第 51 卷 第 5 期 2002 年 5 月
1000-3290/2002/51(05)/0943-03
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.51, No.5, May, 2002

Dirac 猜想的一个反例*

李爱民　江金环　李子平
（北京工业大学数理学院，北京　100022）
（2001 年 9 月 26 日收到；2001 年 11 月 3 日收到修改稿）

从约束 Hamilton 系统相空间中对称性分析，给出一个反例. 首次用正则 Noether 恒等式说明 Dirac 猜想失效，在此反例中没有将约束线性化.

关键词：约束 Hamilton 系统，正则对称性，Dirac 猜想
PACC：0320，1110，1115，1130

用奇异 Lagrange 量描述的系统在相空间中存在固有约束，为约束 Hamilton 系统. 虽然对约束系统的 Dirac 理论及其推广的研究取得了相当的进展，但是约束系统的 Dirac 理论中的若干基本问题，至今在文献中仍广泛地不断地有所讨论，其中之一就是 Dirac 猜想[1,2]. Dirac 曾猜想：所有第一类约束均是规范变换的生成元，它们生成物理态之间的等价变换. 该猜想涉及约束 Hamilton 系统量子化中规范条件的选取，在现代量子场论中占基本地位. 关于 Dirac 猜想是否有效，长期以来不断有争议，其争议是考察由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的运动方程不等价于对应的 Lagrange 方程[3—5]，Cawley 等人给出了若干反例[6,7]. 近来，重新讨论了若干反例[8—11]，指出 Cawley 等人的反例不是真正的反例，因为他们采用了将约束线性化的步骤，导致了强等和弱等概念的混淆[11]. 本文首次用正则 Noether 恒等式讨论 Dirac 猜想的有效性，并给出一个新的反例，说明 Dirac 猜想失效，而此反例中没有将约束线性化.

考虑 Lagrange 量

$$L = \frac{1}{2}e^{2u(y)}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}e^{-2v(-y)}\dot{z}^2, \tag{1}$$

其中函数 $u(y)$，$v(-y)$ 满足的条件下面给出. (1) 式在变换

$$x' = x - \alpha e^{-w}z,\quad z' = z + \alpha e^{w}x \qquad (|\alpha| \ll 1) \tag{2}$$

下不变（α 为无穷小参数，$w = u(y) + v(-y)$），由 Lagrange 变量表述的 Noether 定理可得守恒量[12]

$$e^{\theta(y)}(x\dot{z} - z\dot{x}) = \text{const}. \tag{3}$$

其中 $\theta(y) = u(y) - v(-y)$. 过渡到 Hamilton 描述，坐标 x, y, z 相应的正则动量为

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = e^{2u(y)}\dot{x},\quad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = 0,$$

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = e^{-2v(-y)}\dot{z},$$

正则 Hamilton 量为

$$\begin{aligned} H_C &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - L \\ &= \frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^2 + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^2. \end{aligned} \tag{4}$$

初级约束为 $\phi^0 = p_y \approx 0$，总 Hamilton 量 $H_T = H_C + \lambda\phi^0$，其中 $\lambda(t)$ 为 Lagrange 乘子. 由初级约束的自洽性条件给出次级约束

$$\begin{aligned} \phi^1 &= \{\phi^0, H_T\} \\ &= e^{-2u(y)}u'(y)p_x^2 + e^{2v(-y)}v'(-y)p_z^2 \approx 0. \end{aligned}$$

当函数 $u(y)$，$v(-y)$ 满足

$$\begin{aligned} u''(y) &= u'(y) + 2[u'(y)]^2, \\ -v''(-y) &= v'(-y) + 2[v'(-y)]^2 \end{aligned} \tag{5}$$

时，ϕ^1 的自洽性条件不再产生出新的次级约束. 全部约束 ϕ^0，ϕ^1 均为第一类约束.

正则 Lagrange 量为

$$\begin{aligned} L^p &= p_x\dot{x} + p_y\dot{y} + p_z\dot{z} - H_C \\ &= \frac{1}{2}e^{-2u(y)}p_x^2 + \frac{1}{2}e^{2v(-y)}p_z^2. \end{aligned} \tag{6}$$

在相应的相空间的变换

$$p_x' = p_x - \alpha e^{w}p_z,$$

* 北京市自然科学基金（批准号：1942005）资助的课题.

$$p_z' = p_z + \alpha e^{-w} p_x , \qquad (|\alpha| \ll 1) \tag{7}$$

下，L^P 和 ϕ^0 不变，由正则形式的 Noether 定理可得守恒量[13]

$$e^{\theta(y)}(x\dot{z} - z\dot{x}) = \text{const}. \tag{8}$$

此结果与(3)式一致.

如果 Dirac 猜想成立，那么一个具有初级第一类约束 $\phi^0 \approx 0$ 和次级第一类约束 $\phi^1 \approx 0$ 的系统，其运动方程应该由扩展 Hamilton 量 H_E 导出[3,5]：

$$\begin{aligned} H_E &= H_C + \lambda\phi^0 + \mu\phi^1 \\ &= H_C + H_1 \qquad (H_1 = \lambda\phi^0 + \mu\phi^1), \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\mu(t)$ 为另一 Lagrange 乘子. 因 ϕ^1 在(7)式变换下不具有不变性，所以不能从 H_E 给出的正则 Noether 定理得到守恒量(8)式[13]，说明 Dirac 猜想失效.

下面从相空间的 Noether 恒等式来考察这个问题. 假设系统 Lagrange 量 L^P 在变换

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ q^{i'}(t') &= q^i(t) + S^{i\sigma}\varepsilon_\sigma \\ &= q^i(t) + \left(b_0^{i\sigma} + b_1^{i\sigma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\varepsilon_\sigma(t), \\ p_i'(t') &= p_i(t) + T_i^\sigma\varepsilon_\sigma \\ &= p_i(t) + \left(c_{i0}^\sigma + c_{i1}^\sigma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\varepsilon_\sigma(t) \end{aligned} \tag{10}$$

下（其中 $\varepsilon_\sigma(t)(\sigma = 1,2,\cdots,r)$ 为任意函数，系数 b，c 等均为 t，q，p 的函数）是不变的，且系统的正则方程是由扩展 Hamilton 量 H_E 导出的，由正则 Noether 恒等式，沿着系统运动的轨线，有[8,13]

$$\tilde{S}^{i\sigma}\left(\lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial q^i}\right) + \tilde{T}_i^\sigma\left(\lambda_a\frac{\partial\phi_a}{\partial p_i}\right) = 0$$
$$(\sigma = 1,2,\cdots,r), \tag{11}$$

其中 ϕ_a 为所有第一类约束，$\tilde{S}^{i\sigma}$，$\tilde{T}_i^\sigma$ 是相应于 $S^{i\sigma}$，T_i^σ 的伴随算符[13]. 对允许 Lagrange 量，方程(11)式如给出不自洽的结果，表明 Dirac 猜想失效. 如果(11)式确定出与第一类约束相联系的 Lagrange 乘子间的某些关系，这说明该约束乘子并非是任意的，这违背了 Dirac 猜想中乘子的任意性[1]，从而对 Dirac 猜想的提出产生了疑问. 该猜想失效也就很自然了.

在上述例子中，系统 Lagrange 量 L^P 在定域变换

$$\begin{aligned} x' &= x - \alpha(t)e^{-w}z, \\ z' &= z + \alpha(t)e^{w}x \qquad (|\alpha| \ll 1), \\ p_x' &= p_x - \alpha(t)e^{w}p_z, \\ p_z' &= p_z + \alpha(t)e^{-w}p_x \qquad (|\alpha| \ll 1) \end{aligned} \tag{12}$$

下不变，此时(11)式化为

$$\tilde{T}_x\frac{\partial H_1}{\partial p_x} + \tilde{T}_z\frac{\partial H_1}{\partial p_z} = 0, \tag{13}$$

从而

$$\mu e^{-\theta(y)}p_x p_z[v'(-y) - u'(y)] = 0. \tag{14}$$

解出(5)式知 $v'(-y) \neq u'(y)$，从(14)式，利用 Lagrange 方程不难看出 $\mu = 0$，表明 Dirac 猜想在这个例子中失效，而此例中不涉及约束线性化的问题.

这个反例也可从 H_E 导出的运动方程是否与 Lagrange 方程等价以及从 Poincaré-Cartan 积分不变量来分析说明[13].

[1] Dirac P A M 1964 *Lecture on Quantum Mechanics* (new York: Yeshiva University)

[2] Wang A M and Ruan T N 1996 *Phys. Rev.* A **54** 57

[3] Costa M E V, Girotti H O and Simões T J M 1985 *Phys. Rev.* D **32** 405

[4] Cabo A 1986 *J. Phys. A: Math. Gen.* **19** 629

[5] Henneaux M, Teiteboim C and Zanell J 1990 *Nucl. Phys.* **31** 448

[6] Allock G R 1975 *Phil. Trans. Rov. Soc.* A **279** 485

[7] Cawley R 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 413
1980 *Phys. Rev.* D **21** 2988
Frenkel A 1980 *Phys. Rev.* D **21** 2986

[8] Li Z P 1991 *J. Phys.* A **24** 225

[9] Li Z P 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 710 (in Chinese) [李子平 1992 物理学报 **41** 710]

[10] Li Z P 1994 *Phys. Rev.* E **52** 876

[11] Qi Z 1990 *Int. J. Theor Phys.* **29** 1309

[12] Zhang Y, Shang M and Mei F X 2000 *Chin. Phys.* **9** 401

[13] Li Z P 1999 *Constrained Hamiltonian Systems and Their Symmetry Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University) (in Chinese) [李子平 1999 约束哈密顿系统及其对称性质(北京工业大学出版社)]

A counter-example to a conjecture of Dirac*

Li Ai-Min Jiang Jin-Huan Li Zi-Ping

(*College of Applied Sciences*, *Beijing Polytechnic University*, *Beijing* 100022, *China*)

(Received 26 September 2001; revised manuscript received 3 November 2001)

Abstract

Based on the canonical symmetries of constrained Hamiltonian systems, a counter-example to a conjecture of Dirac is given. Using the canonical first Noether theorem and canonical Noether identities, we have shown that Dirac's conjecture fails in that example. There is no linearization of constraint in our treatment.

Keywords: constrained Hamiltonian systems, canonical symmetries, Dirac's conjecture

PACC: 0320, 1110, 1115, 1130

* Project supported by the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 1942005).