

# Rössler 混沌系统的追踪控制与同步\*

陈士华<sup>†</sup> 谢 进 陆君安 刘 杰

(武汉大学数学统计学院, 武汉 430072)

(2001 年 8 月 13 日收到, 2001 年 10 月 2 日收到修改稿)

对 Rössler 混沌系统进行控制, 使之追踪任意参考信号, 讨论了该控制系统的自同步以及与 Lorenz 混沌系统的异结构混沌同步问题, 并利用 Lyapunov 方法证明了该控制系统指数收敛到参考信号. 数值仿真进一步表明该方法的有效性.

关键词: Rössler 混沌系统, Lorenz 混沌系统, 追踪控制, 同步

PACC: 0545

## 1. 引 言

混沌的研究是科学界热点问题之一, 而混沌控制由于其在通讯、信息科学、医学、生物、工程等领域中的巨大应用潜力和发展前途, 已引起国内外科研工作者的广泛关注. 混沌控制的含意非常广泛, 一般而言, 指改变系统的混沌性态使之呈现或接近呈现周期性动力学行为. 目前已有多种控制混沌的方法问世, OGY 方法<sup>[1]</sup>, 输送控制方法<sup>[2]</sup>, 工程反馈控制方法<sup>[3]</sup>, 脉冲控制方法<sup>[4]</sup>和采样保持方法<sup>[5,6]</sup>等.

在混沌控制研究中, 追踪问题(即通过施加控制使受控系统的输出信号达到事先给定的参考信号)尤为重要, 以往这方面的工作大多集中在讨论离散系统, 对于连续系统, Jackson<sup>[2]</sup>发展的输送控制方法虽可追踪给定的周期轨道, 但不能解决镇定问题, 而且在应用中受收敛域或输送盆的限制. 本文针对 Rössler 混沌系统的追踪问题进行研究, 提出一种控制方案, 实现了系统对任意给定参考信号的追踪, 并且在理论上证明这种控制方案是按指数收敛的, 最后给出数值仿真结果, 表明此控制方案不仅可以对给定参考信号进行追踪, 而且受控系统可以与混沌驱动系统(同结构异结构均可)同步.

## 2. 追踪控制的设计及收敛性证明

考虑 Rössler 系统<sup>[7,8]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c), \end{cases} \quad (1)$$

式中  $a, b, c$  为系统参数. 现给定参考信号  $r(t)$ , 要设计一个控制器  $U$ , 使受控 Rössler 系统

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z), \\ \dot{y} = x + ay, \\ \dot{z} = b + z(x - c) + U \end{cases} \quad (2)$$

的输出信号  $x(t)$  追踪给定的参考信号  $r(t)$ , 即满足

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\epsilon(t)| = 0,$$

式中  $\epsilon(t) = x(t) - r(t)$  称为误差信号. 取控制器

$$U = -b + x - (2 + a)y - (2 - c)z - xz - 2r(t) - 2\dot{r}(t) - \ddot{r}(t), \quad (3)$$

下面证明对此控制器  $x(t)$  按指数速率收敛到参考信号  $r(t)$ .

定理 对于控制系统(2)式, 如果控制器  $U$  满足(3)式, 则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|\epsilon(t)|}{e^{-(1-\sigma)t}} = 0,$$

式中  $\sigma$  为任意正常数.

证 设

$$V(t) = (x(t) - r(t))^2 + (z(t) - x(t) + y(t) + r(t) + \dot{r}(t))^2,$$

式中  $x(t), y(t), z(t)$  为控制系统(2)式的状态输出信号. 经计算得到

\* 国家自然科学基金(批准号: 19531070)资助的课题.

<sup>†</sup>E-mail: shcheng@wuhee.edu.cn

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \mathcal{L}(x - r(t))(\dot{x} - \dot{r}(t)) \\ &\quad + \mathcal{L}(z - x + y + r(t)) \\ &\quad + \dot{r}(t)(\dot{z} - \dot{x} + \dot{y} + \dot{r}(t) + \ddot{r}(t)) \\ &= \mathcal{L}(x - r(t))(-y - z - \dot{r}(t)) \\ &\quad + \mathcal{L}(z - x + y + r(t) + \dot{r}(t)) \\ &\quad \times (b + xz - cz + U + y + z + x \\ &\quad + ay + \dot{r}(t) + \ddot{r}(t)) \\ &= -\mathcal{L}(x - r(t))^2 + (z - x + y \\ &\quad + r(t) + \dot{r}(t))^2 ] \\ &= -2V(t). \end{aligned}$$

故

$$V(t) = V(0)e^{-2t},$$

而

$$\begin{aligned} \frac{e^2(t)}{e^{-(2-2\sigma)t}} &\leq \frac{V(t)}{e^{-(2-2\sigma)t}} \\ &= \frac{V(0)e^{-2t}}{e^{-(2-2\sigma)t}} = \frac{V(0)}{e^{2\sigma t}}, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|e(t)|}{e^{-(1-\sigma)t}} = 0.$$

由此定理易知,  $x(t)$  按指数速率收敛到参考信号  $r(t)$ .

### 3. 数值研究结果

选取系统参数  $a = b = 1/5$ . 当  $c$  从 2.5 逐步增加时可以观测到典型的倍周期分支现象.  $c = 5$  时系统(1)式呈现混沌状态.

#### 3.1. Rössler 混沌系统追踪正弦信号

取参考信号为正弦信号  $r(t) = \sin t$ , 此时控制器  $U = -0.2 + x - 2.2y + 3z - xz - \sin t - 2\cos t$ , 取初值  $x_0 = 12, y_0 = 3, z_0 = 4$ . 那么可实现受控 Rössler 混沌系统对正弦信号的追踪.

由图 1 和图 2 可以看出,  $x(t)$  追踪  $r(t)$  的速度十分快.

#### 3.2. Rössler 混沌系统的自同步

选择驱动系统与响应系统的结构相同, 即驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{u} = -(v + w), \\ \dot{v} = u + 0.2v, \\ \dot{w} = 0.2 + u(u - 5), \end{cases} \quad (4)$$

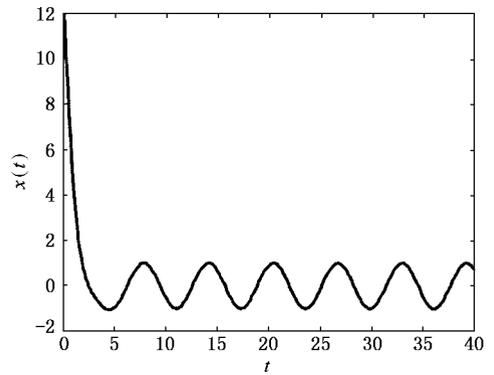


图 1 受控系统状态信号  $x(t)$  的显示结果

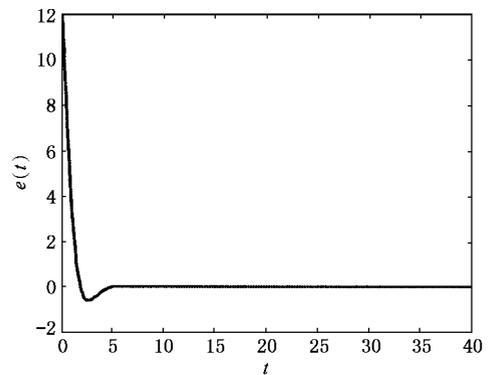


图 2 误差信号  $e(t)$  的显示结果

式中  $u(t)$  为参考信号, 此时控制器

$U = x - 2.2y + 3z - xz - u + 2.2v - 3w + uw$ . 取初值  $x_0 = 12, y_0 = 3, z_0 = 4, u_0 = 2, v_0 = 4, w_0 = 5$ . 图 3 和图 4 分别给出了受控系统(2)式和驱动系统(4)式的输出信号. 图 5 给出了误差信号  $e(t) = x(t) - u(t)$ , 结果表明虽然受控系统与驱动系统的初值不同, 但最终实现了 Rössler 混沌系统的自同步.

#### 3.3. Rössler 混沌系统的异结构混沌同步

选择 Lorenz 混沌系统<sup>[9,10]</sup>

$$\begin{cases} \dot{u} = \sigma(v - u), \\ \dot{v} = (\mu - w)u - v, \\ \dot{w} = -bw + uw, \end{cases} \quad (5)$$

式中  $\sigma, \mu, b$  为系统参数, 取  $\sigma = 10, \mu = 30, b = 8/3$ , 以  $u(t)$  为参考信号, 此时控制器

$U = -0.2 + x - 2.2y + 3z - xz - (382u - 90v - 10uw)$ . 取初值  $x_0 = 12, y_0 = 3, z_0 = 4, u_0 = 2, v_0 = 4, w_0 = 5$ . 图 6 和图 7 分别给出了受控 Rössler 系统(2)式和驱

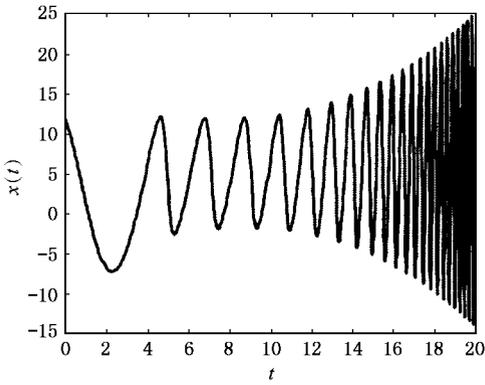


图 3 受控系统状态信号  $x(t)$  的显示结果

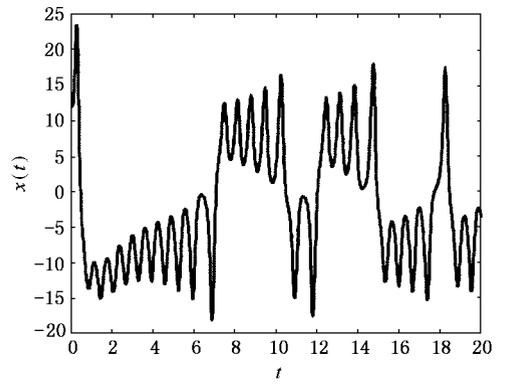


图 6 受控系统状态信号  $x(t)$  的显示结果

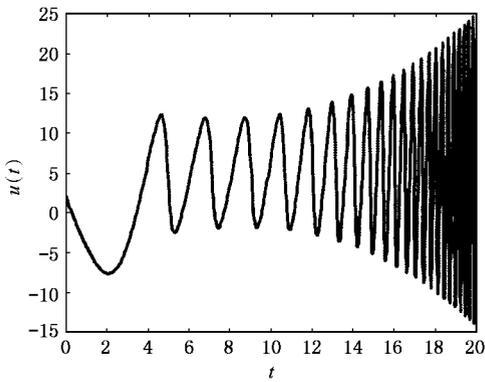


图 4 驱动系统状态信号  $u(t)$  的显示结果

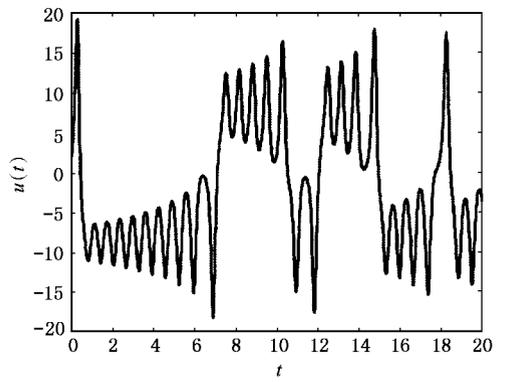


图 7 驱动系统状态信号  $u(t)$  的显示结果

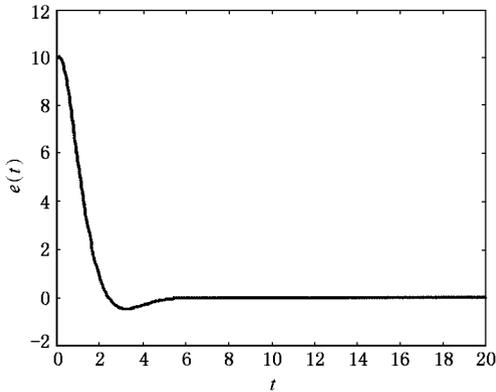


图 5 误差信号  $e(t)$  的显示结果

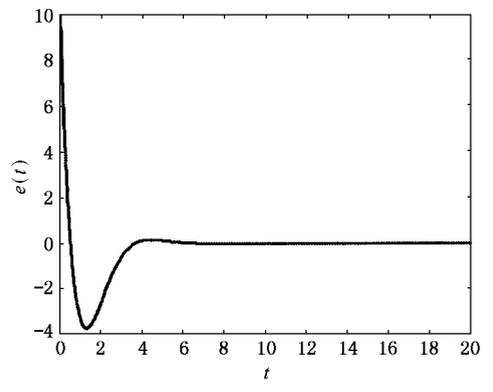


图 8 误差信号  $e(t) = x(t) - u(t)$  的显示结果

动系统(5)式的输出信号.图8给出了误差信号  $e(t) = x(t) - u(t)$ .结果表明系统实现了异结构同步.

### 4. 结论与展望

本文提出的追踪控制方法,可以有效实现

Rössler 混沌系统对任意参考信号的追踪控制,同时可以实现自同步以及异结构同步,这种控制器形式简单,易于实现,且收敛速度快,控制范围宽.此方法可以适用于其他混沌系统,且可以进一步推广到对多个状态变量的追踪控制问题.

- [ 1 ] Ott E , Grebogy C and Yoke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [ 2 ] Jackson E 1991 *Phys. D* **50** 341
- [ 3 ] Wu W G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1922 ( in Chinese ) [ 伍维根等 2000 物理学报 **49** 1922 ]
- [ 4 ] Yang L B *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 33 ( in Chinese ) [ 杨林保等 2000 物理学报 **49** 33 ]
- [ 5 ] Yang L B , Yang T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1039 ( in Chinese ) [ 杨林保、杨 涛 2000 物理学报 **49** 1039 ]
- [ 6 ] Yang T , Yang L B , Yang C M 1998 *Phys. Lett. A* **246** 284
- [ 7 ] Chen S H and Lu J A 1998 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* ( Wuhan :Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering Press , August ) ( in Chinese ) [ 陈士华、陆君安 1998 混沌动力学初步 ( 武汉 武汉水利电力大学出版社 ) ]
- [ 8 ] Liu F *et al* 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1198 ( in Chinese ) [ 刘 锋等 1999 物理学报 **48** 1198 ]
- [ 9 ] Tang G N *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 30 ( in Chinese ) [ 唐国宁等 2000 物理学报 **49** 30 ]
- [ 10 ] Guang X P *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 26 ( in Chinese ) [ 关新平等 2001 物理学报 **50** 26 ]

## Tracking control and synchronization of the Rössler 's chaotic system \*

Chen Shi-Hua Xie Jin Lu Jun-An Liu Jie

( School of Mathematical Statistics , Wuhan University , Wuhan 430072 , China )

( Received 13 August 2001 ; revised manuscript received 2 October 2001 )

### Abstract

A novel tracking control method is proposed for the Rössler 's chaotic system. It is proved by means of Lyapunov function that this method can make the Rössler 's system approach to any desired smooth orbit at an exponent rate. Both the self synchronization and the synchronization with Lorenz 's chaotic system are discussed as well. In the end , computer simulations are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Keywords** : Rössler 's chaotic system , Lorenz 's chaotic system , tracking control , synchronization

**PACC** : 0545

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No.19531070 ).