)$  描述了系统的结构和参数信息. 可见 Duffing 已经具有标准规范形式. 当  $A(x_1, x_2, p) = 1.8x_1 - 0.1x_2 - x_1^3 + 1.1\cos(0.4t)$  时, 系统体现出混沌特性, 其相空间结构如图 1(a)所示. 以 Duffing 作为驱动系统,  $x_1$  作为驱动信号从信道中传输到响应端, 根据上文所述, 构造“响应系统”

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = \mathcal{X}(y_1, y_2) + u, \quad (29)$$

式中  $\mathcal{X}(\cdot)$  可以为任意有界函数, 本文选为  $\mathcal{X}(\cdot) = \sin(y_1)$ ,  $u$  为控制作用以实现两系统的同步,  $u=0$  时的响应系统相空间结构如图 1(b) 所示, 可见图 1(a)(b) 相差很远. 由(28)(29)式得到同步误差系统  $(y_1 - x_1, y_2 - x_2)$ :

$$\dot{e}_1 = e_2, \dot{e}_2 = \Theta + u, \quad (30)$$

式中  $\Theta = \sin(y_1) - 1.8x_1 + 0.1x_2 + x_1^3 - 1.1\cos(0.4t)$  表达了驱动、响应系统的结构差异. 于是形如(21)式的估计器为  $\hat{E} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)^T$ :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 - L\lambda_1 \cdot (\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^{\chi} \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)), \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 - L^2\lambda_2 \cdot (\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^{\chi} \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)), \\ \dot{\hat{e}}_3 &= -L^3\lambda_3 \cdot (\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^{\chi} \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)). \end{aligned} \quad (31)$$

$\hat{e}_3$  估计了系统的结构差异  $\Theta$ . 于(25)(26)式变为

$$\begin{aligned} S &= \hat{e}_3 + u - \hat{e}_3(0) + \int_0^t (c_3(\hat{e}_3 + u) \\ &\quad + c_2\hat{e}_2 + c_1\hat{e}_1) dt, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [\alpha S - \beta \text{sgr}(S) - (c_3(\hat{e}_3 + u) \\ &\quad + c_2\hat{e}_2 + c_1\hat{e}_1) - \dot{\hat{e}}_3] dt. \end{aligned} \quad (33)$$

选择初始条件: Duffing  $(0.1, 0.2)$ , “响应系统”:

$(0.2, 1.3), S(0) = 0, u(0) = 0, \hat{E}(0) = (0, 0, 0)^T$ . 根据上文所述选择各项参数:  $\chi = 4 (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 3), L = 10 (c_1, c_2, c_3) = (165, 65, 4)$ , 在  $t=2$  时激活控制作用, 同步情况如图 1(c)(d) 所示. 驱动、响应系统完全同步后, 即可利用各种混沌通信方式进行信息传输<sup>[19, 20]</sup>, 本文以 ISM 为基础进行简单的讨论. 根据 ISM 原理, 用驱动系统吸引子对信息进行调制, 于是(28)式的第二个方程变为

$$\dot{x} = 1.8x_1 - 0.1x_2 - x_1^3 + 1.1\cos(0.4t) + i_1(t), \quad (34)$$

式中  $i_1(t)$  为要传输的信息, 注意  $i_1(t)$  的加入不能影响驱动系统的混沌特性, 这可以对  $i_1(t)$  进行预处理. 于是具有如下的解调方案:

$$i_2(t) = \dot{x}_2 - 1.8x_1 + 0.1x_2 + x_1^3 - 1.1\cos(0.4t). \quad (35)$$

由于  $x_1$  作为驱动信号在响应端是可用的, 但  $x_2$  在响应端是不可用的, 故(35)式是不可实现的. 同步实现后,  $y_2 \Rightarrow x_2$ , 因此(35)式变为如下可实现的方案:

$$i_2(t) = \dot{y}_2 - 1.8x_1 + 0.1y_2 + x_1^3 - 1.1\cos(0.4t). \quad (36a)$$

为了讨论简单起见, 本文把(34)式中的  $1.1\cos(0.4t) + i_1(t)$  看做传输信息, 则驱动系统(28)式可以描述为

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 1.8x_1 - 0.1x_2 - x_1^3 + i_1(t). \quad (36b)$$

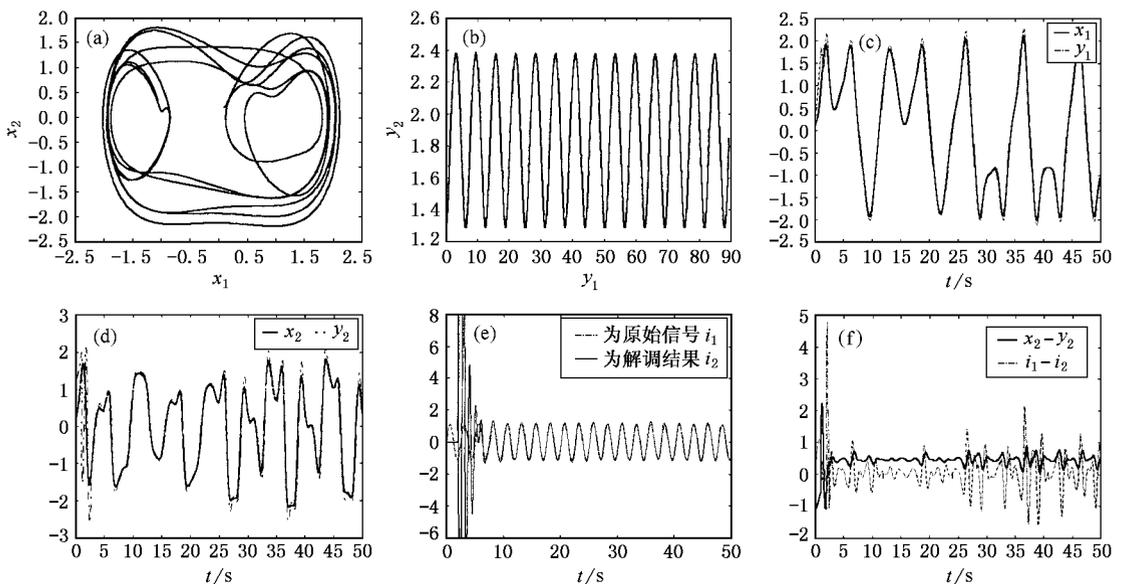


图 1 仿真结果 (a)为  $x_1$  对  $x_2$ ; (b)为无控制作用下  $y_1$  对  $y_2$ ; (c)为在控制作用下  $(x_1, y_1)$  对  $t$ ; (d)为在控制作用下:  $(x_2, y_2)$  对  $t$ ; (e)为在控制作用下  $(i_1, i_2)$  对  $t$ ; (f)为  $\beta=0.01$  的同步和解调情况  $(x_2 - y_2)$  对  $t$  ( $i_1 - i_2$ ) 对  $t$

为了使(36b)式呈现出混沌特性,令  $i_1(t) = 1.1\cos(0.4t)$  即可.于是得到信息解调方案

$$i_2(t) = \dot{y}_2 - 1.8x_1 + 0.1y_2 + x_1^3. \quad (36c)$$

解调结果如图 1(e)所示,可见效果很好.当然完全可以用(34)(35)式对信息进行调制和解调. $\beta$ 的大小对同步的实现很重要,仿真发现较大的  $\beta$  保证较好的同步效果,图 1(f)为  $\beta = 0.01$  的同步和信息解调结果,可见完全不成功.但  $\beta$  与同步误差之间是否存在定量的关系还有待进一步的研究.

### 4.2. PLNS 的同步情况

以 PLNS 的 Chua's 电路为驱动系统进行仿真.对于如下的 Chua's 电路:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \gamma_1[x_2 - x_1 - f(x_1)], & \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3, \\ \dot{x}_3 &= -\gamma_2 x_2, & y &= x_1, \end{aligned} \quad (37)$$

非线性函数  $f(x) = bx + 1/|x - a - b| |x + 1| - |x - 1|$ , 参数取为  $a = -1.27, b = -0.68, \gamma_1 = 10, \gamma_2 = -14.28$ .引入可逆变换  $z_1 = x_3, z_2 = -\gamma_2 x_2, v = x_1$ , 则(37)式变为形如(2)式的类规范型:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= -\gamma_2[z_1 + 1/\gamma_2 z_2 + v] = A(z_1, z_2, v), \\ v &= \gamma_1[-1/\gamma_2 z_2 - v - f(v)]. \end{aligned} \quad (38)$$

此时  $\rho = 2$ ,显然(38)式具有 MP 特性.于是可以设计如下的接受系统:

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, & \dot{w}_2 &= \vartheta(w_1, w_2) + u, \\ \dot{w}_3 &= \gamma_1[-1/\gamma_2 w_2 - w_3 - f(w_3)], \end{aligned} \quad (39)$$

式中  $\vartheta(\cdot)$  为任意有界函数,本文取为  $\vartheta(\cdot) = \sin(w_1)$ ,于是有同步误差系统  $(w_1 - z_1, w_2 - z_2, w_3 - v)$  可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, & \dot{e}_2 &= \Theta + u, \\ \dot{e}_3 &= \gamma_1[-1/\gamma_2 e_2 - e_3 - (f(w_3) - f(v))], \end{aligned} \quad (40)$$

式中  $\Theta = \sin(w_1) + \gamma_2[z_1 + 1/\gamma_2 z_2 + v]$  为未知,  $x_3$ , 即  $z_1$  被用为驱动信号传输到响应端,根据上文所述有如下的 ESO:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}_1 &= \hat{e}_2 - L\lambda_1(\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^p \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)), \\ \dot{\hat{e}}_2 &= \hat{e}_3 - L^2\lambda_2(\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^p \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)), \\ \dot{\hat{e}}_3 &= -L^3\lambda_3(\text{abs}(\hat{e}_1 - e_1))^p \text{sgr}((\hat{e}_1 - e_1)). \end{aligned} \quad (41)$$

于是控制策略可以描述为

$$\begin{aligned} S &= \hat{e}_3 + u - \hat{e}_3(0) + \int_0^t (c_3(\hat{e}_3 + u) \\ &+ c_2\hat{e}_2 + c_1\hat{e}_1) dt, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t [\alpha S - \beta \text{sgr}(S) - (c_3(\hat{e}_3 + u) \\ &+ c_2\hat{e}_2 + c_1\hat{e}_1) - \dot{\hat{e}}_3] dt. \end{aligned} \quad (43)$$

可见(42)(43)式是在物理可实现的控制器,且忽略了系统结构的差异.仿真结果如图 2 所示,在仿真中,各项参数取为  $\chi = 4, (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (1, 2, 3), L = 10, (c_1, c_2, c_3) = (231, 50, 4)$ ,在  $t = 2$  时激活控制作用,初始条件为  $(x_1, x_2, x_3) = (1.1, 0.4, 0.25), (w_1, w_2, w_3) = (0.1, 0.3, 0.5), (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = (0, 0, 0.5), u(0) = 0, S(0) = 0$ ,仿真结果如图 2 所示,同步效果很好.

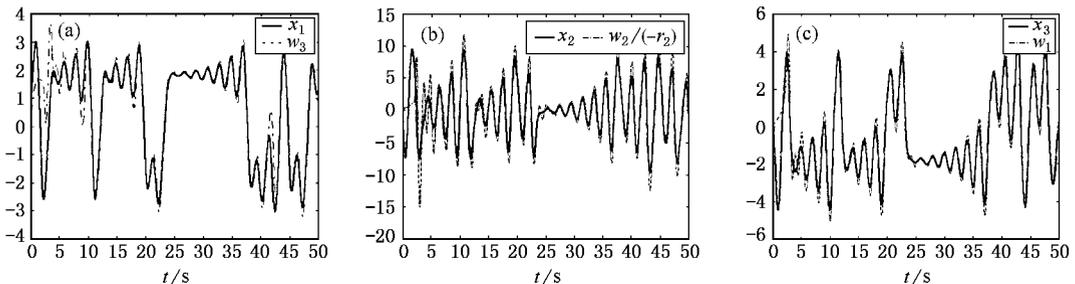


图 2 仿真结果 (a)为  $(x_1, w_3)$  对  $t$  (b)为  $(x_2, w_2, (-r_2))$  对  $t$  (c)为  $(x_3, w_1)$  对  $t$

## 5. 结 论

本文讨论了一种新的混沌同步思想:根据驱动

混沌系统特点“构造”响应系统,利用滑模控制和扩张状态观测器来克服驱动、响应系统结构的差异并得到一个物理可实现的控制策略以实现两者的同

步.在这种同步思想中,并不需要驱动、响应系统的结构完全一致,甚至响应系统是否是混沌系统也不重要,而是在满足有界条件下自由构造响应系统,增加了灵活性.然后由响应系统得到驱动系统的特性,

为各种工业应用打下基础.以 Duffing 和 Chua's 为例进行的仿真表明效果很好.当然,这种方法还需要进一步的讨论,尤其是  $\beta$  与同步质量的关系等.

- [ 1 ] Pecora L M and Carriol T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
Kozlov A K, Shalfeev V D and Chua L O 1996 *Int. J. Bifur. Chaos* **6** 255
- [ 2 ] Parlitz U, Chua L O, Kocarev L *et al* 1992 *Int. J. Bifur. Chaos* **2** 973  
Parlitz U, Zoller L R, Holzfuss J *et al* 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **4** 1715
- [ 3 ] Wu C W, Tao Y *et al* 1996 *Int. J. Bifur. Chaos* **6** 455  
di Bernardo M 1996 *Int. J. Bifur. Chaos* **6** 557
- [ 4 ] Zhang J S, Wan T H and Xiao X C 2001 *Chin. Phys.* **10** 97
- [ 5 ] Liu Y H, Ma J *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 10 [ in Chinese ] 刘玉怀、马军等 1999 物理学报 **48** 10 ]
- [ 6 ] Luo X S, Fang J Q *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2022 [ in Chinese ] [ 罗晓曙、方锦清等 1999 物理学报 **48** 2022 ]
- [ 7 ] Chua L O, Yang T *et al* 1996 *Int. J. Bifur. Chaos* **6** 189
- [ 8 ] Sira-Ramirez H 1993 *Int. J. Contr.* **57** 1039
- [ 9 ] Naresh Sharma and Poonacha P G 1997 *Int. J. Bifur. Chaos* **7** 2587
- [ 10 ] Femat R and Alvarez-Ramirez J *et al* 2000 *Physica D* **139** 231
- [ 11 ] Femat R and Alvarez-Ramirez J 1997 *Phys. Lett. A* **236** 307
- [ 12 ] Yua H T, Chen C K and Chen C L 2000 *Int. J. Bifur. Chaos* **5** 1139
- [ 13 ] Liao T L and Huang N S 1997 *Phys. Lett. A* **234** 262
- [ 14 ] Wu W G and Gu T X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 [ in Chinese ] [ 伍维根、古天祥 2000 物理学报 **49** 1922 ]
- [ 15 ] Han J Q 1995 *Control and Decision* **110** 85 [ in Chinese ] 韩京清 1995 控制与决策 **110** 85 ]
- [ 16 ] Chen C L and Lin W Y 1997 *Proc. Instn. Mech. Engrs.* **211** p75 - 82
- [ 17 ] Gao W, Wang Y *et al* 1995 *IEEE Trans. Ind. Electr.* **42** 117
- [ 18 ] Mettin H R and Scheeling A 1995 *Phys. Rev. E* **51** 4065
- [ 19 ] Cuomo K M and Oppenheim A V 1993 *Int. J. Bifur. Chaos* **3** 1629  
Short K M 1994 *Int. J. Bifur. Chaos* **4** 959
- [ 20 ] Heidari-Bateni G, McGillem C D and Tenorio M F 1992 in *Proc. Int. Commun. Conf.* p1232  
Feldmann U, Hasler M and Schwarz W 1996 *Int. J. Cir. Theo. Appl.* p551

## Synchronization for a class of chaotic systems<sup>\*</sup>

Yang Tao Shao Hui-He

( Department of Automation, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China )

( Received 13 June 2001; revised manuscript received 23 September 2001 )

### Abstract

A kind of receiver is constructed according to the character of transmitter. A feedback control used to synchronize this transmitter and the constructed receiver is proposed based on sliding mode control design. To make this controller physically realizable, an extended state observer is used to estimate the difference between the transmitter and receiver. Numerical simulations are carried out to show the effectiveness of this design based on Duffing oscillator and Chua's circuit.

**Keywords** : chaotic synchronization, sliding model control, extended state observer

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the State Key Development Program for Basic Research of China ( Grant No. G1998030415 ).