

具有二阶和三阶非线性一维光子晶体中的耦合模孤子*

朱善华^{1 2)} 崔维娜²⁾ 黄国翔²⁾

¹⁾ 株洲工学院基础课部 株洲 412008)

²⁾ 华东师范大学光谱学与波谱学教育部重点实验室, 华东师范大学物理系, 上海 200062)

(2001 年 6 月 24 日收到)

研究同时具有二阶和三阶非线性的一维光子晶体中的耦合孤子动力学. 从 Maxwell 方程出发, 利用多重尺度法, 导出了光学整流场与两个基频电场包络的非线性耦合模方程组, 给出了耦合模方程组的孤子解. 结果表明, 由于二阶非线性导致的光学整流场对基频电场有调制作用, 使得两个基频电场分量可以呈现为亮孤子-亮孤子、暗孤子-暗孤子及亮孤子-暗孤子对, 当两个基频电场的振动频率趋于光子晶体频带的带边频率时, 光学整流场消失.

关键词: 光子晶体, 光孤子

PACC: 4220, 4265, 0545

1. 引 言

近年来, 关于由介电函数的空间周期性分布制成的人工光学微结构材料即光子晶体(photonic crystals)的研究成为一个倍受重视且迅速发展的领域^[1-4]. 类似于半导体中运动的电子, 光子晶体中光子运动的频率具有频带结构, 因而光子晶体材料具有一系列重要的光学特性, 有着十分广阔的应用前景^[1, 2]. 如果入射光的强度足够强或材料具有很大的非线性响应系数, 非线性效应将是一个不可忽视的因素. 利用非线性效应可以实现光子的频率转换、产生超短脉冲和形成新型的光孤子等^[5-7].

由于光孤子可用于实现稳定的超长距离信息传输, 也可用于制作全光开关, 因而有可能实现一种用光孤子作为信息载体的全光处理技术, 使光孤子的研究成为一个热门的课题^[8]. 对于均匀材料中的光孤子已有大量的研究工作^[9, 10]. 光子晶体是一种空间非均匀的光学材料, 其中的光孤子具有十分有趣的特征. 由于光子晶体的介电函数具有空间周期性分布, 在线性近似下光子的本征频率(色散关系)形成频带结构, 两个相邻频带之间存在带隙(能隙). 由于 Bragg 反射, 频率位于带隙中的光子受到抑制. 非线性效应可使带隙中产生非线性局域模, 表现为带隙孤子(band gap solitons). 与均匀材料中光孤子的形

成机理(非线性效应和材料色散效应相平衡)不同, 光子带隙孤子的形成主要是由于体系的非线性效应和由于介电函数空间周期性分布而引起的色散(几何色散)效应相互平衡的结果. 由于人们可以对几何色散加以有效控制, 因而无论从理论上还是从工程应用设计上对光子晶体的研究都显得十分重要. 尽管关于光子带隙孤子的研究已有不少工作, 但主要集中在一维三阶非线性($\chi^{(3)}$)材料且光子带隙较窄的情形^[11]. Arraf 和 de Sterke 等^[12]研究了二阶非线性($\chi^{(2)}$)情形带边模的非线性耦合, 然而他们的结果只适用于窄带隙情况且没有考虑由于二阶非线性导致的光学整流场的作用.

本文研究非对称的一维光子晶体中的耦合孤子动力学. 我们同时考虑体系同时具有二阶和三阶非线性且光子带隙较宽的情形. 结果表明, 由于二阶非线性导致的光学整流场对基频电场产生非线性调制, 从而可以改变基频电场的光孤子类型.

2. 模型与渐近展开

在无源非磁性电介质中, 电场强度 E 和电极化强度 P 满足 Maxwell 方程:

$$\nabla^2 E - \nabla(\nabla \cdot E) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E + \frac{P}{\epsilon_0}) = 0, \quad (1)$$

式中 c 为光在真空中的传播速度, ϵ_0 为真空介电常

* 国家自然科学基金(批准号 19975019)和教育部跨世纪人才训练基金资助的课题.

量.在不考虑电介质的内禀色散和忽略损耗的条件下,对于非共振电介质体系的本构关系为

$$P = \epsilon_0(\chi^{(1)} \cdot E + \chi^{(2)} : EE + \chi^{(3)} : : : EEE), \tag{2}$$

式中 $\chi^{(j)}(j=1, 2, 3)$ 为 $(j+1)$ 阶电极化率张量. 对于一维光子晶体, 设电介质的电极化率张量沿 z 轴方向变化且具变化周期为 d , 即 $\chi^{(j)}(z) = \chi^{(j)}(z+d)$. 为简单起见, 我们假定 $E = (E(z, t), 0, 0)$, 方程 (1) 变为

$$c^2 \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - n^2(z) \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\chi^{(2)}(z) E^2 + \chi^{(3)}(z) E^3) = 0, \tag{3}$$

式中 $n^2(z) = 1 + \chi^{(1)}(z)$, $\chi^{(1)}(z) = \chi^{(1)}_{xx}(z)$, $\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)}_{xxx}(z)$, $\chi^{(3)}(z) = \chi^{(3)}_{xxxx}(z)$. 在得到方程 (3) 时已假定了电介质具有一定的对称性, 如 4mm 对称. 对于弱非线性电场, 可设电场振幅的大小为 $\mu = O(\Delta\omega/\omega)$, ω 为电场的激发频率, $\Delta\omega$ 为激发的频率宽度. 引入渐近展开

$$E(z, t) = \sum_{j=1} \mu^j E^{(j)} = \mu E^{(1)} + \mu^2 E^{(2)} + \mu^3 E^{(3)} + \dots, \tag{4}$$

$$M^{(3)} = -c^2 \left[2 \frac{\partial^2 E^{(2)}}{\partial z_0 \partial z_1} + \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial z_1^2} + 2 \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial z_0 \partial z_2} \right] + n^2(z_0) \left[2 \frac{\partial^2 E^{(2)}}{\partial t_0 \partial t_1} + \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial t_1^2} + 2 \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial t_0 \partial t_2} \right] + \chi^{(2)}(z_0) \left[2 \frac{\partial^2 E^{(1)} E^{(2)}}{\partial t_0^2} + 2 \frac{\partial^2 (E^{(1)})^2}{\partial t_0 \partial t_1} \right] + \chi^{(3)}(z_0) \frac{\partial^2 (E^{(1)})^3}{\partial t_0^2}, \tag{10}$$

3. 耦合模方程组

方程 (7) 可以逐级求解. 首级近似 ($j=1$) 是一个齐次方程 (因 $M^{(1)}=0$), 它的解可以是许多本振模 $\phi_m(z_0) e^{-i\omega_m t_0}$ 的线性叠加, 其中 $\phi_m(z_0)$ 满足

$$c^2 \frac{d^2 \phi_m}{dz_0^2} + \omega_m^2 n^2(z_0) \phi_m = 0. \tag{11}$$

因为 $n^2(z_0)$ 为周期函数, 方程 (11) 的解为 Bloch 函数 $\phi_m(z_0) = e^{ik_0 z_0} u_m(z_0)$, 其中 $u_m(z_0) = u_m(z_0+d)$. 本征值 $\omega_m = \omega_n(k)$ 具有带结构, $m = (n, k)$, n 为带指标, k 为简约波矢. 集合 $\{\phi_m(z_0)\}$ 构成完备函数集且有下列正交归一特性, 即

$$\int_0^L n^2(z_0) \phi_m^*(z_0) \phi_m(z_0) dz_0$$

式中 $E^{(j)} = E^{(j)}(z_0, z_1, z_2, \dots; t_0, t_1, t_2, \dots)$, $z_j = \mu^j z$, $t_j = \mu^j t$ ($j=0, 1, 2, \dots$). z_0 和 t_0 称为快变量, 而 z_j 与 t_j ($j=1, 2, \dots$) 称为慢变量. 为简单起见, 我们假设电极化率只与快变量有关, 即设 $n^2(z) = n^2(z_0)$, $\chi^{(2)}(z) = \chi^{(2)}(z_0)$, $\chi^{(3)}(z) = \chi^{(3)}(z_0)$. 展开式 (4) 意味着下列的导数展开

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sum_{j=0} \mu^j \frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{\partial}{\partial z_0} + \mu \frac{\partial}{\partial z_1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial z_2} + \dots, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sum_{j=0} \mu^j \frac{\partial}{\partial t_j} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \mu \frac{\partial}{\partial t_1} + \mu^2 \frac{\partial}{\partial t_2} + \dots. \tag{6}$$

将 (4)–(6) 式代入方程 (3), 比较 μ 的各阶幂次, 可得到关于 $E^{(j)}$ 的线性但非齐次的方程组

$$c^2 \frac{\partial^2 E^{(j)}}{\partial z_0^2} - n^2(z_0) \frac{\partial^2 E^{(j)}}{\partial t_0^2} = M^{(j)}, \tag{7}$$

$j=1, 2, 3, \dots$ 方程 (7) 中

$$M^{(1)} = 0, \tag{8}$$

$$M^{(2)} = -2c^2 \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial z_0 \partial z_1} + 2n^2(z_0) \frac{\partial^2 E^{(1)}}{\partial t_0 \partial t_1} + \chi^{(2)}(z_0) \frac{\partial^2 (E^{(1)})^2}{\partial t_0^2}, \tag{9}$$

$$= N \int_0^d n^2(z_0) \phi_m^*(z_0) \phi_m(z_0) dz_0 = N \delta_{n',m} \delta_{k',k}, \tag{12}$$

式中 L 为体系的长度, N 为正整数, $L = Nd$.

设首级近似下体系中仅有两个模式被激发, 即

$$E^{(1)} = (E_1^{(1)} \phi_{m_1}(z_0) e^{-i\omega_{m_1} t_0} + E_2^{(1)} \phi_{m_2}(z_0) e^{-i\omega_{m_2} t_0}) + c.c., \tag{13}$$

式中 $m_j = (n_j, k_j)$, $E_j^{(1)}(j=1, 2)$ 为模式的复包络振幅, 它们是慢变量 z_j 与 $t_j(j=1, 2, \dots)$ 的待定函数, c.c. 表示取复共轭. 注意到平均流项 $E_0^{(1)}(z_1, z_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$ 也是一个可能的解, 代表电光效应的贡献. 本文不考虑这种效应.

利用一级近似解 (12) 可以计算出 $M^{(2)}$ (见 (9) 式). 方程 (7) 的两个可解条件 (即 $E^{(2)}$ 中消除长期项

的条件)要求

$$v_{gj} \frac{\partial E_j^{(1)}}{\partial z_1} + \frac{\partial E_j^{(1)}}{\partial t_1} = 0 \quad j = 1, 2, \quad (14)$$

式中 $v_{gj} = (d\omega_m/dk)|_{m=m_j} = c |m_j| |\hat{\beta}| m_j / \omega_{m_j}$ 为波包的群速度, $\hat{\beta} = -ic\partial/\partial z_0$ 矩阵元 $m_i | \hat{\beta} | m_j$ 定义为

$$m_i | \hat{\beta} | m_j = \int_0^d -ic\phi_{m_i}^*(z_0) \frac{d\phi_{m_j}(z_0)}{dz_0} dz_0. \quad (15)$$

二级近似解为

$$E^{(2)} = E_0^{(2)} + [(\sum_l E_{1l}^{(2)} \phi_l(z_0) e^{-i\omega_{m_1} t_0} + \sum_l E_{2l}^{(2)} \phi_l(z_0) e^{-i\omega_{m_2} t_0}) + \text{c.c.}] + \dots, \quad (16)$$

式中 $E_0^{(2)} = E_0^{(2)}(z_1, z_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$ 是由基频电场 $E_j^{(1)} (j=1, 2)$ 的自相互作用形成的光学整流场(低频电场见(26)式), $E_{jl}^{(2)} = E_{jl}^{(2)}(z_1, z_2, \dots; t_1, t_2, \dots)$ ($j=1, 2$)是介电函数非均匀的贡献,对于均匀介质此项消失.在(16)式中,电场的倍频光场、和频与差频光场分量未显示写出.我们假定(13)式中所选的两个模式不会发生二次谐波、和频及差频共振过程.

利用一级和二级近似的结果(13)和(16)式可计算 $M^{(3)}$.当 $j=3$ 时方程(7)的两个可解条件导致 $E_j^{(1)} (j=1, 2)$ 所满足的方程组为

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda_{11}}{2} \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2\omega_{m_1}} \frac{\partial^2 E_1^{(1)}}{\partial t_1^2} + i \left(v_{g1} \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial z_2} + \frac{\partial E_1^{(1)}}{\partial t_2} \right) \\ & + \Lambda_{12} E_0^{(2)} E_1^{(1)} + \Lambda_{13} |E_2^{(1)}|^2 E_1^{(1)} \\ & + \Lambda_{14} |E_1^{(1)}|^2 E_1^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda_{21}}{2} \frac{\partial^2 E_2^{(1)}}{\partial z_1^2} - \frac{1}{2\omega_{m_2}} \frac{\partial^2 E_2^{(1)}}{\partial t_1^2} + i \left(v_{g2} \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial z_2} + \frac{\partial E_2^{(1)}}{\partial t_2} \right) \\ & + \Lambda_{22} E_0^{(2)} E_2^{(1)} + \Lambda_{23} |E_1^{(1)}|^2 E_2^{(1)} \\ & + \Lambda_{24} |E_2^{(1)}|^2 E_2^{(1)} = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$\begin{aligned} \Lambda_{j1} &= \frac{c^2 |m_j| m_j}{\omega_{m_j}} \\ &+ \frac{4c^2}{\omega_{m_j} \sum_{l \neq m_j}} \frac{|m_j | \hat{\beta} | l|^2}{\omega_{m_j}^2 - \omega_l^2}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\Lambda_{j2} = \omega_{m_j} C_{m_j, m_j}^{(2)},$$

$$C_{m_j, m_j}^{(2)} = \int_0^d \chi^{(2)}(z_0) \phi_{m_j}^*(z_0) \phi_{m_j}(z_0) dz_0, \quad (20)$$

$$\Lambda_{j3} = \omega_{m_j} \left[3C_{m_j, m_{3-j}, m_j, m_{3-j}}^{(3)} \right.$$

$$\begin{aligned} & + \sum_l \frac{\chi(\omega_{m_j} + \omega_{m_{3-j}})^2 |C_{l, m_j, m_{3-j}}^{(2)}|^2}{\omega_l^2 - (\omega_{m_j} + \omega_{m_{3-j}})^2} \\ & + \sum_l \frac{\chi(\omega_{m_j} - \omega_{m_{3-j}})^2 |C_{l, m_{3-j}, m_j}^{(2)}|^2}{\omega_l^2 - (\omega_{m_j} - \omega_{m_{3-j}})^2} \Big], \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{j4} &= \omega_{m_j} \left(\frac{3}{2} C_{m_j, m_j, m_j, m_j}^{(3)} + \sum_l \frac{4\omega_{m_j}^2 |C_{l, m_j, m_j}^{(2)}|^2}{\omega_l^2 - 4\omega_{m_j}^2} \right) \\ & j = 1, 2. \end{aligned} \quad (22)$$

$$m_j | m_j = \int_0^d \phi_{m_j}^*(z_0) \phi_{m_j}(z_0) dz_0, \quad (23)$$

$$C_{l, mk}^{(2)} = \int_0^d \chi^{(2)}(z_0) \phi_l^*(z_0) \phi_m(z_0) \phi_k(z_0) dz_0, \quad (24)$$

$$C_{nl, mk}^{(3)} = \int_0^d \chi^{(3)}(z_0) \phi_n^*(z_0) \phi_l^*(z_0) \phi_m(z_0) \phi_k(z_0) dz_0. \quad (25)$$

从(17)与(18)两式可知,光学整流场与两个基频电场 $E_1^{(1)}$ 和 $E_2^{(1)}$ 存在非线性耦合.为得到一个关于 $E_0^{(2)}$, $E_1^{(1)}$ 和 $E_2^{(1)}$ 封闭的方程组,还须另一个方程.此方程可由方程(7)式的第四级近似($j=4$)的一个可解条件得到,即

$$\begin{aligned} & v_p^2 \frac{\partial^2 E_0^{(2)}}{\partial z_1^2} - \frac{\partial^2 E_0^{(2)}}{\partial t_1^2} - \frac{2}{\bar{n}^2 d} \\ & \times \left(C_{m_1, m_1}^{(2)} \frac{\partial^2 |E_1^{(1)}|^2}{\partial t_1^2} + C_{m_2, m_2}^{(2)} \frac{\partial^2 |E_2^{(1)}|^2}{\partial t_1^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $v_p^2 = c^2/\bar{n}^2$, $\bar{n}^2 = (1/d) \int_0^d n^2(z_0) dz_0$.显然 v_p 称为低频光学整流场(长波)的相速度.从(26)式可知,低频光学整流场 $E_0^{(2)}$ 是由两个高频电场 $E_1^{(1)}$ 与 $E_2^{(1)}$ 的自相互作用所形成的;反过来该光学整流场 $E_0^{(2)}$ 对两个高频电场 $E_1^{(1)}$ 和 $E_2^{(1)}$ 产生非线性调制(见方程(17)和(18)式).

4. 孤子解

方程(17)(18)和(26)是一组关于 $E_0^{(2)}$, $E_1^{(1)}$ 和 $E_2^{(1)}$ 的非线性耦合模方程.另外,注意到耦合模方程组的解还应满足方程(14).从方程(14)可知,如果假定两个基频场的走离(walk-off)效应很小,即设它们有近似相等的群速度(群速度匹配 $v_{g1} \approx v_{g2} = v_g$),则可令 $E_j^{(1)} = E_j^{(1)}(\xi, z_2, t_2)$ ($j=1, 2$), $\xi = z_1 - v_g t$, 则条件(14)式可自动满足.则由方程(26)可求得

$$E_0^{(2)} = \frac{2v_g^2 (C_{m_1, m_1}^{(2)} |E_1^{(1)}|^2 + C_{m_2, m_2}^{(2)} |E_2^{(1)}|^2)}{(v_p^2 - v_g^2)n^2 d}. \quad (27)$$

令 $E_j = \mu E_j^{(1)} (j = 1, 2)$, $\mu^2 \zeta = z - v_g t$, 并注意到 $\xi = \mu \zeta$, $\zeta = z - v_g t$, $t_2 = \mu^2 t$, 方程(17)与(18)变为(回到原始的变量 z, t)

$$i \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\omega''_{m_1}}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \zeta^2} + b_{11} |E_2|^2 E_1 + b_{12} |E_1|^2 E_1 = 0, \quad (28)$$

$$i \frac{\partial E_2}{\partial t} + \frac{\omega''_{m_2}}{2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial \zeta^2} + b_{21} |E_1|^2 E_2 + b_{22} |E_2|^2 E_2 = 0, \quad (29)$$

式中

$$b_{j1} = \frac{2\omega_{m_j} v_g^2 C_{m_j, m_j}^{(2)} C_{m_{3-j}, m_{3-j}}^{(2)}}{(v_p^2 - v_g^2)n^2 d} + \Lambda_{j3}, \quad (30)$$

$$b_{j2} = \frac{2\omega_{m_j} v_g^2 C_{m_j, m_j}^{(2)} C_{m_j, m_j}^{(2)}}{(v_p^2 - v_g^2)n^2 d} + \Lambda_{j4}, \quad (31)$$

$$\omega''_{m_j} = \frac{d^2 \omega_m}{dk^2} \Big|_{m=m_j} = \frac{c^2 |m_j|}{\omega_{m_j}} + \frac{4c^2}{\omega_{m_j}} \sum_{l \neq m_j} \frac{|m_j| |\beta| |l|}{\omega_{m_j}^2 - \omega_l^2} - \frac{(v_{gj})^2}{\omega_{m_j}} \quad (j = 1, 2), \quad (32)$$

ω''_{m_j} 为基频电场分量的波包群速色散. 注意到在我们的系统中没有考虑材料色散, 色散的贡献来自于线性介电函数 $\epsilon(z) = \epsilon_0 n^2(z)$ 随空间的周期性分布. 从表达式(27)可知, 当群速度 v_g 趋于零时光学整流场趋于消失, 所以当基频电场的振动频率位于光子晶体的边带时(见图1), 不存在光学整流场.

另外, 从(30)与(31)式可知, 当基频电场的群速度 v_g 趋于光学整流场的相速度 v_p 时, b_{j1} 和 b_{j2} ($j = 1, 2$) 趋于无穷, 方程组(28)和(29)失效. 这一情况相应于长波(光学整流场)和短波(基频电场)共振, 这是一种有趣的现象, 需要另作讨论.

从方程(28)和(29)可知, 由于群速匹配使得两个基频电场的包络 E_1 与 E_2 有较强的耦合, 除了自相位调制作用项 $|E_j|^2 E_j$ 外, 还存在交叉相位调制作用项 $|E_j|^2 E_{3-j}$ ($j = 1, 2$). 交叉相位调制的存在可使孤子的类型和孤子特性发生重大改变.

方程(28)与(29)在孤子理论中称为 Markov 方程^[13] 在某些特殊情况下是可积的(即可用逆散射方法等求出多孤子解). 一般情况下, 解的类型依赖与方程的系数 b_{ij} 和 ω''_{m_j} .

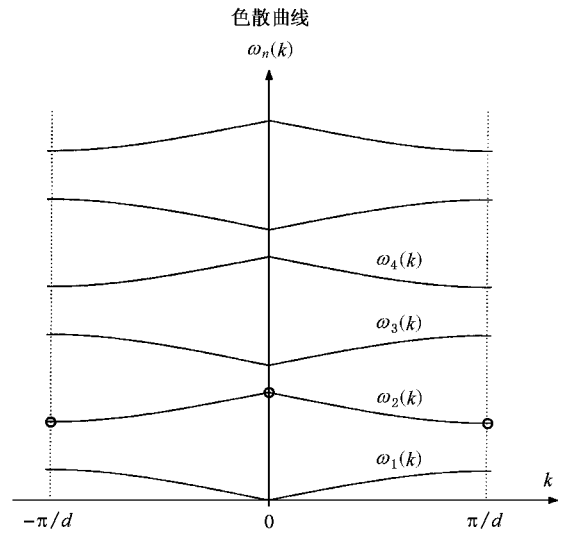


图1 一维光子晶体色散关系曲线 $\omega_m = \omega_m(k)$ 的带结构示意图 n 为带指标, k 为简约波矢. 由于介电函数的周期性分布使电场振动的本征频率具有带结构. 两个相邻频带之间存在带隙. 对于带边模, 位于 $k=0$ 或 $k = \pm\pi/d$ 图中用圆圈表示. 例如带 $\omega_2(k)$ 群速 $v_g = 0$ 且 $\omega''_m < \alpha$ (对于上截止模) 或 $\omega''_m > \alpha$ (对于下截止模)

下面研究耦合模方程(28)与(29)的孤子解. 首先讨论当体系仅激发一个基频模, 即单模(例如 $E_1 \neq 0, E_2 = 0$)的情况. 此时耦合模方程(28)与(29)变为非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\omega''_{m_1}}{2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial \zeta^2} + b_{12} |E_1|^2 E_1 = 0. \quad (33)$$

依赖于 ω''_{m_1} 与 b_{12} 的符号, 方程(33)存在不同类型的孤子解. 如果 $\omega''_{m_1} b_{12} > 0$, 解为亮孤子(bright soliton)

$$E_1 = W \operatorname{sech} \left\{ \left(\frac{b_{12}}{\omega''_{m_1}} \right)^{1/2} W (\zeta - K \omega''_{m_1} t - \zeta_0) \right\} \times \exp \left\{ i \left[K \zeta - \frac{1}{2} (\omega''_{m_1} K^2 - b_{12} W^2) t - \varphi_0 \right] \right\}, \quad (34)$$

式中 W, K, ζ_0 和 φ_0 为任意实常数. 在一级近似下电场的表达式为

$$E_1 = 2W |\phi_{m_1}(z)| \operatorname{sech} \left\{ \left(\frac{b_{12}}{\omega''_{m_1}} \right)^{1/2} W (z - (K \omega''_{m_1} + v_g) t - \zeta_0) \right\} \cos \left\{ Kz - \left[\omega_{m_1} + K v_g + \frac{1}{2} (\omega''_{m_1} K^2 - b_{12} W^2) \right] t - \varphi_0 + \varphi(z) \right\} \quad (35)$$

式中 $\phi_{m_1}(z) = |\phi_{m_1}(z)| e^{i\varphi(z)}$. 若 $K = v_g = 0$ (35)式代表一非传播的光孤子, 其振动频率为

$$\omega = \omega_{m_1} - \frac{1}{2} b_{12} W^2. \quad (36)$$

光子晶体中令人感兴趣的是带边模,显然对于带边模有 $v_g = 0$. 另外,对于上截止带边模有 $\omega''_{m_1} < 0$; 而对于下截止带边模有 $\omega''_{m_1} > 0$ (见图 1). 注意到 b_{12} 与 ω''_{m_1} 同号,因而对于上截止带边模有 $\omega > \omega_{m_1}$, 对于下截止带边模有 $\omega < \omega_{m_1}$. 因此由于非线性效应使基频电场产生频移,相应于带边模的亮孤子的振动频率总是位于带隙之内,这样的孤子即为带隙孤子^[11].

如果 $\omega''_{m_1} b_{12} < 0$, 则方程(33)有暗孤子(dark soliton)解

$$E_1 = W \tanh \left\{ \left(\frac{-b_{12}}{\omega''_{m_1}} \right)^{1/2} W(\zeta - K\omega''_{m_1} t - \zeta_0) \right\} \times \exp \left\{ i \left[K\zeta - \left(\frac{1}{2} K^2 \omega''_{m_1} - b_{12} W^2 \right) t - \varphi_0 \right] \right\}. \quad (37)$$

易证当 $K = 0$ 时,带边模(37)式所对应的基频电场为一非传播的暗孤子且振动频率位于光子晶体的频带之内.

另外,从光孤子理论可知,亮孤子解(34)式对应于自聚焦(self-focusing),而暗孤子解(37)式对应于自散焦(self-defocusing). 对于给定的光学材料而言, b_{12} 的符号是确定的,但 ω''_{m_1} 的符号随不同的带指标(n)和简约波矢(k)而改变. 所以对于光子晶体而言,体系可以是自聚焦也可以是自散焦,依赖于光波的入射频率. 正是由光子晶体的色散曲线的带结构,导致体系具有不同于均匀介质情形的这些有趣的特性.

另一方面,从光孤子理论可知,方程(33)中的非线性项系数 b_{12} 正比于体系的 Kerr 系数. 从(31)式可以看出, Kerr 系数包含 $\chi^{(2)}$ 和 $\chi^{(3)}$ 两部分的贡献. 可见即使是 $\chi^{(3)} = 0$, 体系仍存在 Kerr 效应,可产生自聚焦或自散焦而形成亮孤子或暗孤子. 另外当基频电场 E_1 的群速度 v_g 接近光学整流场的相速度 v_p 时, b_{12} 从而体系的 Kerr 系数将有很大的值. 利用这一特性可以大大提高体系的折射率.

其次讨论方程(28)与(29)的耦合孤子解. 可分下列三种情况讨论(设 $\omega''_{m_2} \neq 0$):

1) 亮孤子-亮孤子型 在 $b_{11} b_{22} > b_{21} b_{12}$, $\omega''_{m_1} b_{22} > \omega''_{m_2} b_{12}$ 且 $\omega''_{m_2} b_{11} > \omega''_{m_1} b_{21}$ 的条件下,或反之,方程(28)与(29)存在耦合的亮孤子解

$$E_1 = W_1 \operatorname{sech}(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_1 \zeta - \Omega_1 t)} \quad (38)$$

$$E_2 = W_2 \operatorname{sech}(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_2 \zeta - \Omega_2 t)} \quad (39)$$

式中 K_0 和 K_1 为任意常数, $K_2 = \frac{\omega''_{m_1}}{\omega''_{m_2}} K_1$, 且

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(K_1^2 - K_0^2)\omega''_{m_1}, \quad (40)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}(K_2^2 - K_0^2)\omega''_{m_2}, \quad (41)$$

$$|W_1|^2 = \frac{K_0^2(\omega''_{m_1} b_{22} - \omega''_{m_2} b_{12})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}, \quad (42)$$

$$|W_2|^2 = \frac{K_0^2(\omega''_{m_2} b_{11} - \omega''_{m_1} b_{21})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}. \quad (43)$$

在一级近似下电场的表达式为

$$E = 2W_1 |\phi_{m_1}(z)| \operatorname{sech}\{K_0[z - (v_g + \omega''_{m_1} K_1 t)]\} \times \cos\{K_1 z - (\omega_{m_1} + v_g K_1 + \Omega_1)t + \theta_1 + \varphi_1(z)\} + 2W_2 |\phi_{m_2}(z)| \operatorname{sech}\{K_0[z - (v_g + \omega''_{m_1} K_1 t)]\} \times \cos\{K_2 z - (\omega_{m_2} + v_g K_2 + \Omega_2)t + \theta_2 + \varphi_2(z)\}, \quad (44)$$

式中 $\phi_{m_j}(z) = |\phi_{m_j}(z)| e^{i\phi_j(z)}$, $W_j = |W_j| e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$. 若 $K_1 = v_g = 0$ (44)式代表两个耦合的非传播光孤子,相应于不同的两个带边模(对于带边模,群速匹配条件自然满足). 由(40)和(41)式可知,由于交叉调制的贡献,每个亮孤子的振动频率可以位于频带之中也可位于带隙之内. 这是与单模激发的一个不同之处.

2) 暗孤子-暗孤子型 在 $b_{11} b_{22} > b_{21} b_{12}$, 但 $\omega''_{m_2} b_{12} > \omega''_{m_1} b_{22}$, $\omega''_{m_1} b_{21} > \omega''_{m_2} b_{11}$ 下,或反之,方程(28)与(29)具有耦合的暗孤子解

$$E_1 = W_1 \tanh(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_1 \zeta - \Omega_1 t)} \quad (45)$$

$$E_2 = W_2 \tanh(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_2 \zeta - \Omega_2 t)} \quad (46)$$

式中 K_0 和 K_1 为任意常数, $K_2 = -\frac{\omega''_{m_1}}{\omega''_{m_2}} K_1$, 且

$$\Omega_1 = \frac{1}{2}(2K_0^2 + K_1^2)\omega''_{m_1}, \quad (47)$$

$$\Omega_2 = \frac{1}{2}(2K_2^2 + 2K_0^2)\omega''_{m_2}, \quad (48)$$

$$|W_1|^2 = \frac{K_0^2(\omega''_{m_2} b_{12} - \omega''_{m_1} b_{22})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}, \quad (49)$$

$$|W_2|^2 = \frac{K_0^2(\omega''_{m_1} b_{21} - \omega''_{m_2} b_{11})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}. \quad (50)$$

3) 亮孤子-暗孤子型 在 $b_{11} b_{12} > b_{21} b_{12}$, $\omega''_{m_2} b_{12} > \omega''_{m_1} b_{22}$ 且 $\omega''_{m_2} b_{11} > \omega''_{m_1} b_{21}$ 下,或反之,方程

(28)与(29)具有耦合的亮-暗孤子解

$$E_1 = W_1 \operatorname{sech}(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_1 \zeta - \Omega_1 t)} \quad (51)$$

$$E_2 = W_2 \tanh(K_0 \zeta - \omega''_{m_1} K_1 K_0 t) e^{i(K_2 \zeta - \Omega_2 t)} \quad (52)$$

式中 K_0 和 K_1 为任意常数, $K_2 = \frac{\omega''_{m_1}}{\omega''_{m_2}} K_1$, 且

$$\Omega_1 = \frac{(K_1^2 + K_0^2) \omega''_{m_1}}{2} - b_{11} |W_1|^2, \quad (53)$$

$$\Omega_2 = \frac{(K_2^2 + 2K_0^2) \omega''_{m_2}}{2} - b_{21} |W_1|^2, \quad (54)$$

$$|W_1|^2 = \frac{K_0^2 (\omega''_{m_2} b_{12} - \omega''_{m_1} b_{22})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}, \quad (55)$$

$$|W_2|^2 = \frac{K_0^2 (\omega''_{m_2} b_{11} - \omega''_{m_1} b_{21})}{b_{11} b_{22} - b_{21} b_{12}}. \quad (56)$$

与单模激发不同的是, 由于交叉调制的作用相应某一本征模的光孤子的类型可以发生改变(即从亮孤子变为暗孤子, 或反之)。

注意到文献[12]研究的是当带隙较窄时, 同一个带隙所对应的两个上下带边模的非线性耦合。本文的结果适用于带隙较宽的情况且所讨论的两个基频模可以位于不同的频带之内。模模之间的耦合是通过交叉相位调制实现的。

5. 结 论

本文研究了同时具有二阶和三阶非线性的一维光子晶体中的耦合孤子动力学。为了研究体系的弱非线性效应, 我们利用多重尺度奇异微扰方法对 Maxwell 方程作渐进展开, 导出了两个基频模的包络所满足的非线性耦合方程组。由于体系的二阶非线性效应, 在二级近似中因基频模的自相互作用导致光学整流场的产生, 该光学整流场又反过来对基频模产生非线性调制。我们给出了单模和双模激发情形下的多种形式的孤子及耦合型孤子解。结果表明, 在单模情形下, 由于光子晶体本征频率的带结构, 体系可以表现为自聚焦或自散焦, 依赖于光波的入射频率; 在双模情形下, 两个模在群速度匹配的条件下存在较强的相互作用。对于两个不同的带边模群速度匹配条件自然得到满足。由于交叉调制的作用可以形成多种不同类型的耦合型孤子。另外, 结果显示当基频电场的振动频率趋于光子晶体的带边频率时光学整流场趋于消失。

感谢与 V. V. Konotop, 马雷等的有益讨论。

- [1] Joannopoulos J D, Meade R D and Winn J N 1995 *Photonic Crystal* (New York: Princeton Press)
- [2] Soukoulis C M 1996 *Photonic Band Gap Material* (NATO Advanced Studies Institute Series E, 315 Dordrecht: Kluwer Academic)
- [3] Joannopoulos J D, Villeneuve P R and Fan S 1997 *Nature* **386** 143
- [4] Li Z Y *et al* 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 2574
Zhu S Y *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 2136
- [5] Martorell J *et al* 1997 *Appl. Phys. Lett.* **70** 702
Conti C *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 2341
Conti C *et al* 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 2502
- [6] Vlasov R A and Smirnov A G 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5808
Andreev A V *et al* 2001 *Phys. Rev. E* **63** 016602
- [7] Mingaleev S F and Kivshar Y S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5474

- [8] Hasegawa A and Kodama Y 1995 *Solitons in Optical Communications* (Oxford: Oxford University Press)
- [9] Newell A and Moloney J V 1991 *Nonlinear Optics* (Redwood City, CA: Addison-Wesley Publishing Company)
- [10] Huang G X and Velarde M G 1996 *Phys. Rev. E* **54** 3048
Huang G X 2001 *Chin. Phys.* **10** 418
- [11] de Sterke C M and Sipe J E 1994 *Prog. Opt.* **XXXIII** 203
- [12] Arraf A and de Sterke C M 1998 *Phys. Rev. E* **58** 7951
Iizuka T and Kivshar Y S 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4491; 2000 *ibid.* **62** 4246
- [13] Ablowitz M J and Clarkson P A 1991 *Solitons, Nonlinear Evolution Equations and Inverse Scattering* (Cambridge: Cambridge University Press)

Coupled solitons in one-dimensional photonic crystals with quadratic and cubic nonlinearities^{*}

Zhu Shan-Hua^{1,2)} Cui Wei-Na²⁾ Huang Guo-Xiang²⁾

¹⁾ *Department of Basic Sciences, Zhuzhou Institute of Technology, Zhuzhou 412008, China*

²⁾ *Key Laboratory for Optical and Magnetic Resonance Spectroscopy of the Ministry of Education, East China Normal University; Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China*

(Received 24 June 2001)

Abstract

The dynamics of the coupled solitons in one-dimensional photonic crystals with quadratic and cubic nonlinearities is studied. Starting from the Maxwell equation, the coupled-mode equations for the envelopes of two fundamental frequency mode and one low-frequency mode components due to the optical rectification are derived by multiple scales method. A set of coupled soliton solutions of the coupled-mode equations is provided. The results show that there exists a modulation of the fundamental frequency modes by the optical rectification field resulting from the quadratic nonlinearity, which makes the fundamental frequency mode components appear as soliton pairs of bright-bright, bright-dark and dark-dark types. The optical rectification field will disappear when the frequencies of the fundamental frequency fields approach to the frequency of the photonic band boundary.

Keywords : photonic crystals, optical solitons

PACC : 4220, 4265, 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 19975019) and by the Trans-Century Training Program Foundation for the Talents from the Education Ministry of China.